

B 1,237,214

Nachrichten

von der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1904.

Göttingen,
Commissionsverlag der Dieterich'schen Universitätsbuchhandlung
Lüder Horstmann.
1904.

Register

über

die Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1904.

Zur Theorie des Lichtes für aktive Körper.

Von

P. Drude.

Vorgelegt von W. Voigt in der Sitzung vom 9. Januar 1904.

Das Erklärungssystem, welches Voigt[1]) für aktive Körper aufgestellt hat, unterscheidet sich von dem von mir vorgeschlagenen[2]) durch Glieder, welche, wie Voigt schon früher und neuerdings[3]) dargelegt hat, ermöglichen, daß die Energiegleichung, wie dieselbe in der Elektrodynamik formulirt ist, aufrecht erhalten werden kann, während das bei meinem Erklärungssystem nicht der Fall war. Wiewohl diese Zusatzglieder für die Berechnung beobachtbarer Fälle, bei denen es auf dem Einfluß der Aktivitätsglieder auf die Grenzbedingungen nicht ankommt, keine Aenderung hervorbringen, so ist doch keine Frage, daß man aus dem theoretischen Grunde an den Voigt'schen Zusatzgliedern festhalten wird.

Da ich später (vgl. Anm. 2) ein physikalisches Bild für den Aufbau meines Erklärungssystemes aktiver Körper benutzt habe, so entsteht die Frage, ob dieses Bild, welches z. B. auch als gutes Leitmotiv für die complicirte Theorie des Einflusses einer Bewegung des aktiven Körpers auf seine optischen Eigenschaften

1) W. Voigt, Wied. Ann. 69, p. 307, 1899.

2) Ich habe dasselbe zuerst in den Gött. Nachr. Nr. 11, 1892, p. 403 aufgestellt und später in meinem Lehrbuche der Optik, Leipzig 1900, p. 370, ein physikalisches Bild dieses Erklärungssystems gegeben.

3) W. Voigt, Gött. Nachr. 1903, p. 155.

dienen kann, auch für das Voigt'sche Erklärungssystem brauchbar ist, oder nicht. Diese Frage ist zu bejahen, das von mir benutzte Bild liefert sogar nothwendig auch die Voigt'schen Ergänzungsglieder [1]), und die von mir in meinem Lehrbuche der Optik gegebene Darstellung ist unvollständig, weil sie das dort benutzte Bild nicht konsequent durchführt [2]). Dies möchte ich hier kurz darlegen, wobei ich noch betonen möchte, was m. E. die Brauchbarkeit des Bildes erhöht, daß ich diese Ergänzung nicht erst nach Kenntniß und auf Grund des Voigt'schen Erklärungssystemes gefolgert habe, sondern vor der Kenntniß desselben, d. h. unabhängig davon.

Betrachten wir zunächst einen aktiven, isotropen Körper. Die Moleküle eines jeden Körpers denke ich mir bestehend aus einem, hier als ruhend anzunehmenden (positiv elektrisirten) Kern, um den eine Anzahl (negativ geladener) Elektronen gelagert sind. Für einen aktiven Körper nehme ich an, daß bei Einwirkung einer elektrischen Kraft die (negativen) Elektronen nicht nur der Kraft entgegen verschoben werden, sondern daß sie auch gleichzeitig eine kleine Drehung ausführen [3]) um den (positiven) Kern. Die Elektronen bewegen sich also nicht in graden Linien in der Richtung der auf sie wirkenden resultirenden elektrischen Kraft, sondern sie sind gezwungen, sich auf steil gewundenen Schraubenbahnen zu bewegen. Die Axen dieser Schraubenbahnen haben alle möglichen Richtungen. Wenn wir die (stets sehr kleine) Entfernung eines Elektrons aus seiner Ruhelage s nennen, gemessen als Länge auf der Schraubenbahn, so soll das Elektron mit einer zur Entfernung s proportionalen (quasi-elastischen) Kraft zurückgetrieben werden. Außerdem wirkt auf das Elektron eine elektrische Kraft, welche gleich ist seiner Ladung e multiplicirt mit der Komponente R_s der resultirenden elektrischen Kraft, welche in

1) Wenigstens wenn man nur auf 1. Ordnung in den Aktivitätscoefficienten entwickelt.

2) Ich habe dies schon vor einem Jahre bemerkt und beim Niederschreiben der neuen Auflage von Winkelmann's Handbuch der Physik verbessert, ohne daß ich Erinnerung vom Voigt'schen Erklärungssystem hatte. Dasselbe war mir entgangen, da die betreffende Voigt'sche Arbeit wesentlich andere Zwecke verfolgt und einen Titel führt, unter dem ich nicht die betreffenden Entwicklungen vermuthet hatte. Da die Publikation in dem Winkelmann'schen Handbuche noch geraume Zeit dauern dürfte und da die Angelegenheit durch die neue Arbeit von Voigt frisch angeregt ist, sehe ich mich hier zur Darstellung veranlaßt.

3) In meinem Lehrbuche der Optik habe ich nicht die gleichzeitige Drehung mehrerer, um einen Kern gelagerter Elektronen hervorgehoben.

die Richtung der Schraubenbahn fällt, sodaß die Bewegungsgleichung des Elektrons, wenn man (zur Erklärung von Absorption) auch noch eine mit $\frac{\partial s}{\partial t}$ proportionale Reibungskraft einführt, lautet:

$$(1) \qquad m\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + a\frac{\partial s}{\partial t} + bs = eR_s.$$

Reaktionskräfte der Schraubenbahn sind in der Bewegungsgleichung für s nicht einzuführen, da s senkrecht zu diesen Reaktionskräften liegt.

Betrachten wir eine Schraube, die sich mit dem Neigungswinkel φ um die x-Axe auf einem Cylinder vom Radius r windet, und nennen wir X, Y, Z die Komponenten der elektrischen Kraft, während α der Winkel ist, den die von der Schraubenaxe zum Elektron gezogene Entfernung r mit der y-Axe bildet, so ist

$$(2) \qquad R_s = X\sin\varphi - Y\sin\alpha\cos\varphi + Z\cos\alpha\cos\varphi.$$

Für die verschiedenen Elektronen im Molecül hat α alle möglichen Werthe. Wenn wir also den durch die Elektronenbewegung in Summa bewirkten elektrischen Strom nach der x-Achse berechnen wollen, so müssen wir in (2) den für alle Werthe α stattfindenden Mittelwerth von R_s einsetzen. Nun ist schon nach der Anschauung klar, daß die Komponente Y nur dann im Mittel eine Elektronenströmung nach der x-Axe veranlassen kann, wenn sie auf beiden Seiten des Cylinders, auf dem die Schraube liegt, verschiedene Werthe besitzt. Um diesen Gedanken analytisch zu verwerthen, setzen wir nach dem Maclaurin'schen Satze:

$$(3) \qquad \begin{aligned} Y &= Y_0 + r\cos\alpha\frac{\partial Y}{\partial y} + r\sin\alpha\frac{\partial Y}{\partial z}, \\ Z &= Z_0 + r\cos\alpha\frac{\partial Z}{\partial y} + r\sin\alpha\frac{\partial Z}{\partial z}. \end{aligned}$$

Dabei bedeutet der Index 0, daß der Werth von Y und Z am Orte der Schraubenaxe zu nehmen ist.

Setzt man (3) in (2) ein, und berücksichtigt, daß die Mittelwerthe $\overline{\sin\alpha\,.\cos\alpha} = 0$, $\overline{\sin^2\alpha} = \overline{\cos^2\alpha} = \frac{1}{2}$ sind, so folgt

$$(4) \qquad R_s = \sin\varphi\left(X - {}^{1)}\,\tfrac{1}{2}r\operatorname{cotg}\varphi\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right)\right).$$

Nehmen wir zunächst an, daß die Axen der Schraubenbahnen alle parallel der x-Axe gerichtet seien. Ist dann N die Zahl der

1) Ob hier + oder — steht, hängt vom Windungssinn der Schrauben ab.

Elektronen in cm³, so ist die nach der x-Axe fließende Stromdichte durch die Elektronen-Bewegung:

$$J'_x = \sum e N \frac{\partial s_x}{\partial t},$$

wobei dann noch die $\sum$ über die verschiedenen Elektronen-Gattungen zu erstrecken ist, und $s_x = s . \sin \varphi$ ist. Die Gesammt-Stromdichte J_x ist J'_x vermehrt um den Verschiebungsstrom im Aether, d. h.

$$(5) \qquad J_x = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial X}{\partial t} + \sum e N \frac{\partial s_x}{\partial t}.$$

Eine Strömung nach der y- und z-Axe ergeben diese nach der x-Axe gerichteten Schraubenbahnen im Mittel nicht.

Wenn sich die Elektronen nach der x-Axe bewegen, so circuliren sie zugleich um diese Richtung als Axe. Wenn nun T die Umlaufsdauer des Elektrons e um diese Axe bedeutet, so ist die Stromstärke in der Kreisprojektien der Schraubenlinie $i = e : T$ In der Zeit T macht nun das Elektron den Weg $2\pi r \operatorname{tg} \varphi$ in der Richtung der Schraubenaxe, es ist also die Geschwindigkeit in der x-Richtung:

$$\frac{\partial s_x}{\partial t} = 2\pi r \operatorname{tg} \varphi : T, \text{ d. h. } 1/T = \frac{\partial s_x}{\partial t} \operatorname{cotg} \varphi : 2\pi r.$$

Daher ist die Stromstärke i

$$i = e \operatorname{cotg} \varphi \frac{\partial s_x}{\partial t} : 2\pi r.$$

Nun liegen in der x-Richtung $\sqrt[3]{N}$ solcher Ströme pro Längeneinheit. Diese stellen ein Solenoid dar. Die magnetische Kraftlinienzahl in diesem Solenoid, welches den Querschnitt $q = r^2 \pi$ hat, ist:

$$4\pi \frac{i}{c} q \sqrt[3]{N} = 2\pi r \frac{e}{c} \operatorname{cotg} \varphi \frac{\partial s_x}{\partial t} \sqrt[3]{N}.$$

Da nun $N^{2/3}$ solcher Solenoide pro Flächeneinheit vorhanden sind, so entsteht durch die Elektronenbewegung die Kraftlinienzahl

$$\frac{2\pi}{c} \sum r \operatorname{cotg} \varphi e N \frac{\partial s_x}{\partial t}.$$

Die gesammte magnetische Kraftliniendichte ist daher

$$(6) \qquad \mathfrak{A} = A + \frac{2\pi}{c} \sum r \operatorname{cotg} \varphi e N \frac{\partial s_x}{\partial t},$$

wobei A die x-Komponente der magnetischen Kraft bedeutet (ihre y- und z-Komponenten seien B und C).

Wenn wir nun einen isotropen Körper haben, so gilt jede der aufgestellten Gleichungen mit cyklischer Vertauschung der Buchstaben X, Y, Z, bezw. der Indices x, y, z, N bedeutet dann aber nur den dritten Theil der im cm^3 vorhandenen Elektronen einer Gattung, für die m, a, b, e, r, φ denselben Werth hat.

Nach den Grundgleichungen der Maxwell'schen Theorie ist ferner:

$$(7)\qquad \begin{aligned} 4\pi J_x &= c\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) \text{ etc.,} \\ \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} &= c\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) \text{ etc.,} \end{aligned}$$

(c = Lichtgeschwindigkeit im Vakuum).

Da (7) auch im inhomogenen Medium (Uebergangsschicht) gültig ist, sind die Grenzbedingungen: Stetigkeit der der Grenze parallelen Komponenten der elektrischen und magnetischen Kraft beim Uebergang über die Grenze.

Dieses Erklärungssystem genügt dem Energieprincip streng. Denn nach ihm ist erforderlich, daß, wenn man die Formeln (7) mit den Faktoren X, Y, Z, bzw. A, B, C zusammenfaßt, dann die linke Seite, nämlich

$$4\pi(J_x . X + J_y . Y + J_z . Z) + A\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + B\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + C\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial t}$$

abgesehen von einem stets positiven Gliede (Absorptionsverlust) ein Differentialquotient nach t ist. In der That ist nach (5) u. (6):

$$(8)\; 4\pi J_x . X + A\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = X\frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi \sum eN\frac{\partial s_x}{\partial t} X + A\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{2\pi}{c}\sum r \operatorname{cotg}\varphi e N\frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} A.$$

Nun ist nach (1) und (4) und (7):

$$(9)\qquad m . \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} + a . \frac{\partial s_x}{\partial t} + b \cdot s_x = e\sin^2\varphi\left(X - \frac{1}{2}\,\frac{r\operatorname{cotg}\varphi}{c}\,\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}\right),$$

d. h. nach (6):

$$X = \frac{1}{e\sin^2\varphi}\left(m\frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} + a\frac{\partial s_x}{\partial t} + b s_x\right) + \frac{1}{2}\,\frac{r\operatorname{cotg}\varphi}{c}\,\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\pi}{c^2} r\operatorname{cotg}\varphi \sum r\operatorname{cotg}\varphi e N\frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2}.$$

Daher ergiebt die rechte Seite von (8):

$$(10)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(X^2 + A^2) + 2\pi\frac{\partial}{\partial t}\sum\left(\frac{mN}{\sin^2\varphi}\left(\frac{\partial s_x}{\partial t}\right)^2 + \frac{bN}{\sin^2\varphi}s_x^2\right) + 4\pi\sum\frac{aN}{\sin^2\varphi}\left(\frac{\partial s_x}{\partial t}\right)^2 \\ &+ \frac{2\pi}{c}\frac{\partial}{\partial t}\sum eNr\operatorname{cotg}\varphi A\frac{\partial s_x}{\partial t} - \frac{4\pi^2}{c^2}\sum eNr\operatorname{cotg}\varphi\frac{\partial s_x}{\partial t}\sum eNr\operatorname{cotg}\varphi\frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Das letzte Glied ist nun auch ein Differentialquotient nach der Zeit. Setzt man nämlich zur Abkürzung $eNr\cot g\varphi = p_n$, wobei n die Indices 1, 2, 3 der vorhandenen Elektronen-Gattungen durchläuft, und analog $s_x = s_n$, $n = 1, 2, 3 \ldots$, so ist das letzte Glied in (10):

$$-\frac{4\pi}{c^2}\left(p_1\frac{\partial s_1}{\partial t}+p_2\frac{\partial s_2}{\partial t}+p_3\frac{\partial s_3}{\partial t}+\cdots\right)\left(p_1\frac{\partial^2 s_1}{\partial t^2}+p_2\frac{\partial^2 s_2}{\partial t^2}+p_3\frac{\partial^2 s_3}{\partial t^2}+\cdots\right)=$$

$$(11)\qquad -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}p_1\left(\frac{\partial s_1}{\partial t}\right)^2+\tfrac{1}{2}p_2\left(\frac{\partial s_2}{\partial t}\right)^2+\tfrac{1}{2}p_3\left(\frac{\partial s_3}{\partial t}\right)^2+\cdots\right.$$

$$\left.+p_1p_2\frac{\partial s_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial s_2}{\partial t}+p_1p_3\frac{\partial s_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial s_3}{\partial t}+p_2p_3\frac{\partial s_2}{\partial t}\cdot\frac{\partial s_3}{\partial t}+\cdots\right).$$

Das Energieprincip ist also erfüllt, abgesehen von dem in (10) auftretenden stets positivem Gliede $4\pi\sum\frac{aN}{\sin^2\varphi}\left(\frac{\partial s_x}{\partial t}\right)^2$, welches den durch Absorption bedingten Energieverlust darstellt.

Daß dies Erklärungssystem (1), (4), (5), (6), (7) mit dem Voigt'schen (bis auf Glieder 2. Ordnung in den Aktivitätsgliedern) identisch ist, erkennt man sofort, wenn man in (6) den Näherungswerth für s einführt, der sich aus (4) ergiebt, wenn man $r\cot g\varphi = 0$ setzt. Für periodische Bewegungen, bei denen $\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{i}{\tau}s$ ist, folgt nämlich aus (4), wenn man, was hier unwesentlich ist, sich nur auf durchsichtige Körper beschränkt, d. h. a fortläßt, und $\sin^2\varphi = 1$ setzt, d. h. nur auf 1te Ordnung in $\pi/2-\varphi$ entwickelt:

$$\left(b-\frac{m}{\tau^2}\right)s_x = eX-\frac{e}{2}r\cot g\varphi\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right),$$

d. h.

$$(12)\qquad \mathfrak{A} = A+\frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t}\sum 2\pi e^2N\frac{r\cot g\varphi}{b-m/\tau^2}.$$

Aus (5) folgt

$$(13)\qquad 4\pi J_x = \frac{\partial X}{\partial t}\left(1+\sum\frac{4\pi e^2N}{b-m/\tau^2}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)\sum 2\pi e^2N\frac{r\cot g\varphi}{b-m/\tau^2}.$$

Setzt man also

$$(14')\qquad \varepsilon = 1+\sum\frac{4\pi e^2N}{b-m/\tau^2},\quad f = \sum 2\pi e^2N\frac{r\cot g\varphi}{b-m/\tau^2},$$

so ergiebt (7), (12) und (13):

(14)
$$\varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + f \operatorname{rot} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathfrak{H}.$$
$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} + \frac{f}{c} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} = -c \operatorname{rot} \mathfrak{E}.$$

Dabei bedeutet rot die bekannte Abkürzung (rotor oder curl), $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ die elektrische, bezw. magnetische Kraft.

Die Gleichungen (14) lassen sich leicht auf die Formeln (14)—(17) der Voigt'schen Arbeit (Gött. Nachr. 1903, p. 161) reduciren.

Durch Elimination von $\mathfrak{H}$ aus (14) entsteht:

(15)
$$\varepsilon \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} + 2f \operatorname{rot} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} + c^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0,$$

während mein früheres Erklärungssystem, welches sich von (14) dadurch unterscheidet, daß in der 2ten Gleichung das Glied mit dem Faktor f fehlt, ergab:

(16)
$$\varepsilon \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} + f \operatorname{rot} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} + c^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0.$$

Da (16) mit (15) formel identisch ist, so ergiebt also das neue Erklärungssystem identische Resultate mit dem alten, solange die genaue Form der Grenzbedingungen irrelevant ist.

Für optisch-aktive Krystalle sind die f in (14) als von der Richtung abhängig einzuführen. Wenn ich dies bisher nicht gethan habe, so war ich mir der darin liegenden Beschränkung stets bewußt, ich wollte nur nicht complicirte Formeln aufstellen, so lange die Beobachtung nicht dazu nöthigte. Eine derartige principiell sehr wichtige Beobachtung ist nun Pocklington[1]) und neuerdings Voigt[2]) gelungen; letzterer zeigte, daß die Ellipticität einer Welle, welche senkrecht zur optischen Axe im Quarz sich fortpflanzt, nicht berechnet werden kann aus der Drehung der Polarisationsebene, welche eine parallel zur Axe sich fortpflanzende Wellen erfährt. Da im Allgemeinen die Wirkung der Aktivität nur in isotropen Körpern, oder in einaxigen Körpern für Wellen, deren Normale nahezu mit der optischen Axe zusammenfällt, deutlich zu Tage tritt, so wird die Verallgemeinerung der Formeln (14) mit Rücksicht auf die Verschie-

---

1) H. C. Pocklington, Phil. Mag. (6) 2, p. 368, 1901. Derselbe fand im Rohrzucker in Richtung der beiden optischen Axen für Na-Licht verschieden starke und sogar verschiedensinnige Circularpolarisation.

2) W. Voigt, Gött. Nachr. 1903, p. 175.

denheit der Koefficienten ε und f in verschiedenen Richtungen für die meisten bisherigen Beobachtungen unwesentlich sein. Immerhin ist es theoretisch interessant, diese Verallgemeinerung zu verfolgen und die citirten Beobachtungen zeigen, daß daran auch ein praktisches Interesse geknüpft ist, zur Deutung gewisser, allerdings schwierig beobachtbarer Fälle.

Die Theorie wird im Allgemeinen complicirt. Für einen rhombischen aktiven Krystall erhält man z. B. als Gesetz der Fortpflanzungsgeschwindigkeit V einer ebenen Welle, deren Normale die Richtungskosinus m, n, p mit den krystallographischen Axen bildet, die Formel:

$$\begin{aligned} & m^2(V^2-V_2^2)(V^2-V_3^2)+n^2(V^2-V_3^2)(V^2-V_1^2)+p^2(V^2-V_1^2)(V^2-V_2^2) = \\ (17)\quad & V_1^2 V_2^2 V_3^2(\mathfrak{d}_1 m^2+\mathfrak{d}_2 n^2+\mathfrak{d}_3 p^2)^2 + \\ & \mathfrak{d}_1^2 m^2 V_2^2 V_3^2(V^2-V_1^2)+\mathfrak{d}_2^2 n^2 V_3^2 V_1^2(V^2-V_2^2)+\mathfrak{d}_3^2 p^2 V_1^2 V_2^2(V^2-V_3^2), \end{aligned}$$

wobei V_1, V_2, V_3 die Haupt-Lichtgeschwindigkeiten (in Richtung der Krystall-Axen) sind, während bedeutet:

$$\mathfrak{d}_1 = \frac{f_2+f_3}{c^2\tau}, \quad \mathfrak{d}_2 = \frac{f_3+f_1}{c^2\tau}, \quad \mathfrak{d}_3 = \frac{f_1+f_2}{c^2\tau},$$

wobei die f_1, f_2, f_3 die 3 Aktivitätskonstanten (vgl. Formelen (14')) des Krystalls sind.

Von einem aktiven Krystall mache ich mir das Bild, daß die Schraubenaxen gesetzmäßig vertheilte Lagen haben, und daß soviel Elektronen auf jeder Schraube in gleichmäßigem Abstand liegen, daß die Bildung des Mittelwerthes in Formel (2) berechtigt bleibt. Letztere Hypothese hat nichts Befremdliches in Rücksicht auf den in neuerer Zeit mehrfach wegen der Komplicirtheit der Gasspektoren gezogenen Schluß, daß im Atom sehr viele (negativ geladene) Elektronen am (positiv geladenen) Atomkern haften. Ob thatsächlich aktive Krystalle existiren, für welche in R_z Formel (4) nicht nur der Differentialquotient $\frac{\partial Y}{\partial z}$, sondern auch Y selbst einzuführen ist, kann man von vornherein wohl nicht sagen. Beobachtet ist ein solcher Fall noch nicht.

Gießen, Dezember 1903.

Untersuchungen aus dem Universitäts-laboratorium zu Göttingen. XIII.

Von

O. Wallach.

Vorgelegt in der Sitzung am 23. Januar 1904.

I. Ueber einen neuen Fall optischer Isomerie.

Von einer Verbindung, welche nur *ein* asymmetrisches Kohlenstoffatom enthält, pflegt man das Auftreten von nur drei optisch differenten Modificationen zu erwarten: einer *rechts* drehenden, einer gleich stark *links* drehenden und einer racemisch *inactiven*. Diese Verhältnisse treffen für das 1.3 Cyklo-Methylhexanon und sein Oxim zu. Das durch hydrolytische Spaltung aus Pulegon erhältliche Methylhexanon ist die *rechts*drehende Modification, $[\alpha]_D = +13^\circ$, des Ketons. Das zugehörige *Oxim*

$$\begin{array}{ccc} & CH_3 & \\ & | & \\ & {}^*CH & \\ \diagup & & \diagdown \\ CH_2 & & CH_2 \\ | & & | \\ CH_2 & & C:NOH \\ \diagdown & & \diagup \\ & CH_2 & \end{array}$$

die *links*drehende des Oxims, $[\alpha]_D = -43^\circ$.

Wenn man nun das Oxim benzoylirt, so wird an der Kohlenstoff-Asymmetrie nichts geändert. Nichtsdestoweniger erhält man bei der Einführung von Benzoyl in das Oxim-Radical *zwei optisch verschiedene* Benzoylverbindungen, die sich durch

Krystallisation trennen lassen und im Folgenden als α- und β-Verbindung unterschieden werden sollen.

Das α-Benzoyl-Cyklohexanonoxim krystallisirt in sehr großen, scharf begrenzten Krystallen, welche nach Messungen, welche Herr Dr. E. Böcker im hiesigen Mineralogischen Institut auszuführen die Güte hatte, monoklin hemimorph sind und Pyroelectricität zeigen. Sie schmelzen bei 96—97° und das Drehungsvermögen wurde in etwa 12 °/₀ ger ätherischer Lösung zu $[\alpha]_D = +19,97^0$ ermittelt.

Das β-Benzoyl-Cyklohexanonoxim krystallisirt dagegen in langen, bei 82—83° schmelzenden Nadeln, welche dem rhombischen System angehören und ist linksdrehend, in 12,8 °/₀ ger ätherischer Lösung $[\alpha]_D = -86,08^0$. Beide Benzoylverbindungen gehen beim Kochen mit Alkali wieder in dasselbe Linksoxim von den erst angegebenen Eigenschaften zurück, und es ist bisher nicht gelungen, das freie active Oxim in zwei Modificationen zu erhalten.

Nun ist eine Structurverschiedenheit der beiden Benzoylverbindungen auf Grund ihres ganz analogen Verhaltens ausgeschlossen. Eine zweite Erklärung, welche man für die vorliegende Erscheinung zu geben versuchen könnte, ist die, daß die benzoylirten Oxime einen ganz anderen molekularen Bau besitzen, als man ihnen nach der bisherigen Auffassung solcher Bezoylderivate zuschreiben muß. Man könnte nämlich annehmen, daß sie nicht am Stickstoff, sondern am Kohlenstoff die Benzoylgruppe tragen, daß ihnen also nicht Formel I, sondern Formel II zukommt:

```
       CH3                             CH3
        |                               |
       *CH                             *CH
       / \                             / \
    CH2   CH2                       CH2   CH2
     |     |                         |     |     COC6H5
    CH2   C:NOCOC6H5                CH2   *C<
       \ /                             \ /       NO
       CH2                             CH2
        I.                              II.
```

In diesem Fall würde, wie man leicht sieht, durch die Benzoylirung ein zweites asymmetrisches Kohlenstoffatom im Molekül geschaffen sein und dann hätten die beobachteten Erscheinungen nichts auffallendes. Sie wären vielmehr dann in vollständige Parallele zu setzen mit der Bildung zweier optisch differenter

Menthylamine aus demselben Linksmenthon, deren Entstehung ich schon vor längerer Zeit (Ann. d. Chem. **276**, 296) nachgewiesen und interpretirt habe. Der letzteren Annahme stehen aber auch gewichtige Bedenken gegenüber. In Verbindungen der Formel II müßte sich nämlich die Gegenwart einer Nitrosogruppe, NO, durch die bekannten Reactionen nachweisen lassen, was nicht zutrifft.

So bleibt als letzte Möglichkeit übrig, daß man es in den beiden α- und β-Benzoylverbindungen mit Syn- und Anti-Modificationen zu thun hat, die auf Grund der Theorie von Werner und Hantzsch dann möglich sind, wenn die Valenzrichtungen des Stickstoffes nicht in einer Ebene liegen.

Als sehr beachtenswerthe Folgerung ist aus der bisher ohne Beispiel dastehenden Thatsache dann aber die zu ziehen, daß solche durch die Valenzrichtungen des Stickstoffs bedingte Isomere im optischen Verhalten ebenso große Verschiedenheiten aufweisen können, wie Structur- oder Stellungsisomere Verbindungen.

Man wird also künftig darauf zu achten haben, daß analoge stickstoffhaltige Verbindungen, auch wenn sie nur ein asymmetrisches Kohlenstoffatom enthalten, in mehr als drei optisch verschiedenen Modificationen aufzutreten vermögen.

Wenn die Annahme richtig war, daß die Entstehung der beiden activen Benzoylverbindungen aus dem einheitlichen activen Methylhexanonoxim auf das Auftreten von Syn- und Anti-Modificationen des Oxims zurückzuführen sei, so war zu erwarten, daß man aus der inactiven Modification des Oxims auch zwei Benzoylverbindungen würde ableiten können. Das hat sich nun bestätigt. Man kann zu der inactiven Modification des 1:3 Methylcyklohexanons nach der synthetischen Methode gelangen, welche von Knövenagel eingeschlagen worden ist (Ann. d. Chem. **297**, 157). Bei der Behandlung des inactiven Ketons mit Hydroxylamin erhält man ein Oxim, das zunächst nicht zum Erstarren zu bringen ist. Benzoylirt man die Verbindung, so erhält man ein nicht einheitlich schmelzendes Product, das sich beim Krystallisiren aus geeigneten Lösungsmitteln auch in zwei Modificationen zerlegen läßt. Die schwerer lösliche α-Modification läßt sich leicht in großen Krystallen vom Schmelzpunkt 106° erhalten, die viel löslichere β-Benzoylverbindung schmilzt gegen 70° und krystallisirt in ganz anders geformten Krystallen, läßt sich aber schwer rein erhalten.

Es liegen demnach hier ganz dieselben Verhältnisse vor wie bei der activen Verbindung, wodurch die erst gegebene Erklärung eine Stütze erfährt. Bei der Zerlegung der inactiven α-Benzoylverbindung gelangt man wiederum zu einem Oxim, das bei längerem Stehen erstarrt und bei 18—24° schmilzt.

II. Ueber die Spaltung des Campherphorons.

Das Pulegon läßt sich, wie ich vor längerer Zeit gezeigt habe, hydrolytisch zu Aceton und Methylcyklohexanon aufspalten. Nach neueren Untersuchungen muß es als sehr wahrscheinlich gelten, daß das sog. Campherphoron dem Pulegon ganz analog gebaut ist, nur liegt ersterem ein Pentacyclisches System zu Grunde, während das Pulegon eine hexacyclische Verbindung ist, wie folgende Formeln es verdeutlichen:

```
      CH3
      |
      CH                         CH3
     /  \                         |
  CH2    CH2               CH2—CH
   |      |                 |     |
  CH2    CO                CH2   CO
     \  /                    \  /
      C                        C
      ..                       ..
      C(CH3)2                  C(CH3)2
   Pulegon.                Campherphoron.
```

Das Campherphoron sollte dementsprechend sich hydrolytisch zu Aceton und Methylcyklopentanon aufspalten lassen.

Nach dieser Richtung von anderen Chemikern angestellte Versuche waren bisher aber ohne Erfolg geblieben: das Campherphoron ist gegen Wasser und Säuren bei höherer Temperatur viel beständiger als das Pulegon. Versuche, die ich gemeinsam mit Herrn Dr. Collmann ausgeführt habe, haben nun aber gezeigt, daß man das Campherphoron unter richtigen Bedingungen doch in dem erwarteten Sinne aufspalten kann, nur muß man sich zwecks der Hydrolyse nicht sauerer, sondern alkalischer Agentien bedienen. Wässriges Kali spaltet bei höherer Temperatur Campherphoron in Aceton und 1.2 Methylpentanon. Am bequemsten läßt sich die Spaltung des Phorons bei der Darstellung der Verbindung durch Destillation des camphersauren Kalks bewerkstelligen. Bei der Destillation gut getrockneten camphersauren

Kalks entstehen etwa 44 % Campherphoron. Trocknet man das Kalksalz vor der Destillation aber nicht, mischt es vielmehr mit dem gleichen Volum Natronkalk, so sinkt die Ausbeute an Campherphoron auf etwa 13 %. Dagegen treten reichliche Mengen Methylpentanon auf und zwar etwa 5 % vom Gewicht der angewandten Camphersäure. Bezüglich des Campherphorons wurden noch folgende Beobachtungen gemacht.

Das reine Campherphoron siedet bei 199—201° und zeigt $d = 0.93$, $n_D = 1.4807$ bei 20°.

	Berechnet für		Gefunden
	$C_9H_{16}OF$	$C_9H_{15}(OH)F_2$	
M	41.22	42.16	42.21.

Wie sich in Folge seiner Configuration erwarten ließ, zeigt die Verbindung also das optische Verhalten eines Alkohols mit zwei Aethylenbindungen und fügt sich der Gesetzmäßigkeit, welche bei Verbindungen, welche die Gruppe — C : C — CO — enthalten, nunmehr in so zahlreichen Fällen festgestellt worden ist. [Nachr. d. G. d. W. 1895, 306 Annal. **297** 114. 136. 187; **305**, 273; **324**, 105.].

Das Campherphoron bildet in Berührung mit überschüssiger essigsaurer Semicarbazidlösung zunächst ein niedrig (um 135°) schmelzendes Additionsproduct, welches zwei Moleküle Semicarbazid enthält.

Aus diesem läßt sich ein normales Semicarbazon vom Schmelzpunkt 197° herstellen. Auch gelang es das normale, bisher nicht bekannte, Oxim des Campherphorons zu bereiten.

Das Campherphoron steht zum Pulegenon in derselben Beziehung, wie das Pulegon zum Menthenon, nur hat man es in dem einen Fall mit Fünfring- in dem anderen mit Sechsring-Systemen zu thun, wie aus den folgenden Formeln hervorgeht:

```
      CH3                      CH3
       |                        |
       CH                       CH
      /  \                     /  \
   CH2    CO                CH2    CO
    |      |                 |      |
   CH2 ——— C : C(CH3)2       CH ═══ C . CH(CH3)2
```

Campherphoron. Pulegenon.

```
        CH3                    CH3
        |                      |
        CH                     CH
       /  \                   /  \
    CH2    CH2             CH2    CH2
    |      |               |      |
    CH2    CO              CH     CO
       \  /                  \\  /
        C : C(CH3)2           C . CH(CH3)2
   Pulegon.               Menthenon.
```

Ein Vergleich der physicalischen Eigenschaften dieser Verbindungen ergiebt nun Folgendes:

	Campherphoron	Pulegenon	Pulegon	Menthenon
Siedepunkt	199—201°	189—190°	221—222°	206°—208°
d	0.93	0.914	0.936	0.919
n_D	1.4807	1.4645	1.4846	1.4733.

Man erkennt daraus, daß bei beiden Ringsystemen die Verschiebung der semicyclischen Bindung in den Kern eine Erniedrigung des Siedepunkts, der Dichte und des Brechungsvermögens zur Folge hat. Daß die pentacyclischen Verbindungen bei analogem Bau niedriger sieden als die isomeren hexacyclischen kann man aus anderen Beobachtungen ableiten, die hier nicht aufgeführt werden sollen.

III. Ueber 1.2. Methylcyklopentanon.

Das aus dem Campherphoron erhältliche 1.2 Methylpentanon ist bereits von Montemartini und von Bouveault aus α-Methyladipinsäure synthetisch gewonnen, bisher aber noch wenig characterisirt worden. Das reine Keton siedet bei 140°—141°, riecht ebenso wie reines Pentanon und zeigt folgende physikalische Konstanten:

$d = 0.917$, $n_D = 1.4348$ bei 20°.

Berechnet für $C_6H_{10}O$		Gefunden
M =	27.80	27.88.

Die Verbindung ist in Wasser sehr reichlich löslich. Die Lösung bildet mit essigsauren Semicarbazidlösungen sehr schnell ein Semicarbazon, $C_6H_{10}N . NH CO NH_2$, das nach dem Umkrystallisiren aus der fünffachen Menge Aethylalcohol bei 174—176° schmilzt.

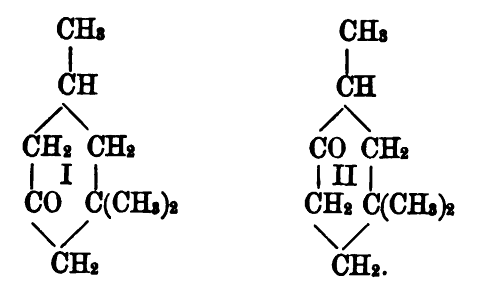
Das Oxim konnte nicht in krystallisirtem Zustand erhalten werden.

Sehr characteristisch ist das Verhalten des 1.2 Methylpentanons bei der Oxydation. Es geht dabei — wenn man auf 1 Mol. Keton 2 Atome Sauerstoff in Reaction treten läßt — glatt in γ-Acetylbuttersäure, $CH_3 CO CH_2 CH_2 CH_2 CO_2 H$, über, sei es daß man in sauerer Lösung mit Chromsäure oder in neutraler mit Permanganat oxydirt. In letzterem Fall erhält man das gut krystallisirende Kaliumsalz der Säure. Die Reaction vollzieht sich also nach der Gleichung

$$\begin{matrix} CH_2-CH(CH_3) \\ | \\ CH_2 \quad CH_2 \end{matrix} > CO + O_2 = \begin{matrix} CH_2 CO CH_3 \\ | \\ CH_2 CH_2 COOH. \end{matrix}$$

IV. Zur Kenntniss der Isoxime.

Vor einiger Zeit (Ann. d. Chem. 324, 112) habe ich die gegenseitigen Beziehungen von zwei isomeren Trimethyl-cyklohexanonen erörtert, nämlich des Methyl(1)-dimethyl(3)-cyklohexanon(5) [= Bihydroisophoron, Formel I] und des Methyl(1)-dimethyl (3)-cyklohexanon(6) [aus Geraniolen dargestellt, Formel II].



Beide Ketone bilden leicht Oxime. Das von I schmilzt bei 84—85° (und nicht, wie Knövenagel, Ann. d. Chem. 297, 199, — vielleicht in Folge eines Druckfehlers — angiebt, bei 58°) und das von II bei 108—109°.

Wenn man diese Oxime isomerisirt, so lassen sich, wie aus den folgenden Formelbildern ersichtlich ist, aus jedem zwei

isomere **Isoxime** erwarten, welche heterocyclische Siebenringe vorstellen:

CH_3
CH
CH_2 CH_2
I
HON:C $C(CH_3)_2$
CH_2

CH_3
CH
HON:C CH_2
II
CH_2 $C(CH_3)_2$
CH_2

CH_3
CH
CH_2 CH_2
NH
CO $C(CH_3)_2$
CH_2
Ia

CH_3
CH
CH_2 CH_2
CO $C(CH_3)_2$
NH—CH_2
Ib

CH_3
NH—CH
CO CH_2
CH_2 $C(CH_3)_2$
CH_2
IIa

CH_3
CH
CO CH_2
NH
CH_2 $C(CH_3)_2$
CH_2
IIb.

Alle vier Verbindungen haben sich isoliren lassen. Die je zwei Paare unterscheiden sich durch Schmelzpunkt und Löslichkeit. Die höher schmelzende und gleichzeitig schwerer lösliche Modification soll als α-, die andere als β-Modification bezeichnet werden, ähnlich wie es für die isomeren Modificationen der beiden Isoxime aus 1.3 Methylhexanon geschehen ist (siehe Ann. d. Ch. **309**, 2 und **312**, 191).

Die Umlagerung des bei 84° schmelzenden **Bihydroisophoronoxims** wurde in der Weise bewirkt, daß je 5 Gr des Oxims mit 10 ccm Schwefelsäure und 5 ccm Wasser vorsichtig bis zum Eintreten der Reaction erwärmt wurden. Das in Eiswasser gegossene mit Alkali neutralisirte Reactionsproduct wurde dann mit Chloroform extrahirt. Das so erhaltene rohe Isoxim schmolz zwischen 80—85° und konnte durch Umkrystallisiren in zwei Bestandtheile zerlegt werden.

Zu dem Zweck wurden 3 Gr. Isoxim in 9 ccm Wasser unter Zusatz von 2 ccm Methylalkohol gelöst. Die schwer löslichsten Antheile (α-Verbindung) wurden in säulenförmig ausgebildeten, bei 108—109° schmelzenden Krystallen erhalten. Durch weitere

Krystallisation aus wasserfreien Lösungsmitteln (Aether + Petroläther) ließ sich der Schmelzpunkt auf 111—112° erhöhen.

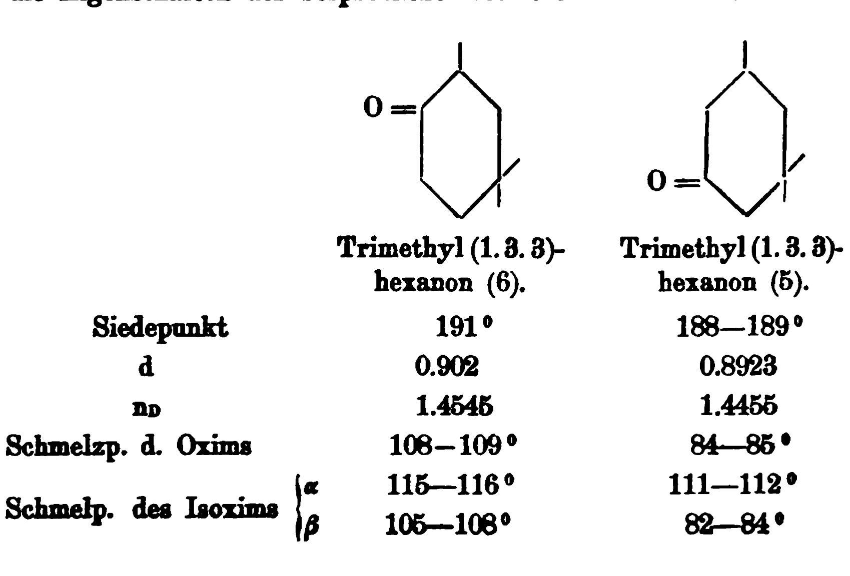
Die leicht löslichen Antheile (β-Verbindung) schmolzen nach dem Umkrystallisiren aus Ligroïn unter Zusatz von wenig Aether bei 82—84°. Man kann diese Modification auch so von der höher schmelzenden trennen, daß man das Rohproduct mit 2 Th. kaltem Ligroïn digerirt.

Characteristisch für das rohe Isoxim ist, daß es in heißem Wasser schwerer löslich ist als in kaltem. Eine kalt gesättigte klare Lösung zeigt beim Erwärmen starke Trübung.

Das bei 108—109° schmelzende Oxim des isomeren Trimethylhexanons ist früher schon isomerisirt worden (Ann. d. Chem. **324**, 107). Damals ist aber nur das bei 115—116° schmelzende α-Isoxim isolirt worden. Es hat sich nun nachweisen lassen, daß auch hier gleichzeitig eine leichter lösliche, bei 106—108° schmelzende β-Verbindung entsteht.

Die ähnlich schmelzenden Isoxime aus den beiden isomeren Ketonen ähneln sich zum Verwechseln. Daß sie nicht identisch sind, geht daraus hervor, daß Gemische der ähnlich schmelzenden Verbindungen starke Schmelzpunktsdepression aufweisen.

Die folgende Tabelle giebt eine vergleichende Uebersicht über die Eigenschaften der besprochenen isomeren Substanzen.



		Trimethyl (1.3.3)-hexanon (6).	Trimethyl (1.3.3)-hexanon (5).
Siedepunkt		191°	188—189°
d		0.902	0.8923
n_D		1.4545	1.4455
Schmelzp. d. Oxims		108—109°	84—85°
Schmelp. des Isoxims	α	115—116°	111—112°
	β	105—108°	82—84°

Ueber das Verhalten einiger anorganischer Colloide zur Faser in seinen Beziehungen zur Theorie des Färbevorganges.

Von

Wilhelm Biltz.

[Mitteilung aus dem chem. Institut der Universität Göttingen.]

Vorgelegt in der Sitzung vom 23. Januar 1904 durch O. Wallach.

Bei einer Diskussion der verschiedenen, über die Natur des Färbevorganges herrschenden Anschauungen äußerte Witt[1]) in Beziehung auf die sogenannte mechanische Theorie der Färbung, daß dem Vorgange einer Nebeneinanderlagerung der Farbstoff- und Fasermoleküle ohne gegenseitige chemische Beeinflussung kein Analogon zur Seite stünde, durch welches ein derartiger „Platzwechsel" der Farbstoffmoleküle plausibel gemacht werde. Ebensowenig sei ein Grund für das unterschiedliche Verhalten der Farbstoffe in dieser Hinsicht aufzufinden. Da ältere Deutungen des Färbevorganges nicht einwandsfrei erscheinen, soll vielmehr nach der bekannten Anschauung von Witt der Proceß der Färbung dadurch dem Verständniß näher gerückt werden, daß man ihn als Entstehung von festen Lösungen nach der van' tHoff'schen Definition dieses Begriffes ansieht. Eine experimentelle Prüfung dieser Anschauung verdanken wir neben anderen Autoren insbesondere Georgievics[2]). Es hat sich dabei ergeben, das eine Beziehung $\frac{C_{Faser}}{C_{Flotte}} = k$, in welcher C_{Faser} die Concentration des Farbstoffs in der Faser, C_{Flotte} die in der Lösung nach eingetretenem Gleich-

1) Färberzeitung 1890/91, 1.

2) Vgl. Wiener Akad. Ber. 103, II Nov. (1894). Ebenda 104, II April (1895).

gewichte bedeutet, in den untersuchten Fällen nicht besteht; daß vielmehr der Vorgang exact durch die Gleichung $\frac{C^n_{\text{Faser}}}{C_{\text{Flotte}}} = k$, worin n größer als 1 ist, dargestellt werden kann. Molekulartheoretisch ergiebt sich hieraus, daß die Farbstoffmoleküle in der Flotte größer, als in der Faser sein müssen, eine im allgemeinen nicht wahrscheinliche, in besonderen Fällen (Pikrinsäure)[1]) mit dem thatsächlichen Befund nicht in Uebereinstimmung zu bringende Folgerung[2]).

Unter diesen Umständen schien es erwünscht, durch weitere Versuche zu ermitteln, ob der Vorgang der Färbung nicht mit anderen Naturerscheinungen besser bestätigte Analogieen aufzuweisen hat, und insbesondere die von Witt in Ermanglung derartiger Beziehungen nicht acceptierte mechanische Theorie einer weiteren Prüfung zu unterziehen. Die Möglichkeit einer solchen Prüfung ergab sich, als auf dem Gebiete der anorganischen Colloide Erscheinungen beobachtet wurden, deren Zusammenhang mit der vorliegenden Frage sehr augenfällig ist, da sie eine gewisse Aehnlichkeit im Verhalten dieser Körperklasse mit einer Anzahl organischer Farbstoffe erkennen ließen. Die weitere Verfolgung der Erscheinungen und die dabei zu Tage tretenden Gesichtspunkte regten zu Untersuchungen in etwas größerem Umfange an. Da der Abschluß dieser Arbeiten in kürzerer Zeit noch nicht zu erwarten steht, dürfte eine Mitteilung über die vorläufigen Resultate einigen Fachgenossen schon um deßwillen nicht unwillkommen sein, weil zur Zeit sowohl der Chemie der Colloide, wie der Frage nach der Natur des Färbevorganges von verschiedenen Seiten lebhafteres Interesse entgegengebracht wird.

Colloidale- oder Pseudolösungen werden als Gemische von äußerst kleinen festen oder gequollenen Teilchen mit einer als Lösungsmittel fungierenden Flüssigkeit (meistens Wasser) angesehen. Es ist bereits früher in einigen Fällen beobachtet und neuerdings durch eingehendere Prüfung[3]) bestätigt worden, daß gewisse dieser Pseudolösungen durch gegenseitiges Vermischen eine derartige Veränderung erleiden, daß die Teilchen der Einzellösungen sedimentirt und als Gemisch flockig abgeschieden werden. Man kann auf diese Weise eine große Reihe von Niederschlägen (Gelen) be-

1) Walker u. Appleyard: J. chem. soc. 69. 1334 (1896).

2) Vgl. hierzu Bodländer, Neues Jahrbuch für Mineralogie; Beilageband XII, 588 (1899).

3) Wilhelm Biltz, Vers. deutscher Naturf. u. Aerzte 1903.

reiten, welche aus den vorher in Pseudolösung befindlichen Componenten zusammengesetzt sind, und deren Bildung an die Ausfällung eines unlöslichen Salzes durch Mischen zweier Lösungen äußerlich in mancher Hinsicht erinnert. Wie schon von anderen Autoren, insbesondere von Lottermoser[1]) beobachtet worden ist, besteht ein inniger Zusammenhang zwischen der gegenseitigen Fällbarkeit und dem elektrischen Verhalten der Colloide. Zur gegenseitigen Ausfällung scheinen nur diejenigen Colloidteilchen befähigt zu sein, deren Wanderungsrichtung unter dem Einflusse des elektrischen Stromes entgegengesetzt ist. Man kann die Beziehungen dieser Colloide passend in ihrem Namen als „Fällungscolloide" kennzeichnen; im Gegensatze hierzu stehen die gegen Fällung durch Elektrolyte schützenden Eigenschaften mancher Colloide, die insbesonders durch Zsigmondy[2]) aufgedeckt worden sind. Man würde diese entsprechend „Schutzcolloide" nennen. Um die Fähigkeit der Colloidteilchen zu dem geschilderten Verhalten kurz zu charakterisieren, habe ich unlängst den Ausdruck „Zustandsaffinität" vorgeschlagen. Die Reaktionsprodukte, die gemischten Colloide, sind in die Klasse der Adsorptionsverbindungen zu rechnen.

Die nächstliegende Frage war die: Wie verhält sich ein in Lösung vorhandenes Colloid gegen ein zweites, bereits im Gelzustande befindliches? Es ist bekannt, daß Körper mit großer Oberflächenentwicklung ganz allgemein das Phänomen der Adsorption zeigen. So werden z. B. gelöste Colloide (Arsensulfid) durch Schütteln mit Baryumsulfat aus der Lösung entfernt[3]). Ausgeschiedene Gele, z. B. das Gel des basischen Lanthanacetats, besitzen in hohem Maße die Fähigkeit, Jod zu adsorbieren. Die Erwartung, daß demnach Gele in reichlicher Menge gelöste Colloide unter Bildung von Adsorptionsverbindungen in sich aufnehmen, hat sich in den untersuchten Fällen in der That bestätigt. Eine Abhängigkeit der Aufnahmefähigkeit der Gele für gelöste Colloide von dem elektrischen Charakter der beiderseits in Lösung befindlichen Colloidarten ist bisher nicht konstatiert worden.

In einem Einzelfalle — für Lösungen colloidalen Goldes — ist die weitgehende Bedeutung dieser Erscheinungen schon von Zsigmondy[4]) scharf erkannt worden; insbesondere war eine

1) Lottermoser, anorganische Colloide, Ahrens'sche Sammlung 1901; S. 76.

2) Z. f. analyt. Chem. 40, 697 (1901).

3) Ber. 35, 662 (1902). Z. f. anorg. Chem. 34, 410 (1903).

4) Verh. deutscher Naturf. u. Aerzte 1900.

Cassius'schem Goldpurpur durch Peptisierung des feuchten Purpurs mit Ammoniak her, so kann man ihn mit Hilfe dieser dunkelvioletten Flüssigkeit auf Seide übertragen. Ebenso gelingt es mit Hilfe eiweißhaltiger Goldlösungen nach Paal[1]) Ausfärbungen zu erzeugen. Diese Versuche könnte man gewissermaßen als Analoga der adjektiven Färbungen auffassen; sie erfordern ihrer komplicierteren Natur nach zunächst nur in zweiter Linie Interesse.

4. Vanadinpentoxyd. Uebergießt man Ammoniumvanadat des Handels mit verdünnter Salzsäure und verreibt die gröberen Stücke mit einem Pistill, so scheidet sich Vanadinpentoxyd als rotbraunes Pulver ab. Beim Auswaschen des abfiltrierten Pulvers mit kaltem Wasser tritt ein Punkt ein, bei welchem das Waschwasser beginnt, gefärbt durchzulaufen. Man bringt dann den Filterinhalt in reines Wasser, worin er sich vollständig löst. Die klare, kräftig rotgelb gefärbte Flüssigkeit läßt sich ohne nennenswerte Zersetzung filtrieren. Bei längerem Stehen erstarrt eine koncentrierte Lösung dieser Art häufig zu einer Gallerte. Die frisch bereitete Lösung färbt in der Kälte Seide gelb; indessen bleibt ein beträchtlicher Teil des Pentoxydes in Lösung. Durch Behandeln von Seide, Wolle oder Baumwolle mit der kochenden Lösung verändert sich die Färbung in moosgrün und färbt entsprechend an.

Für die Bereitung von colloidalen Vanadinpentoxydlösungen sind auch ältere Vorschriften bekannt[2]); indessen ist es mir trotz mehrfacher Versuche nicht gelungen, diese zu bestätigen. Der angegebene, äußerst einfache Weg dürfte daher unter allen Umständen vorzuziehen sein.

5. Molybdänblau. Es ist bereits lange[3]) bekannt, daß man mit Hilfe von Molybdänblau die Faser färben kann, wenn der Farbstoff in dieser selbst hergestellt, oder mit Beizen befestigt wird. In der Litteratur finden sich eine ganze Reihe von Angaben, die auf die Darstellung einer brauchbaren Farbennüance abzielen. Andererseits liegen bündige Beweise für die colloidale Natur der blauen Lösung vor[4]). Ausfärbeversuche mit der reinen Lösung selbst sind, wie es scheint, indessen in systematischer Weise noch nicht angestellt worden. Zur bequemen und billigen

1) Ber. 35, 2236 (1902).
2) Dammer, III, 706.
3) Berzelius, Lehrbuch V. Aufl. Bd. II, 355 (1844). Dingler polyt. J. 129, 139 (1853); 201, 82 (1871); 202, 192 (1872).
4) Guichard, C. R. 131, 389, 419 (1900).

cellulose, welche an sich ebenso wie Baumwolle zur Farbstoffaufnahme geeignet ist, verliert diese Fähigkeit, wenn man sie durch Verdunsten ihrer Lösung in Aceton strukturlos, als lackartige Haut darstellt.

Die unter diesen Umständen naheliegende Erwartung, daß anorganische Colloide von der Faser aufgenommen werden, hat sich experimentell in den geprüften Fällen bestätigt; ein gefärbtes Colloid wird mit seiner Eigenfarbe fixiert; gefärbte anorganische Stoffe können durch Ueberführung in den colloidalen Zustand die Fähigkeit, adsorbiert zu werden, erlangen.

Zu den Versuchen wurden chemisch möglichst verschiedene Stoffe gewählt.

1. Selen. Elementares Selen in colloidaler Form wurde nach der Methode von H. Schulze[1]) gewonnen. Leitet man in eine kalte Lösung von 1 gr Selendioxyd in 20 ccm Wasser einen langsamen Strom von Schwefeldioxyd, so tritt zunächst Gelbfärbung, dann Rotfärbung und schließlich Trübung der Flüssigkeit ein. Verdünnnt man dann mit 10—20 ccm Wasser, so erhält man eine intensiv rote, im durchfallenden Lichte durchsichtige Flüssigkeit. Da das colloidale Selen gegen Wasser negativ geladen ist, kann man durch einfaches Vermischen mit colloidalen Lösungen positiv geladener Hydroxyde, wie Eisenhydroxyd, Aluminiumhydroxyd, Chromhydroxyd, Thoriumhydroxyd, Zirkonhydroxyd, Cerhydroxyd mehr oder minder intensiv gefärbte Niederschläge herstellen. Aehnliches gilt von den folgenden, als färbende Stoffe benutzten Colloiden. Kattun, welcher mit derartigen Hydroxyden gebeizt ist, nimmt natürlicherweise ebenfalls Colloid aus der Lösung auf[2]).

Diese Eigenschaften der colloidalen Selenlösung bieten verhältnißmäßig wenig neues; von wesentlicher Bedeutung ist indessen die Empfindlichkeit der Lösung gegen reine Seide. Bewegt man einen Seidenstrang oder seidenes Gewebe einige Zeit (10—20 Min.) in der Kälte in der Lösung, so wandert fast der gesamte gelöste Stoff an die Faser, die nach dem Auswaschen in fließendem Wasser rein rotgelb gefärbt erscheint. Ein geringer Teil des Selens scheidet sich bei der Digerierung großflockig ab und geht für das Ausfärben verloren. Mit Selen imprägnirte Seide ist nicht lichtecht

---

1) J. f. pr. Chem. [N. F.] 32, 396 (1885).

2) Zu den Versuchen wurde ein von der Firma Scheurer, Lauth u. Co. Thann (Elsaß) hergestellter, mit folgenden Beizen imprägnierter Kattun benützt: Ce, Th, Zr. Y, Be, Al, Co, Ni, Ur, Cr, Cu, Zn, Cd, Mn, Sb, Bi, Pb, Sn, Ti, Fe. Für die liebenswürdige Ueberlassung dieser Proben bin ich der Firma zu großen Danke verpflichtet.

läßt. Als Färbelösung ist die frisch bereitete dunkelblaue Lösung ohne weiteres verwendbar. Seide, Baumwolle und Wolle — die letzteren weniger gut — werden hellblau angefärbt, ohne daß die Färbelösung erschöpft wird. Salzzusatz befördert die Ausscheidung des Wolframblaus auf der Faser.

7. Cadmiumsulfid. Ausgefälltes Cadmiumsulfid läßt sich bekanntlich der Faser nicht imprägnieren. Anders verhalten sich indessen colloidale Lösungen des Sulfids, die man leicht nach der Methode von Prost[1]) erhalten kann. Man fällt Cadmiumsulfid in neutraler oder ammoniakalischer Lösung in der Kälte mit Schwefelwasserstoff, wäscht mit Wasser aus und suspendiert das erhaltene Gel in reinem Wasser. Leitet man durch diese Suspension einen Schwefelwasserstoffstrom, so entsteht nach einiger Zeit eine homogene goldgelbe Flüssigkeit, die in durchfallendem Lichte klar, in auffallendem trübe erscheint und eventuell durch Dialyse von Elektrolytresten, durch Filtration von gröberen Partikeln befreit werden kann. Pflanzliche und tierische Fasern nehmen bei langsamen Erwärmen aus dieser Lösung einen Teil des Sulfids auf und erscheinen dann hellgelb gefärbt. Ein völliges „Ausziehen des Farbstoffes“ findet indessen hier ebensowenig, wie bei den meisten der vorher beschriebenen Colloide statt. Gegen Belichtung ist die Farbe völlig beständig.

8. Arsensulfid und Antimonsulfid. Zu der üblichen Darstellungsweise dieser Colloide durch Behandeln möglichst elektrolytfreier Lösungen von arseniger Säure bzw. Brechweinstein mit Schwefelwasserstoff ist nichts hinzuzufügen.

Arsensulfid wird, wenn auch nur teilweise, mit gelbbrauner, etwas stumpfer Farbe von der Seidenfaser beim Kochen aufgenommen.

Antimonsulfid färbt schwach rötlichgelb. Ein beträchtlicher Teil dieses Colloids wird beim Arbeiten in der Hitze als Gel gefällt und geht für die Faser verloren. Aus demselben Grunde — der Unbeständigkeit der Lösung — ist eine einigermaßen gleichmäßige Färbung nicht zu erzielen; das Sulfid „egalisiert“ schlecht.

9. Ferrocyankupfer. Frisch gefälltes und sorgfältig durch Auswaschen mit Wasser von Elektrolyt befreites Ferrocyankupfer wurde nach den Angaben von Graham durch Behandeln mit Ammoniumoxalat in den colloidalen Zustand übergeführt. Die dunkelrotbraune Lösung reagiert mit den verschiedensten Fasern,

---

1) Bull. acad. d. sciences de Bruxelles [3] **14**, 312.

wenngleich auch hier in keinem Falle annähernd vollständige Fixierung des Salzes auf der Faser erzielt werden konnte.

10. Orientierungsversuche sind schließlich noch angestellt worden mit colloidalen Lösungen von Quecksilber[1]), Zinnsulfid, Kupferhydroxyd nach Graham und Molybdänwolframpurpur nach Berzelius[2]). In allen Fällen hat sich ergeben, daß der gefärbte Körper an der Faser haftet; eine völlige Erschöpfung der colloidalen Lösung an Substanz trat nicht ein; besonders charakteristische Erscheinungen, die eine genauere Untersuchung wünschenswert machen, zeigten sich nicht.

In die beschriebene Klasse von Erscheinungen gehören auch einige bereits bekannte, aber bisher nicht erklärliche, beziehungsweise nicht systematisierbare Beobachtungen. So hatte man bemerkt, daß Lösungen von Ferrirutheniumcyanid[3]) Baumwolle purpurrot echt anfärben. Dasselbe ist von dem Rutheniumammoniumoxychlorid[4]) festgestellt worden. Da die betreffenden Stoffe in Wasser colloidal gelöst sind, könnenn unmehr diese, früher auffälligen Erscheinungen nicht als ausnahmsweise angesehen werden und ihre Klassificierung keine Schwierigkeiten bereiten.

Ebenso verständlich ist die Färbefähigkeit der wenigen, allgemein bekannten anorganischen Farbstoffe, des Berliner Blaus, des Turnbulls Blaus und des Ultramarins. Von den ersten hat schon Graham reine colloidale Lösungen bereitet. Das Ultramarin wird als Albuminfarbe, also mit Hilfe eines Schutzcolloids, auf der Faser fixiert.

Von Bedeutung ist schließlich noch auf organischem Gebiete die hierhergehörige Entdeckung des colloidalen Indigos durch Möhlau und Zimmermann[5]), ein Beispiel für die Ueberführung eines Küpenfarbstoffes in einen Beizenfarbstoff; auf anorganischem Gebiete ist diesem Vorgange etwa die Herstellung von Cadmiumsulfidfärbungen aus der colloidalen Lösung einerseits, nach dem Zweibadverfahren andererseits an die Seite zu stellen.

Nach dem vorstehenden muß folgendes als experimentell festgestellt gelten:

1. Zahlreiche anorganische Colloide werden in mehr oder minder hohem Grade von Baumwolle,

---

1) Lottermoser, anorg. Colloide 1901, 56.
2) Lehrbuch V. Aufl. Bd. 3, 1042 (1845).
3) Dammer, Ergbd. 990.
4) R. Meyer, Jahrbuch 1893, 520.
5) Z. f. Farben und Textilchem. 2, 25 (1903).

Wolle und besonders Seide aus ihren Lösungen adsorbiert.

2. Eine Abhängigkeit dieses Verhaltens von der in mannigfacher Weise variierten, chemischen Natur der colloidal gelösten Stoffe hat nicht konstatiert werden können.

Es liegt demnach der Gedanke nahe, daß die beobachteten Erscheinungen lediglich dem physikalischen Zustande der Stoffe ihre Entstehung zu verdanken haben.

Es erhebt sich die Frage, in wie weit wir berechtigt sind, aus diesem Beobachtungsmaterial auf das Wesen des Ausfärbeprocesses bei den technisch brauchbaren, organischen Farbstoffen zu schließen.

Der theoretisch einfachste Fall von Ausfärbung liegt zweifelsohne in den substantiven Färbungen vor, bei denen ohne Zuhilfenahme einer Beize und ohne chemische Zersetzung des Farbstoffes gearbeitet werden kann. Für die substantiven Farbstoffe, insbesondere die Benzidinfarbstoffe ist durch Krafft[1]) und Preuner[2]) festgestellt, daß sie sich in Wasser nicht als Elektrolyte, sondern als Colloide lösen. Der Beweis ist durch kryoskopische, ebullioskopische und Dialysierversuche einwandsfrei erbracht. Krafft sah in dem Charakter dieser substantiven Farbstoffe als colloidale Salze das wesentliche für das Ausfärbevermögen, eine Anschauung, welche verallgemeinert werden konnte, da sich herausgestellt hatte, daß auch die Beizen und Fixationsmittel der Praxis colloidale Lösungen liefern; der gleiche Charakter kommt ihren salzartigen Verbindungen mit Farbstoffen zu. Bei der Woll- und Seidenfäberei schließlich spielt nach Krafft der sauere bzw. basische Bestandteil der Faser selbst die Rolle eines Salzbildners. Krafft faßte demnach seine Ergebnisse dahin zusammen, daß das Färben in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle eine Ausscheidung colloidaler (klebender und widerstandsfähiger) Salze auf oder in der Faser sei.

Durch diesen Nachweis der colloidalen Natur der substantiven Farbstoffe erwächst zunächst der Einführung des Begriffs der festen Lösungen und der Benützung des Verteilungssatzes eine Schwierigkeit; der Verteilungssatz ist unter Zugrundelegung der Gasgesetze abgeleitet; daß diese aber für colloidale Lösungen ohne weiteres nicht gelten, ist evident. Andererseits lassen uns die Ausführungen von Krafft nach zwei Richtungen hin unbefriedigt. Es fragt sich

1) Ber. 32, 1608 (1899).

2) Inaug. Diss. Heidelberg 1898.

nämlich, ob nicht ein tieferes Verständniß für den Vorgang der Fixierung des colloidalen Farbstoffes auf der Faser gewonnen werden kann, als durch den Ausdruck: „Ankleben und Anhaften“ angebahnt wird; und zweitens wäre zu entscheiden, welcher von den beiden geltend gemachten Faktoren: Colloidcharakter[1]) und Salzcharakter der maßgebende ist.

Wenn man in der Lage wäre, die Ausfärbungen mit anorganischen Colloiden und mit substantiven Farbstoffen als wesensgleich zu betrachten, so könnte man die angeregten Fragen dahin beantworten, daß zweifellos der Salzcharakter eines Farbstoffes mit dessen Färbeeigenschaft nichts zu thun hat, sondern daß ein gefärbter Körper unabhängig von seiner chemischen Constitution ein Farbstoff werden muß, wenn es gelingt, ihn in colloidale Lösung überzuführen. Die erste Frage würde sich damit zunächst so erledigen, daß der Färbevorgang zu den zahlreichen durch die Oberflächenbeschaffenheit der Stoffe bedingten Erscheinungen zu rechnen ist, Vorgänge, welche hier in besonders auffälliger Weise zu Tage treten, wo ungeheuere Oberflächenentwicklung der Colloidpartikel mit intensiver Farbe vereint ist.

Indessen ist es zur Zeit nicht möglich, derartige Schlüsse zu ziehen, da nur ein Vergleich der anorganischen Colloide mit organischen Farbstoffen, keine Identificierung statthaft ist. Als Vorbedingung für eine Identificierung als Farbstoff ist die Festlegung einer Definition dieses Begriffes notwendig. Eine solche fehlt bisher. Demnach wird man in der vorliegenden Identificierungsfrage nicht umhin können, auf das Urteil des Praktikers und auf die Erledigung der Frage nach der technischen Brauchbarkeit der colloidalen Lösungen entscheidenden Wert zu legen. Die Direktion der Aktiengesellschaft für Anilinfabrikation hatte die große Liebenswürdigkeit, in ihrer Berliner Fabrik diese Prüfung vornehmen zu lassen, wofür ich ihr zu ganz besonderem Danke verpflichtet bin. Als Resultat ergab sich, daß neben gewissen Aehnlichkeiten doch in der technischen Wertschätzung eine fundamentale Verschiedenheit zwischen beiden Körperklassen vorliegt.

---

1) Die Wichtigkeit des colloidalen Zustandes von Farbstoff und Faser für das Entstehen einer Färbung hat Zacharias [Färberzeitung **1901**, 149, 165; Z. f. phys. Chem. **39**, 468 (1902); Z. f. Farben und Textilchem. **2**, 233 (1903)] in zum Teil zutreffender Weise betont. Infolge seines mißglückten Versuches, die Färbevorgänge auf Grund dieser Erkenntnis einer mathematischen Behandlung zu unterwerfen, haben indessen seine umfangreichen Spekulationen in der Fachpresse eine um so schärfere Ablehnung gefunden, als er neues experimentelles Material zur Begründung seiner Vorstellungen nicht beigebracht hat.

Zunächst ist zu bemerken, daß in allen technisch untersuchten Fällen nur ein Teil des Colloids auf der Faser fixiert wird, während von einem eigentlichen Farbstoff innerhalb gewisser Concentrationen ein, wenn nicht völliges, so doch sehr weitgehendes Ausziehen verlangt wird.

Im Zusammenhange mit dieser Erscheinung steht die Frage nach der Waschechtheit. Eine Ausfärbung repräsentiert die Erzielung eines Gleichgewichtszustandes; wird dieser von der einen Seite nur in der Weise erreicht, daß ein beträchtlicher Teil des färbenden Körpers in der Lösung verbleibt, so wird beim Behandeln der gefärbten Faser mit Wasser eine dem neuen Gleichgewichtszustande entsprechende Menge Farbstoff in Lösung gehen. In der That sind die mit anorganischen Colloiden gefärbten Stoffe sehr mangelhaft waschecht. Bei diesen Versuchen ist es natürlicherweise ausgeschlossen, Waschflüssigkeiten zu verwenden, durch welche ohnehin eine chemische Zerstörung des gefärbten Körpers bedingt wird. Der Alkaligehalt der üblichen Waschflüssigkeiten zersetzt die meisten der verwendeten Substanzen.

Von wesentlicher Bedeutung ist ferner die Frage nach der Reibechtheit. Die vorliegenden Färbungen sind sehr verschieden reibecht. Bei einem Vergleiche von Färbungen mit Cadmiumsulfid und Berlinerblau, die einmal nach dem Zweibadverfahren, andererseits aus der Lösung der Colloide vorgenommen wurden, stellte sich heraus, daß die ersten bei weitem größere Reibechtheit besitzen.

Als übereinstimmende Kriterien können hervorgehoben werden:

1. Die befördernde Wirkung von Elektrolytzusätzen auf den Färbeeffekt. Eine solche konnte bei Molybdänblau, Wolframblau und dem von der Aktiengesellschaft für Anilinfabrikation untersuchten Berliner Blau und dem colloidalen Silber (Collargol) nachgewiesen werden.

2. Die vergrößerte Aufnahmefähigkeit beschwerter Seide geüber der unbeschwerten.

3. Die Beförderung der Aufnahme von Farbstoff durch Anwendung höherer Temperatur.

4. Die Verminderung der Ausfällbarkeit anorganischer Colloide durch Zusatz von Schutzcolloiden. Man kann diese Schutzwirkung verglichen mit der Verlangsamung und dieser entsprechenden Egalisierung von Ausfärbungen mit organischen Farbstoffen bei Zusatz von Gelatine oder Bastseife,

Es unterliegt keinem Zweifel, daß ein sich so überaus mannigfach manifestierender Naturvorgang, wie der der Färbung, nicht

in eine einzige überall zureichende Theorie eingezwängt werden darf. Aber auch für den einfachsten Fall ist, wie ersichtlich, das Problem durch die geschilderten Ergebnisse nicht erschöpft. Man wird indessen nicht fehlgehen, wenn man auf dem betretenen Wege weitere Aufklärung erwartet, denn offenbar hat sich die Frage in ganz bestimmter Weise zugespitzt: Unbedingt wird man in der Folge mit den beiden Thatsachen zu rechnen haben, daß einerseits die typischen substantiven Farbstoffe Colloide sind, andererseits anorganische Colloide, wenn auch verschieden vollkommen, von der Faser adsorbiert werden. Können wir nun die Eigenschaften ermitteln, durch deren Fehlen die anorganischen Colloide in ihrer Färbefähigkeit beschränkt werden? Sind diese Eigenschaften chemischer Natur oder handelt es sich vielleicht nur um Unterschiede in der Beschaffenheit der Colloidpartikel, welche durch feinere Hilfsmittel entdeckt werden können?

Einige Umstände scheinen diese Fragestellung zu rechtfertigen: Die nach dem Zweibadverfahren hergestellten Färbungen sind reibechter, als die mit Hilfe der colloidalen Lösungen gewonnenen. Nun ist zweifellos das primäre bei der Entstehung eines amorphen Körpers durch chemische Umsetzung der wässerigen Lösungen der Componenten die Entstehung einer colloidalen Lösung, welche freilich ohne besondere Vorsichtsmaßregeln sofort zerstört wird. Sollte nicht die nach dem Zweibadverfahren erzielte reibechte Färbung auf die primäre Entstehung einer derartigen Lösung und zwar einer solchen mit Partikeln von ideal feiner Verteilung zurückzuführen sein?

Einen weiteren geradezu typischen Fall bietet uns das Verhalten der colloidalen Goldlösungen. Wie gezeigt wurde, hängt ihr Färbevermögen in unzweideutiger Weise von ihrer Bereitungsweise und Beschaffenheit ab.

Weitere Parallelen können zwischen diesen Körperklassen durch quantitative Untersuchung über die Verteilung der färbenden Stoffe zwischen Lösung und Faser gezogen werden. Wie erwähnt, konnte Georgievics für einige organische Farbstoffe gewisse, dem Verteilungssatze ähnliche, empirische Formeln aufstellen. Ich bin zur Zeit damit beschäftigt, anorganische Colloide zu demselben Endzwecke zu untersuchen.

Zur Theorie der Elektrokapillarität und der Tropfelektroden.

Von

F. Krüger.

Vorgelegt in der Sitzung am 20. Februar 1904 durch Herrn W. Nernst.

Das reiche Beobachtungsmaterial auf dem Gebiete der Elektrokapillarität und der Tropfelektroden ist in den letzten Jahren noch erheblich erweitert durch die Untersuchungen von S. W. J. Smith[1]), Kučera[2]) und vor allem durch die umfassenden und systematischen Arbeiten von Gouy[3]). Hinter dem hier Erreichten ist die Theorie weit zurückgeblieben, die eine große Zahl eklatantester Abweichungen nicht zu erklären vermag und zwischen den beiden Hauptausgangspunkten, der Ladungs- und der Leitungsstromtheorie, keine endgültige Entscheidung getroffen hat. Bei diesem Stande der Dinge erscheint eine kritische Sichtung der Theorie, zumal ihre Grundlagen durch die neueren elektrochemischen Ansichten eine wesentliche Aenderung erfahren haben, durchaus geboten.

Eine der wesentlichsten Grundlagen der Theorie der Elektrokapillarität bildet die Auffassung der Polarisierbarkeit der Elektroden, sie führt zu dem erwähnten Dualismus der Leitungs- und Ladungsstromtheorie. Lippmann[4]) sowohl wie Helmholtz[5])

1) Zeitschr. phys. Chem. **32**, 433. 1900.

2) Ann. d. Phys. **11**, 529. 1903.

3) Zusammengefaßt Ann. de chim. et de phys. (7). 28. S. 145. 1903.

4) Ann. de chim. et de phys. (5) 5. p. 515. 1875.

5) Monatsber. d. Berl. Akad. 3. XI. 1881. Wied. Ann. **16**, 31. 1882. Wissenschaftl. Abh. I. p. 925.

betrachten eine polarisierbare Elektrode als einen Kondensator; sie sehen den Strom als einen Ladungsstrom an, dessen gesamte, mitgeführte Elektricitätsmenge als positive und negative Belegung der Doppelschicht sich der Grenzfläche Metall-Elektrolyt auflagert. Ein Unterschied zwischen den Theorien von Lippmann und Helmholtz besteht nur darin, daß jener die Elektrode ganz wie einen gewöhnlichen Kondensator auffaßt, bei dessen Aufladung lediglich elektrische Arbeit zu leisten ist, während dieser noch die Arbeit in Rechnung zieht, welche beim Uebergang der Elektrizität aus dem Metall in die Lösung geleistet wird, und die er gleichsetzt der Differenz der „galvanischen Konstanten". Da Helmholtz diese jedoch als unabhängig betrachtet von der Flächendichte ε, also auch nach seiner Grundhypothese, daß die Flächendichte ε lediglich abhänge von der durch die Zelle geschickten Elektricitätsmenge und sich nicht oder nur äußerst langsam mit der Lösung ins Gleichgewicht setze, von der hindurchgeschickten Elektricitätsmenge, so kommt er zu demselben Resultat wie Lippmann, nämlich daß

$$\frac{\partial \gamma}{\partial E} = -\varepsilon$$

sein muß, worin γ die Oberflächenspannung und E die Potentialdifferenz an der Elektrode bedeutet. Daraus folgt bekanntlich, daß γ ein Maximum ist für $\varepsilon = 0$, also auch für $E = 0$. Der physikalische Grund der Abnahme der Oberflächenspannung des Quecksilbers diesseits und jenseits des Nullpunkts der Potentialdifferenz ist also nach Helmholtz in der elektrostatischen Abstoßung der elektriseh geladenen Oberflächenschicht des Quecksilbers zu sehen.

Lippmann führt in seiner Rechnung noch die Kapazität der elektrischen Doppelschicht ein, die er als konstant, d. h. unabhängig von der Potentialdifferenz annimmt, und findet dadurch, daß die Kurve, welche γ als Funktion von E darstellt, eine Parabel ist. Helmholtz zieht aus seinen Anschauungen noch einen anderen Schluß, nämlich, daß ε, da es lediglich von der hindurchgeschickten Elektricitätsmenge abhängt, sich bei steter Vergrößerung der Oberfläche mehr und mehr verringert und schließlich der Null nähert, daß also eine tropfende Hg-Elektrode keine Potentialdifferenz gegen die Lösung besitzt.

Von der hiermit gegebenen Möglichkeit, Elektrolyte ohne Potentialänderung mit einem Elektrometer zu verbinden und somit die einzelnen Potentialdifferenzen zwischen Metallen und Elektro-

lyten zu bestimmen, hat zunächst Ostwald[1]) in weiterem Umfange Gebrauch gemacht.

Den obigen Theorieen steht nahe die Ableitung von Planck[2]). Sie unterscheidet sich von der Helmholtzschen Theorie hauptsächlich dadurch, daß über die Art der Anlagerung der hindurchgeschickten Elektrizitätsmenge auf der Elektrode keine spezielle Annahme gemacht wird; diese Elektrizitätsmenge wird nur in das Produkt $\sigma . e$ zerlegt, worin σ die Größe der Elektrodenoberfläche und e die „Ladung" der Flächeneinheit bedeutet. Mit Lippmann und Helmholtz nimmt Planck an, daß bei Dehnung die Ausbildung der Potentialdifferenz an der neugebildeten Oberfläche nicht momentan erfolge; dementsprechend ist auch seine Auffassung der Wirksamkeit der Tropfelektroden dieselbe wie bei Helmholtz. Die freie Energie der Grenzschicht, welche sich aus dem elektrostatischen, dem molekularen (thermodynamisch-chemischen) und dem elektromolekularen Teil zusammensetzen soll, wird zusammenfassend mit F bezeichnet und in das Produkt $\sigma . f$ zerlegt, worin f die Energie der Oberflächeneinheit bedeutet. An Stelle der Differenz der galvanischen Konstanten bei Helmholtz setzt Planck die osmotische Arbeit, welche beim Ueberführen der Ionen aus dem Metall in das Innere (nicht die Grenzschicht) der Lösung zu leisten ist; da diese unabhängig von der durchgeschickten Elektrizitätsmenge ist, so fällt sie auch im Endresultat heraus. Dies lautet daher ebenso wie bei Helmholtz

$$\frac{\partial \gamma}{\partial E} = -e,$$

d. h. γ ist ein Maximum für e und E gleich Null.

Einen wesentlichen Fortschritt brachten die Arbeiten von Warburg[3]). Sein Verdienst ist es, zuerst darauf aufmerksam gemacht zu haben, daß der polarisierende Strom Konzentrationsänderungen an der Elektrode hervorbringen müsse, und daß die elektromotorische Kraft der Polarisation die einer Konzentrationskette sei. In seiner Theorie der Elektrokapillarität[4]) nimmt er an, daß der Polarisationsstrom der Hauptsache nach ein Leitungsstrom sei. Als Grundhypothese macht er dann, fußend auf thermodynami-

---

1) Zeitschr. phys. Chem. 1, 583. 1887. Vergleiche auch Ostwald, Energie, II. Aufl. 1893. p. 933.

2) Wied. Ann. 44, 385. 1891.

3) Wied. Ann. 38, 321. 1889. 41, 1. 1890.

4) Wied. Ann. 41, 1. 1890.

schen Betrachtungen von Gibbs[1]), die Annahme, daß an der Oberfläche des Quecksilbers eine Verdichtung des gelösten Metallsalzes stattfinde und daß die Oberflächenspannung des Hg wesentlich nur durch diese Oberflächendichte Γ bedingt sei, wogegen der elektrostatische Einfluß der Doppelschicht zu vernachlässigen wäre. Diese Kondensation steht zu der Größe e bei Planck, wie dieser zeigt, in der Beziehung

$$\Gamma = \alpha \cdot e,$$

wo α das elektrochemische Aequivalent des Hg-Salzes bedeutet. Für Γ gilt also dasselbe, was oben über e gesagt ist. Von der mit der Konzentrationsveränderung an der Elektrode verbundenen Energieänderung sieht jedoch Warburg ab, indem er mit Lippmann und Helmholtz annimmt, daß das totale Differential der Aenderung der Oberflächenenergie gegeben sei durch

$$dU = \gamma ds + EdQ,$$

worin s die Oberfläche und Q die Elektrizitätsmenge bedeutet. Durch diese Annahme nähert sich Warburgs Theorie denen von Lippmann und Helmholtz, was auch formal in die Erscheinung tritt in ihrem Resultat, daß

$$\frac{\partial \gamma}{\partial E} = -\frac{\Gamma}{\alpha},$$

d. h. daß γ seinen grössten Wert erreicht für Γ gleich Null. Der fundamentale Unterschied aber besteht darin, daß sie nichts aussagt über den sog. absoluten Nullpunkt der Potentialdifferenz Metall-Lösung. Die Abnahme von γ jenseits des Maximums vermag sie nicht zu erklären ohne besondere, weitere Annahmen. Für Γ wird analog wie in den früheren Theorieen für ε, resp. e angenommen, daß es sich nur sehr langsam mit der Volumkonzentration ins Gleichgewicht setze. Daraus folgt dann, daß an einer Tropfelektrode Γ gleich Null ist.

Die Forderung aller obigen Theorieen, daß eine mit einer Tropfelektrode verbundene Hg-Elektrode sich im Zustande maximaler Oberflächenspannung befinden müsse, wurde zuerst von König[2]), später vor allem von Ostwald und Paschen bestätigt. Die weitere Konsequenz, daß in verschiedenen Elektrolyten die Oberflächenspannung des Quecksilbers beim Maximum derselben

1) Transact. of the Connecticut. Acad., deutsch von Ostwald, 3, p. 380 ff. p. 506. 1878.

2) Wied. Ann. 16, 1. 1882.

gleich sei, zeigte sich zunächst für eine ganze Anzahl von Lösungen erfüllt.

Eine eingreifende Umgestaltung erfuhr die Lippmann-Helmholtzsche Theorie der Elektrokapillarität, vor allem aber die der Tropfelektroden, als Nernst[1]) seine Theorie der Lösungstension auf diese Erscheinungen anwandte. Nach ihr ist bekanntlich die Potentialdifferenz Metall-Elektrolyt lediglich eine Funktion der Konzentration der betreffenden Metallionen, und da diese nicht nur durch Polarisation, sondern auch rein chemisch durch Ausfällen verändert werden kann, so zog Nernst den Schluß, daß man durch immer steigende Verringerung der Ionenkonzentration durch chemische Mittel ebenfalls die Elektrokapillarkurve erhalten müßte, was denn auch der Versuch[2]) bestätigte; der Grund der Verringerung der Oberflächenspannung diesseits und jenseits des Maximums ist hiernach natürlich ganz nach Helmholtz lediglich die elektrostatische Abstoßung der geladenen Oberflächenschichten. Stärker noch modificiert wurde durch die Nernstsche Theorie die Auffassung von der Wirksamkeit der Tropfelektroden. Nach ihr stellt sich die dem Gleichgewicht zwischen Metall und Lösung entsprechende Potentialdifferenz momentan her, die Abnahme der Potentialdifferenz an einer Tropfelektrode kann also nicht wie bei Helmholtz durch die Verringerung der Flächendichte mit der Dehnung der Oberfläche erklärt werden. Die Aenderung der Potentialdifferenz ergiebt sich vielmehr daraus, daß zur Ausbildung der Doppelschicht, welche der jeweiligen Potentialdifferenz entspricht, Ionen der Lösung entzogen werden, solange, bis deren Konzentration in der Nähe der Elektroden die dem sog. absoluten Nullpunkt entsprechende ist, wo keine Doppelschicht mehr gebildet wird. Der hiernach zu erwartende Effekt, daß die Lösung in der Nähe der tropfenden Elektrode verdünnter, dort, wo die Tropfen sich wieder vereinigen, konzentrirter wird, wurde von Palmaer[3]) schlagend bestätigt.

Dadurch, daß die Nernstsche Theorie der elektromotorischen Wirksamkeit der Ionen[4]) es ermöglichte, die durch Helmholz nur in ihrer Gesamtheit und nur für verschiedene konzentrierte Lösungen der gleichen Elektrolyte berechenbare Poten-

---

1) Nernst, Referat über Berührungselektricität, Beilage zu Wied. Ann. 1896 Nr. 8.

2) Zeitschr. f. Elektrochemie, 4, p. 29. 1897/8.

3) Zeitschr. phys. Chem. 25, 265. 1898. 28, 257. 1899.

4) ibid. 4, 129. 1889.

tialdifferenz von Konzentrationsketten in die drei Potentialsprünge Metall-Lösung 1, Lösung 1 — Lösung 2, Lösung 2 — Metall zu zerlegen, und nach der von Planck gegebenen Integration die an der Grenze der Lösungen direkt zu berechnen, war eine weitergehende experimentelle Prüfung der Theorie der Elektrokapillarität und der Tropfelektroden möglich. Hier ergaben sich nun, wie besonders V. Rothmund[1]) und später G. Meyer[2]) fanden, unzweifelhafte Differenzen, wie z. B. die folgende auszugsweise der Arbeit von G. Meyer entnommene Tabelle zeigt:

K	$e_1 - e_2$	e_3	E	$E-(e_1-e_2)$
Hg | KCl | KCNS | Hg	—0,028	0,156	0,148	0,146
Hg | KCl | KJ | Hg	0,122	0,284	0,390	0,226
Hg | KCl | Na_2S | Hg	0,561	0,365	0,983	0,416.

Unter K stehen die verschiedenen Ketten, unter $e_1 - e_2$ die Differenzen der mittels der Methode der maximalen Oberflächenspannung gefundenen Einzelpotentialdifferenzen, unter e_3 die Potentialdifferenzen, welche zwei Tropfelektroden in den betreff. Lösungen zeigen, unter E die gemessene elektromotorische Kraft der Kette. Wie die letzte Kolumne zeigt, sind die Differenzen dieser Werte und die aus dem Maximum der Oberflächenspannung sich ergebenden sehr beträchtlich, während sie Null sein sollten, da nach der Nernstschen Theorie an der Berührungsstelle der Lösungen infolge des Zusatzes eines indifferenten Elektrolyten keine Potentialdifferenz besteht.

Fast dieselben Differenzen, wie die der letzten Kolumne zeigen die Tropfelektroden, ebenfalls im Widerspruch mit der durchgehends bestätigten Theorie der Konzentrationsketten. Ferner ist in diesen Lösungen, wie zuerst Gouy[3]), später auch Rothmund[4]), S. W. J. Smith[4]) und Kučera[4]) fanden, die Oberflächenspannung beim Maximum nicht die gleiche, sondern um so geringer, je größer die erwähnten Differenzen sind. Es kann hiernach keinem Zweifel unterliegen, daß nicht immer beim Maximum der Oberflächenspannung die Potentialdifferenz Null herrscht; nimmt man an, daß in den Lösungen, in denen die Oberflächen-

1) Zeitschr. phys. Chem. ibid. 15, 1. 1894.
2) Wied. Ann. 56, 680. 1845.
3) Compt. rend. 114, 211. 1892.
4) loc. cit.

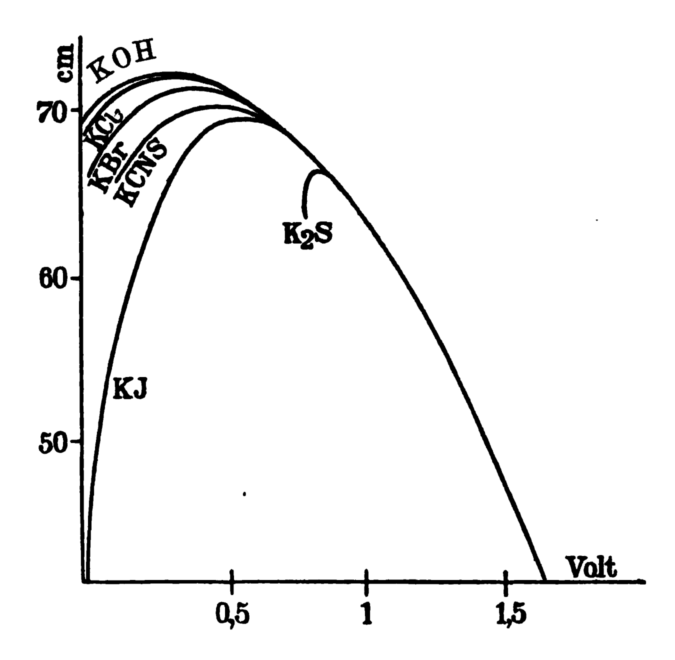
spannung beim Maximum dieselbe ist und bei denen sich aus der Differenz der zur Hervorbringung des Maximums der Oberflächenspannung erforderlichen Spannungen die Kraft der betreffenden Kette richtig berechnen läßt, wirklich beim Maximum die Potentialdifferenz Null herrscht, so ist das Hg beim Maximum in den Lösungen von KCNS, KJ und Na_2S im zunehmenden Grade negativ geladen. Dieselben Abweichungen zeigen sich nach Gouy noch in einer Reihe von Lösungen, wenn auch die genannten gleichsam typische Fälle sind.

Schon in seinem oben erwähnten Referat über Berührungselektrizität hat Nernst darauf aufmerksam gemacht, daß diese Abweichungen im Widerspruch sind mit der Theorie, die die elektrokapillaren Erscheinungen allein durch elektrostatische Wirkungen zu erklären versucht. Später [1]) hat er darauf hingewiesen, daß mehr chemische Wirkungen der verschiedenen Ionenarten, welche in verschiedenen Lösungen die Doppelschicht bilden, die Oberflächenspannung ändern und eine Verschiebung des Nullpunkts bedingen könnten. Wenngleich eine solche Wirkung als möglich zugegeben werden muß, wollen wir hier von ihr absehen und nicht näher darauf eingehen, da sie zur Erklärung dieser Erscheinungen nicht als unbedingt notwendig erscheint.

Es fragt sich schließlich noch, ob es bei diesen Verhältnissen nicht geratener erscheint, lediglich die Grundvorstellung der Theorie von Warburg anzunehmen, die, da sie die elektrostatischen Einflüsse als zu vernachlässigen klein betrachtet, die erwähnten Beziehungen nicht verlangt und daher auch mit deren Nichtbestätigung durch das Experiment nicht im Widerspruch ist. Dagegen ist jedoch zunächst einzuwenden, daß die ursprünglich Warburgsche Theorie die Elektrokapillarkurve nur bis zum Maximum zu erklären vermag, die Abnahme der Oberflächenspannung jenseits derselben jedoch nicht darstellt. Diesen Mangel derselben hat bekanntlich G. Meyer [2]) in mehreren Arbeiten zu heben und die Abnahme jenseits des Maximums durch Amalgambildung zu erklären gesucht. Abgesehen davon, daß die Existenz eines Wasserstoffamalgams wenig wahrscheinlich, die Bildung der Amalgame der Alkalimetalle wegen ihrer hohen Lösungstension nach der Nernstschen [3]) Theorie der Abscheidung von Metallgemischen nur in äußerst minimaler Konzentration erfolgen kann und mit der Annahme auch die

1) Zeitschr. f. Elektrochemie 7, 253 (1900/1901).
2) Wied. Ann. 56, 680. 1895.
3) Zeitschr. f. phys. Chem. 22, 539. 1897.

Ergebnisse von Messungen [1]) der Polarisationskapazität im Widerspruch stehen, soll hier nur ein Umstand näher hervorgehoben werden, der die Aufrechterhaltung der G. Meyerschen Hypothese wohl nicht als möglich erscheinen läßt. Wie nämlich Smith und ausführlicher Gouy zeigte, fallen die negativen Aeste der Elektrokapillarkurven aller untersuchten Lösungen sehr nahe zusammen, wenn man die Kurven parallel mit sich verschiebt und zur Deckung bringt; dies Zusammenfallen tritt ein, wenn man die Kurven auf die gleiche Potentialdifferenz bezieht.



Die obenstehende, einer Arbeit von Gouy entnommene Figur giebt eine Anschauung hiervon; wir haben hier eine zehnprozentige KOH-Lösung, der dann an der kleinen Elektrode (Kapillare) ein Prozent KCl, resp. KBr. u. s. w. zugesetzt wurde, während die Lösung an der großen Elektrode (Anode) unverändert blieb. Wie Gouy später zeigte, fügen sich diesem Gesetz auch die Säuren, sowie die Rb- und Cs-Salze. Will man nun den negativen Ast durch Amalgambildung erklären, so ist nicht einzusehen, warum dieser bei den verschiedensten Amalgamen, deren Konzentrationen noch dazu verschieden sein müssen, gleich sein soll. Wie ferner Smith zeigte, geben die Potentialdifferenzen, die zur Er-

1) F. Krüger, ibid. **45**, 1. 1903.

zeugung gleicher Oberflächenspannung in verschiedenen Lösungen erforderlich sind in demjenigen Teil des negativen Astes, wo die Kurven parallel laufen resp. zur Deckung gebracht werden können, äußerst exakt die richtigen Potentialdifferenzen der aus den betreffenden Lösungen zusammengesetzten Ketten, was mit Smith wohl nur so gedeutet werden kann, daß in diesem Gebiet lediglich die elektrostatische Abstoßung der Grund der verringerten Oberflächenspannung ist; eine für alle Lösungen gleiche additive Beeinflussung irgendwelcher anderen Art anzunehmen, liegt zunächst kein Grund vor. Zur Deutung des negativen Astes scheint hiernach die G. Meyersche Erweiterung der Warburgschen Theorie ungeeignet, die Helmholtzsche Theorie dagegen fast unumgänglich.

Ist also die letztere wenigstens in einem gewissen Gebiete unbedingt anzunehmen, während sich in einem andern zweifellose Widersprüche mit ihr zeigen, so ist zunächst zu untersuchen, ob diese Widersprüche vielleicht verschwinden bei Ableitung der Gleichung unter strenger Berücksichtigung der Vorgänge an der Elektrode gemäß der Nernstschen Theorie der Lösungstension. Während nämlich Planck auf die Vorgänge in der Grenzschicht überhaupt nicht näher eingeht und, wie erwähnt, auch noch an der alten Auffassung der langsamen Ausbildung der natürlichen Potentialdifferenz festhält, ist in den Ableitungen von Lippmann und Helmholtz, wie aus der obigen Darstellung hervorgeht, die Annahme enthalten, daß eine Elektrode polarisierbar sei, ohne daß die Ionenkonzentration in ihrer Nähe geändert wird; in ihnen wird ein prinzipieller Gegensatz zwischen polarisierbaren und unpolarisierbaren Elektroden angenommen, nur auf die letzteren wird die Theorie der Konzentrationsketten angewandt. Erscheint das zur Zeit der Ableitung der ursprünglichen Lippmann-Helmholtzschen Theorie erklärlich, so ist diese Auffassung unhaltbar geworden, seitdem durch die Nernstsche Theorie, die hierin über die ursprüngliche Helmholtzsche Theorie der Konzentrationsketten hinausgeht, gezeigt ist, daß die Potentialdifferenz nur durch die Ionenkonzentration des betreffenden Metalls bedingt ist, gleichgültig welches Salz gelöst, d. h. welche Anionen in der Lösung sind, und daß eine Elektrode nur polarisierbar ist durch Aenderung der Ionenkonzentration in der Nähe der Elektrode. Der Unterschied zwischen unpolarisierbaren und polarisierbaren Elektroden, wie er z. B. durch Quecksilber in Merkuronitratlösung und andererseits in KCl-Lösung, gesättigt mit dem äußerst wenig löslichen $HgCl$, dargestellt wird, besteht hiernach darin, daß in jenen durch

Diffusion das durch eine angelegte Spannung herauselektrolysierte Salz stets wieder ergänzt und daher die Potentialdifferenz nicht geändert wird, während in dieser die geringere Diffusion hierzu nicht genügt und sich daher die Elektrode polarisiert; der Unterschied zwischen beiden ist also nur ein gradweiser, bei Arten gehen kontinuierlich in einander über. Bei beiden erfolgt momentan die Ausbildung der natürlichen Potentialdifferenz. An jenem künstlichen Unterschiede lag es, daß die Erklärung der Unwirksamkeit der Tropfelektrode in Merkuronitrat auf Schwierigkeit stieß, die sich hier einfach ebenso wie die Unpolarisierbarkeit durch die größere Diffusion erklärt. Diese Betrachtungen gelten auch für die Warburgsche Theorie. Zwar war Warburg der erste, der darauf hinwies, daß der Polarisationsstrom wenigstens teilweise ein Leitungsstrom sei, allein seine ausdrückliche Annahme der Lippmannschen Gleichung

$$dU = \gamma\, ds + E . dQ$$

vernachlässigt die mit der Polarisierung verbundene Konzentrations- und hierdurch bedingte Energieänderung der Grenzschicht. Ebenso muß er für Tropfelektroden in konzentrierten Hg-Salzlösungen die neue Hypothese machen, daß sich hier wegen der größeren Konzentration die natürliche Potentialdifferenz schneller ausbildet.

Da hiernach bei jeder Polarisation Konzentrationsänderungen in Betracht kommen, jeder Polarisationsstrom also auch zum Teil Leitungsstrom ist, so haben wir anstatt der Lippmannschen Gleichung die folgende

$$dU = \gamma\, ds + E\, d\, Q + p\, dv,$$

worin p den osmotischen Druck der Hg-Ionen und v das Volumen bedeutet, und deren zweites und drittes Glied bekanntlich die Nernstsche Gleichung für die elektromotorische Kraft ergiebt; das erste und dritte führt zu der von Des Coudres[1]) abgeleiteten Beziehung zwischen der elektromotorischen Kraft und der Krümmung der Oberfläche. Da diese letztere Beziehung jedoch nur sehr geringfügige Aenderungen bedingt, soll hier von ihr abgesehen werden. Nun ist allerdings ersichtlich, daß das Glied $p\, dv$ trotz der Annahme von Leitungsströmen für das Endresultat belanglos ist, da in summa die bei dem Kreisprozeß geleistete osmotische Arbeit gleich Null ist, wie folgende Betrachtung lehrt. Als Grundhypothese machen wir dabei die Helmholtzsche Annahme einer Doppelschicht von endlicher Dicke mit flächenhaften Be-

1) Wied. Ann. **46**, 292. 1892.

legungen, deren Schicht in der Lösung von Ionen gebildet wird; ist auch zweifellos diese Annahme insofern nicht ganz streng, als die Verteilung der Elektrizität in der Lösung auf einer Fläche nicht exakt zutreffend ist, sondern sicher auch z. T. räumlich ist, so ist sie doch jedenfalls sehr angenährt richtig und für die hier betrachteten Verhältnisse ausreichend. Die Polarisation einer Elektrode setzt sich dann zusammen aus einem Leitungsstrom zur Veränderung der Konzentration und einem Ladungsstrom zur Veränderung der Flächendichte, wie ich das andern Orts (l. c.) näher ausgeführt habe. Von dem irreversiblen Vorgange der Diffusion, den Wiedeburg[1]) zur Erklärung der oben genannten Abweichungen von der Theorie heranzuziehen suchte, können wir absehen, seitdem Smith nachgewiesen hat, daß dieser Einfluß sehr gering und zu vernachlässigen ist. Der Kreisprozeß gestaltet sich dann folgendermaßen:

1) Wir dehnen die Oberfläche einer Queksilberelektrode von der Größe s bei konstantem Potential um ds, dabei haben wir die mechanische Arbeit $\gamma\, ds$ zu leisten. Da auch an der neugebildeten Fläche ds sich die der betreffenden Konzentration entsprechende Doppelschicht ausbildet, wobei die hierzu erforderlichen Ionen der Lösung entzogen werden, so müssen wir zur Konstanthaltung der Konzentration durch einen entsprechenden Strom diese ergänzen. Ist also ε die entsprechende Flächendichte, so haben wir die Elektrizitätsmenge $\varepsilon\, ds$ durchzuschicken, bekommen also in summa

$$A_1 = \gamma\, ds + E \,.\, \varepsilon \,.\, ds.$$

2) Wir erhöhen die Potentialdifferenz bei konstanter Oberfläche um dE. Hierzu haben wir in der der Elektrode anliegenden Schicht von der, wenn auch geringen, so doch endlichen Dicke δx die Ionenkonzentration entsprechend zu verändern. Bezeichnen wir mit F die mit einem gr-Aequ. wandernde Elektricitätsmenge und rechnen die Konzentration in gr-Aequ., so ist hierzu die Elektricitätsmenge $F \,.\, \delta x \,.\, \frac{\partial c}{\partial E} \,.\, dE$ pro Flächeneinheit erforderlich, wenn mit c die Konzentration der Hg-Ionen bezeichnet wird. Das Hg-Salz betrachten wir hier als vollkommen dissociiert; ist es nicht von vornherein der Lösung zugesetzt, so bildet es sich alsbald unter Mitwirkung des gelösten Luftsauerstoffs. Bemerkt muß hier noch werden, daß wegen des angenommenen Ueberschusses eines indifferenten Elektrolyten mit gleichem Anion, der die

1) Wied. Ann. 59, 742. 1896.

Stromleitung im Innern fast allein übernimmt, die Ueberführungszahl hier bekanntlich keine Rolle spielt. Zur Ausbildung der Doppelschicht bedarf es der Menge $\frac{\partial \varepsilon}{\partial E} . dE$, sodaß wir für die Arbeit bekommen:

$$A_2 = (s + ds) \cdot E \cdot \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial E} + F \cdot \delta x \cdot \frac{\partial c}{\partial E}\right) dE.$$

3) Hierauf verkleinern wir bei konstanter Potentialdifferenz die Oberfläche um ds. Die hierbei gewonnene Arbeit entspricht natürlich der bei Vorgang 1, nur ist zu bedenken, daß an der Oberfläche ds auch die Konzentrationsänderung wieder rückgängig zu machen ist. Wir haben daher:

$$A_3 = -\left(\gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial E} dE\right) ds - (E + dE)\left(\varepsilon + \frac{\partial \varepsilon}{\partial E} dE + F \cdot \delta x \cdot \frac{\partial c}{\partial E} dE\right) ds.$$

4) Um die Elektrode in den Anfangszustand zurückzubringen, ist noch die Potentialdifferenz um dE zu erniedrigen, wozu erforderlich ist die negative Arbeit

$$A_4 = -s \cdot E\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial E} + F \cdot \delta x \cdot \frac{\partial c}{\partial E}\right) dE.$$

$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0$ ergiebt mit Vernachlässigung der kleinen Glieder höherer Ordnung

$$\frac{\partial \gamma}{\partial E} = -\varepsilon,$$

d. h. die ursprüngliche Lippmann-Helmholtzsche Gleichung. Dies Resultat war, wie schon erwähnt, vorauszusehen, da die Lösung bei der Dehnung unverändert bleibt und daher außer den elektrostatischen keine Kräfte auftreten, die eine Veränderung der Oberflächenspannung bedingen.

Nun ist aber zu bedenken, daß, da das Wasser das Quecksilber benetzt, es unter dem Einfluß der Oberflächenkräfte steht, die es an der Oberfläche festhalten und dort kondensieren. Daraus folgt aber, daß die Konzentration in der unmittelbar anhaftenden Schicht eine etwas andere sein wird, als im homogenen Innern der Lösung, eine Annahme, wie sie ganz ähnlich Warburg macht. Man kann diese Annahme am einfachsten so darstellen, worauf mich Herr Prof. Nernst freundlichst aufmerksam machte, daß man dem gelösten Salz einen von eins verschiedenen Teilungskoëffizienten zwischen der anhaftenden Wasserschicht und dem

Innern der Lösung zuschreibt; nach allem, was man bisher weiß, wird dieser größer sein als 1, d. h. die Konzentration des Salzes in der Schicht größer als in der Lösung. Für verschiedene Salze werden wir den Verteilungskoefficienten als nahe gleich betrachten können. Ferner sei hier im Unterschied von Warburg die Annahme gemacht, daß dies Teilungsverhältnis in der Grenzschicht sich augenblicklich ins Gleichgewicht setzt, wie man das nach Analogien auf anderen Gebieten zu erwarten hat.

Da also die Konzentration in der anhaftenden Schicht mit der Konzentration c, die ohne die Kondensation jeweils in der Grenzschicht vorhanden sein würde, stets im Gleichgewicht steht, so ist zur Ueberführung dieser Konzentration c in die infolge der Verteilung auf $\varkappa . c$ erhöhte, keine Arbeit zu leisten. An dem obigen Kreisprozeß wird also zunächst nur an Stelle der Konzentration c zu setzen sein $\varkappa . c$, wo $\varkappa$ den Teilungskoëffizienten bedeutet. Dagegen ist zu bedenken, daß bei der Dehnung der Oberfläche um ds auch an diesem neugebildeten Teil derselben sich das Verteilungsgleichgewicht herstellt, wozu Salz der Lösung entzogen wird. Damit also die Konzentration oder die Potentialdifferenz während der Dehnung konstant bleibt, ist diese Menge durch den Strom zu ergänzen; sie beträgt wenn c die Konzentration im Innern der Lösung bedeutet $(\varkappa - 1) . c . \delta x . ds$. In A_1 des obigen Kreisprozesses ist daher noch das Glied $E . F . (\varkappa - 1)\, c . \delta x . ds$ aufzunehmen, in A_2 $(E + dE)\, F (\varkappa - 1) . c . \delta x . ds$. Das Resultat des Kreisprozesses ist dann

$$\frac{\partial \gamma}{\partial E} = - \varepsilon - F (\varkappa - 1)\, c . \delta x,$$

d. h. γ ist ein Maximum nicht, wenn ε, resp. E gleich Null ist, sondern wenn $\varepsilon = - F (\varkappa - 1)\, c . \delta x$, wenn also die Elektrizitätsmenge, die nötig ist, um die durch die Herstellung des Verteilungsgleichgewichts in der anhaftenden Schicht bedingte Konzentrationsverminderung zu kompensieren, mit umgekehrtem Zeichen der gleich ist, die zur Beseitung der durch Ausbildung der Doppelschicht bedingten Konzentrationsänderung erforderlich ist. Oder: das Maximum liegt dort, wo die Konzentrationsverminderung infolge von Verteilung kompensiert wird durch die Konzentrationsvermehrung [1]) durch Ausbildung der Doppelschicht, was nur möglich ist jenseits des sog. absoluten Nullpunkts, wo die Oberfläche schon negativ geladen ist. In diesem Punkte ist also zur Konstant-

---

1) Vergl. Amelung, Dissertation, Göttingen 1902, und F. Krüger a. a. O.

haltung der Konzentration an der Elektrode bei Dehnung derselben kein Strom erforderlich. Das Glied $F(\varkappa - 1) . c . \delta x$ entspricht dem Ausdruck $\frac{\Gamma}{\alpha}$ bei Warburg.

Hieraus erklärt sich nun ohne weiteres die aus den obigen Kurven zu entnehmende Tatsache, auf die auch schon Rothmund aufmerksam machte, daß mit zunehmender Komplexität des gelösten Hg-Salzes die erwähnten Abweichungen von den Konsequenzen der ursprünglichen Helmholtzschen Theorie zunehmen. An Stelle von c, der Ionenkonzentration eines vollkommen dissociierten Salzes, die wir oben lediglich in Rücksicht zogen, ist nämlich bei einem nur teilweise dissociierten Salze, vor allem also bei den Komplexsalzen, deren Anionen nur äußerst wenig dissociiert sind, die Gesamtkonzentration c_0 zu setzen. Um deren für die obige Gleichung erforderliches elektrisches Aequivalent zu bekommen, ist die Gesamtkonzentration durch die Ionenkonzentration auszudrücken, wobei die Dissociationskonstante k in den Nenner tritt. Haben wir z. B. das komplexe Salz $KHg(CN)_3$, das primär stark dissociiert ist in $\overset{+}{K}$ und $Hg\overline{(CN)}_3$, so haben wir statt der Hg-Ionenkonzentration die Konzentration der Hg(CN)-Ionen zu nehmen, die äußerst schwach dissociiert sind nach der Gleichung

$$\overset{+}{Hg} + 2\,\overline{CN} = Hg\overline{(CN)}_2.$$

Bezeichnen wir mit c_1 die Hg- und CN-Ionenkonzentration, mit c_2 die der $Hg(CN)_2$-Ionen, so ergiebt das Massenwirkungsgesetz $c_1^3 = k . c_2$, wofür wir, falls der Dissociationsgrad klein gegen 1 ist, auch schreiben können $c_1^3 = k . c_0$ oder $c_0 = \frac{1}{k} \cdot c_1^3$, worin c_0 die Gesamtkonzentration an $Hg\overline{(CN)}_2$ bedeutet. Da k mit zunehmender Komplexität abnimmt, so wird $c_0 = \frac{1}{k} \cdot c_1^3$ in demselben Maße größer, umsomehr wird also das Maximum auf den negativen Ast verschoben. Gleichzeitig ergiebt sich in völliger Uebereinstimmung mit der Erfahrung eine Verminderung des Maximums selbst, wie schon allein daraus folgt, daß in diesem Punkt die Oberfläche negativ geladen ist.

Ferner folgt ohne weiteres die sehr interessante Tatsache auf welche wohl zuerst G. Meyer[1]) hinwies und die auch von Smith[1]) und Amelung[2]) bestätigt wurde, daß nämlich auch in

1) loc. cit. Siehe obige Tabelle!

2) Dissertation, Göttingen 1902.

allen den Lösungen, welche die bekannten Abweichungen zeigen, an einer Tropfelektrode dieselbe Potentialdifferenz herrscht, wie beim Maximum der Oberflächenspannung in derselben Lösung. Nach der Nernstschen Theorie der Tropfelektroden gehen bekanntlich solange Hg-Ionen aus der Lösung heraus, resp. in dieselbe hinein, bis $P = p$ geworden ist, bis der osmotische Druck der Ionen der Lösungstension das Gleichgewicht hält. Nach unserer Anschauung wird auch in diesem Punkte ein Tropfelektrode noch Konzentrationsänderungen bewirken, da durch die Einstellung des Verteilungsgleichgewichts an dem entstehenden Tropfen eine Konzentrationsverminderung stattfindet, indem die unmittelbar fest am Tropfen haftende Schicht mit diesem fortgeführt wird. Erst wenn jenseits des absol. Nullpunktes die Verdünnung des Salzes durch Dehnung kompensiert wird durch die Konzentrierung infolge der Doppelschichtenausbildung, bleibt die Potentialdifferenz ungeändert; dann ist sie aber nach dem Obigen gleich der beim Maximum der Oberflächenspannung. Auch hier haben wir demnach die stärksten Abweichungen in den am stärksten komplexen Salzlösungen. Die zweite Komponente der Tropfelektrodenwirksamkeit, die Kondensation des Salzes auf den Tropfen wurde in ähnlicher Weise schon von G. Meyer[1]), allerdings als einzige Ursache, zur Erklärung der Konzentrationsveränderungen durch Tropfelektroden herangezogen.

Die Asymmetrie der Kurven, welche auf dem positiven Aste mit zunehmender Komplexität der gelösten Salze immer steiler abfallen, ergiebt sich nunmehr leicht aus der mit der Kompexität der Salze zunehmenden Gesamtkapazität der Elektroden; ein näheres Eingehen hierauf würde indes hier zu weit führen.

Wir sind somit zu einer Art Kombination der Lippmann-Helmholtzschen und der Warburgschen Theorie gelangt, wobei jene freilich modificiert ist durch die Nernstsche Theorie der Lösungstension, diese vor allem durch die Annahme einer momentanen Ausbildung des Gleichgewichts in der Grenzschicht, und es fragt sich nunmehr, was sich daraus für die Lage des sog. absoluten Nullpunktes der Potentialdifferenz, der durch die Gleichheit von Lösungstension und osmotischem Druck definiert ist, ergiebt. Da ist zunächst zu bemerken, daß, wie die obige Figur zeigt, mit Abnahme der Komplexität der gelösten Salze die Abweichungen vom normalen Verhalten immer geringer werden. Wie immer man diese Anomalien auch deuten will, eins scheint aus den Kurven der Figur mit Sicherheit hervorzugehn, daß sich über die reine Er-

1) Wied. Ann. 67, 433. 1899.

scheinung der elektrostatischen Wirkung eine Störung superponiert, zunehmend mit der Konzentration und stärker bei den komplexeren Salzen, und es fragt sich nur, ob auch z. B. in verdünnter H_2SO_4 oder HCl diese Störung noch beim Maximum vorhanden ist oder schon diesseits desselben liegt. Nach der oben entwickelten Theorie müßte dann beim Maximum die Oberflächenspannung $F(\varkappa-1)c.\delta x$ verschwindend klein sein im Vergleich zu ε. Ein Kriterium hierfür würde sein, daß in diesem Punkte die Kapazität einer solchen Elektrode lediglich eine Doppelschichtenkapazität ist, was zur Zeit wohl mit großer Wahrscheinlichkeit behauptet werden kann[1]), worauf indessen hier nicht näher eingegangen werden soll. Ein weiteres Kriterium besteht darin, daß man nach Smith in dem Gebiet der Kurven, das von der Störung frei ist, aus der Differenz der in verschiedenen Lösungen zur Hervorbringung gleicher Oberflächenspannung erforderlichen Potentialdifferenzen die Kraft der aus denselben Lösungen zusammengesetzten Kette berechnen kann. Nun ist aber bekannt, daß man in der Tat in den verdünnten Lösungen einer Reihe von Säuren und Salzen, deren entsprechende Hg-verbindungen nicht, resp. schwach komplex sind, aus den zur Hervorbringung des Maximums nötigen Spannungen die betreffenden elektromotorischen Kräfte mit großer Annäherung richtig berechnen kann, woraus zu schließen ist, daß man sich hier noch in dem störungsfreiem Gebiete befindet, worauf außerdem auch die Gleichheit der Oberflächenspannung in verschiedenen Lösungen an diesem Punkt hinweist. Es erscheint dies als durchaus verständlich, wenn man bedenkt, daß bei diesen völlig dissoziierten Salzen die zur Aenderung ihrer Konzentration, die ja beim Maximum der Oberflächenspannung außerordentlich klein ist, erforderliche Elektrizitätsmenge verschwindend sind gegenüber den zur Ausbildung der Doppelschicht notwendigen und daß jene erst beträchtlich und von Einfluß werden, wenn bei starker Komplexität auch die Konzentration des undissoziierten Bestandteils zu ändern ist. Beschränken wir uns also zunächst auf das Gebiet der Elektrokapillarität und der Tropfelektroden, wo bisher allein ein ausreichendes Beobachtungsmaterial vorliegt, so kommen wir zu dem von Ostwald verfochtenen Standpunkte, daß der in verdünnten Lösungen nicht komplexer Säuren und Salze erhaltene sog. absolute Nullpunkt mit großer Wahrscheinlichkeit als der richtige zu betrachten ist.

---

1) Vergl. F. Krüger, Zeitschr. f. physik. Chemie 45, 1. 1903.

Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.

(Erste Mitteilung.)

Von

David Hilbert in Göttingen.

Vorgelegt in der Sitzung vom 5. März

Es sei $K(s, t)$ eine Funktion der reellen Veränderlichen s, t; $f(s)$ sei eine gegebene Funktion von s und $\varphi(s)$ werde als die zu bestimmende Funktion von s angesehen; jede der Veränderlichen s, t möge sich in dem Intervalle a bis b bewegen: dann heiße

$$f(s) = \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt$$

eine *Integralgleichung erster Art* und

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda\int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt$$

eine *Integralgleichung zweiter Art*; dabei bedeutet λ einen Parameter. Die Funktion $K(s, t)$ heiße der *Kern der Integralgleichungen*.

Durch die Randwertaufgabe in der Potentialtheorie wurde zuerst Gauß auf eine besondere Integralgleichung geführt; die Benennung „Integralgleichung" hat bereits P. du Bois-Reymond[1]) angewandt. Die erste Methode zur Auflösung der Integralgleichung zweiter Art rührt von C. Neumann[2]) her: dieser Methode zufolge erscheint die Function $\varphi(s)$ direct als eine unend-

1) Bemerkungen über $\Delta z = 0$. Journ. f. Math. Bd. 103 (1888).

2) Ueber die Methode des arithmetischen Mittels. Leipz. Abh. Bd. 13 (1887).

liche Reihe, die nach Potenzen des Parameters λ fortschreitet und deren Coefficienten gewisse durch mehrfache Integrale definirte Funktionen von s sind. Eine andere Formel zur Auflösung der Integralgleichung zweiter Art fand Fredholm[1]), indem es ihm gelang, $\varphi(s)$ als Bruch darzustellen, dessen Zähler eine beständig convergente Potenzreihe in λ mit gewissen von s abhängigen Coefficienten ist, während als Nenner eine beständig convergente Potenzreihe in λ mit numerischen Coefficienten auftritt. Den directen Nachweis der Uebereinstimmung der Formeln von C. Neumann und Fredholm erbrachte auf meine Anregung hin Kellogg[2]). In dem besonderen Falle gewisser Randwertaufgaben in der Potentialtheorie hat Poincaré[3]) als der Erste den Parameter λ eingeführt und ihm gelang es auch zuerst nachzuweisen, daß die Lösung notwendig als Quotient zweier beständig convergenter Potenzreihen in λ darstellbar sein muß. Eine dritte Methode zur Lösung der Integralgleichung zweiter Art, die auch zugleich auf die Integralgleichung erster Art anwendbar ist, werde ich in einer späteren Note in diesen Nachrichten auseinandersetzen. Die Auflösung besonderer Integralgleichungen gelang Volterra[4]). In gewissen Fällen läßt sich die Integralgleichung erster Art auf die zweiter Art nach einer von mir angegebenen Methode[5]) zurückführen.

Die nähere Beschäftigung mit dem Gegenstande führte mich zu der Erkenntniß, daß der systematische Aufbau einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen für die gesamte Analysis, insbesondere für die Theorie der bestimmten Integrale und die Theorie der Entwickelung willkürlicher Funktionen in unendliche Reihen, ferner für die Theorie der linearen Differentialgleichungen sowie für die Potentialtheorie und Variationsrechnung von höchster Bedeutung ist. Ich beabsichtige in einer Reihe von Mitteilungen die Frage nach der Lösung der Integralgleichungen von neuem zu behandeln, vor Allem aber den Zusammenhang und die allgemeinen Eigenschaften der Lösungen aufzusuchen, wobei ich meist die für meine Resultate wesentliche Voraussetzung mache,

---

1) Sur une classe d'équations fonctionnelles. Acta mathematica Bd. 27 (1903). und die daselbst citirte Abhandlung über denselben Gegenstand aus dem Jahre 1899.

2) Zur Theorie der Integralgleichungen. Gött. Nachr. 1902.

3) Sur les équations de la physique mathématique. Rendiconti del circolo di Palermo t. 8 (1894). La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. Acta mathematica Bd. 20 (1896—97).

4) Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti. Annali di matematica s. 2 t. 25 (1897).

5) Vgl. Kellogg, Zur Theorie der Integralgleichungen. Inaugural-Dissertation, Göttingen 1902, sowie Math. Ann. Bd. 58.

daß der Kern $K(s, t)$ der Integralgleichung eine *symmetrische* Funktion der Veränderlichen s, t ist. Insbesondere in dieser ersten Mitteilung gelange ich zu Formeln, die die Entwickelung einer willkürlichen Funktion nach gewissen ausgezeichneten Funktionen, die ich Eigenfunktionen nenne, liefern: es ist dies ein Resultat, in dem als specielle Fälle die bekannten Entwickelungen nach trigonometrischen, Bessel'schen, nach Kugel-, Lamé'schen und Sturm'schen Funktionen, sowie die Entwickelungen nach denjenigen Funktionen mit mehr Veränderlichen enthalten sind, wie sie zuerst Poincaré (l. c.) bei seinen Untersuchungen über gewisse Randwertaufgaben in der Potentialtheorie nachwies. Meine Untersuchung wird zeigen, daß die Theorie der Entwickelung willkürlicher Funktionen durchaus nicht die Heranziehung von gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichungen erfordert, sondern daß die Integralgleichung es ist, die die notwendige Grundlage und den natürlichen Ausgangspunkt für eine Theorie der Reihenentwickelung bildet. Das merkwürdigste Resultat ist, daß die Entwickelbarkeit einer Funktion nach den zu einer Integralgleichung zweiter Art zugehörigen Eigenfunktionen als abhängig erscheint von der Lösbarkeit der entsprechenden Integralgleichung erster Art.

Zugleich erhält dabei die Frage nach der Existenz der Eigenfunktionen eine neue und vollständigere Beantwortung. In dem besonderen Fall der Randwertaufgaben der Potentialtheorie hat bekanntlich die Existenz der Eigenfunktionen zuerst H. Weber[1]) auf Grund des Dirichlet-Thomsonschen Minimalprincipes zu beweisen gesucht und sodann hat Poincaré (l. c.) den Beweis dafür für jenes besondere Problem mit Benutzung der von H. A. Schwarz ausgebildeten Methoden wirklich erbracht. Durch Anwendung meiner Theoreme folgt nicht nur die Existenz der Eigenfunktionen im allgemeinsten Falle, sondern meine Theorie liefert zugleich in einfacher Form die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz unendlich vieler Eigenfunktionen. Dieser Erfolg ist wesentlich durch den Umstand bedingt, daß ich nicht, wie es bisher geschah, in erster Linie auf den Beweis für die Existenz der Eigenwerte ausgehe, sondern vielmehr zunächst ein allgemeines Entwicklungstheorem (S. 69—70) aufstelle und dann aus diesem ohne Mühe die Bedingungen für die Existenz der Eigenwerte und Eigenfunktionen abzuleiten vermag.

Die Methode, die ich in dieser ersten Mitteilung anwende,

---

1) Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$. Math. Ann. Bd. 1. (1868.)

besteht darin, daß ich von einem algebraischen Problem, nämlich dem Problem der orthogonalen Transformation einer quadratischen Form von n Variabeln in eine Quadratsumme ausgehe und dann durch strenge Ausführung des Grenzüberganges für $n = \infty$ zur Lösung des zu behandelnden transcendenten Problemes gelange [1]). Dieser Grundgedanke ist als heuristisches Hülfsmittel bereits von anderen Autoren häufig herangezogen worden, insbesondere von Lord Rayleigh [2]); ich habe denselben zu einem beweisenden Prinzip umgestaltet.

Der leichteren Faßlichkeit und der kürzeren Darstellung wegen habe ich mich in dieser Mitteilung stets auf den Fall einer Integralgleichung mit einfachem Integrale beschränkt. Doch sind die Methoden und Resultate auch gültig, wenn in den oben angegebenen Integralgleichungen an Stelle der einfachen Integrale Doppel- oder mehrfache Integrale stehen und K sodann entsprechend eine symmetrische Function zweier Reihen von Variabeln bedeutet.

I.

Lösung des algebraischen Problems.

Es mögen $K(s, t)$, $f(s)$, $\varphi(s)$ die zu Anfang dieser Mitteilung angegebene Bedeutung haben; jedoch nehmen wir das Intervall der Variabeln s, t der Einfachheit halber als das Intervall 0 bis 1 an; außerdem sei $K(s, t)$ eine symmetrische Funktion in s, t. Ferner verstehen wir unter n eine bestimmte positive ganze Zahl und führen folgende abkürzende Bezeichnungen ein:

$$K_{pq} = K\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) \qquad (p, q = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\begin{aligned} Kxy &= K_{11} x_1 y_1 + K_{12} x_1 y_2 + K_{21} x_2 y_1 + \cdots + K_{nn} x_n y_n \\ &= \sum_{p,q} K_{pq} x_p y_q, \qquad (K_{pq} = K_{qp}), \end{aligned}$$

$$\varphi_p = \varphi\left(\frac{p}{n}\right), \qquad f_p = f\left(\frac{p}{n}\right), \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\begin{aligned} Kx_1 &= K_{11} x_1 + K_{12} x_2 + \cdots + K_{1n} x_n, \\ Kx_2 &= K_{21} x_1 + K_{22} x_2 + \cdots + K_{2n} x_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Kx_n &= K_{n1} x_1 + K_{n2} x_2 + \cdots + K_{nn} x_n, \\ [x, y] &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n. \end{aligned}$$

---

1) Die Grundidee dieser Methode habe ich seit W.-S. 1900—1901 wiederholt im Seminar und in Vorlesungen zum Vortrag gebracht.

2) Vgl. Rayleigh, The theory of Sound, 2. ed. London 1894—96 und Pockels-Klein, Ueber die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und deren Auftreten in der mathematischen Physik. Leipzig 1891.

Es ist offenbar

$$Kxy = [Kx, y] = [Ky, x].$$

Wir legen nun das algebraische Problem zu Grunde: es seien aus den n linearen Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{aligned} f_1 &= \varphi_1 - l(K_{11}\varphi_1 + \cdots + K_{1n}\varphi_n), \\ f_2 &= \varphi_2 - l(K_{21}\varphi_1 + \cdots + K_{2n}\varphi_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n &= \varphi_n - l(K_{n1}\varphi_1 + \cdots + K_{nn}\varphi_n) \end{aligned}$$

oder kürzer

$$(2) \qquad \begin{aligned} f_1 &= \varphi_1 - lK\varphi_1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f_n &= \varphi_n - lK\varphi_n \end{aligned}$$

die n Unbekannten $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ zu ermitteln, während die Werte f_p und die Coefficienten K_{pq} gegeben sind und l ebenfalls als ein bekannter Parameterwert anzusehen ist. Wir ziehen zugleich die Eigenschaften der Lösungen und den Zusammenhang mit dem Problem der orthogonalen Transformation der quadratischen Form Kxx in Betracht.

Um dieses algebraische Problem zu lösen, gebrauchen wir die Determinanten

$$d(l) = \begin{vmatrix} 1-lK_{11}, & -lK_{12}, & \ldots, & -lK_{1n} \\ -lK_{21}, & 1-lK_{22}, & \ldots, & -lK_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -lK_{n1}, & -lK_{n2}, & \ldots, & 1-lK_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D\left(l, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = \begin{vmatrix} 0 & x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ y_1, & 1-lK_{11}, & -lK_{12}, & \ldots, & -lK_{1n} \\ y_2, & -lK_{21}, & 1-lK_{22}, & \ldots, & -lK_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n, & -lK_{n1}, & -lK_{n2}, & \ldots, & 1-lK_{nn} \end{vmatrix},$$

deren erste die Diskriminante der quadratischen Form

$$[x, x] - lKxx$$

ist. Bezeichnen wir mit $D\left(l, \begin{matrix} x \\ Ky \end{matrix}\right)$ diejenige Determinante, die aus $D\left(l, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)$ entsteht, wenn man darin allgemein y_p durch

$$Ky_p = K_{p1}y_1 + K_{p2}y_2 + \cdots + K_{pn}y_n$$

ersetzt, so gilt, wie leicht ersichtlich ist, identisch in x, y und l die Gleichung:

$$(3) \qquad d(l)[x, y] + D\left(l, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) - lD\left(l, \begin{matrix} x \\ Ky \end{matrix}\right) = 0.$$

Unser Problem bestand nun darin aus den Gleichungen (1) oder (2) die n Unbekannten $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ zu ermitteln, d. h. eine Linearform

$$[\varphi, y] = \varphi_1 y_1 + \varphi_2 y_2 + \cdots + \varphi_n y_n$$

zu finden, die identisch in y die Gleichung

$$[f, y] = [\varphi, y] - l[K\varphi, y]$$

erfüllt. Da wegen

$$K_{pq} = K_{qp}$$

notwendig

$$[K\varphi, y] = [\varphi, Ky]$$

ausfällt, so ist die zu erfüllende Gleichung mit der Gleichung

$$[f, y] = [\varphi, y] - l[\varphi, Ky]$$

gleichbedeutend und diese Gleichung wird, wie aus (3) unmittelbar einleuchtet, durch die Formel:

$$(4) \qquad [\varphi, y] = -\frac{D\left(l, \begin{matrix} f \\ y \end{matrix}\right)}{d(l)}$$

gelöst. Wenn also der Parameterwert l so beschaffen ist, daß $d(l) \neq 0$ ausfällt, so sind die Coefficienten der Linearform (4) die gesuchten Werte der Unbekannten $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Bekanntlich sind die Wurzeln der Gleichung

$$d(l) = 0$$

sämtlich reell; wir bezeichnen sie mit

$$l^{(1)}, l^{(2)}, \ldots, l^{(n)}$$

und nehmen an, daß sie von einander verschieden sind.

Bedeuten $d_{11}(l), \ldots, d_{nn}(l)$ die Unterdeterminanten der Determinante $d(l)$ in Bezug auf ihre n Diagonalelemente und ist $d'(l)$ die Ableitung von $d(l)$ nach l, so gilt identisch in l die Gleichung

$$d_{11}(l) + \cdots + d_{nn}(l) = n d(l) - l d'(l)$$

und hieraus folgt für $l = l^{(h)}$

(5) $$d_{11}(l^{(h)})+\cdots+d_{nn}(l^{(h)}) = -l^{(h)}d'(l^{(h)}).$$

Da unserer Annahme zufolge $d'(l^{(h)})$ nicht Null sein kann, so sind auch die links stehenden Unterdeterminanten gewiß nicht sämtlich Null, d. h. die homogenen Gleichungen

(6) $$\begin{gathered} \varphi_1 - lK\varphi_1 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n - lK\varphi_n = 0 \end{gathered}$$

besitzen für $l = l^{(h)}$ ein gewisses Lösungssystem

$$\varphi_1 = \varphi_1^{(h)}, \ldots, \varphi_n = \varphi_n^{(h)},$$

das bis auf einen allen diesen n Größen gemeinsamen Factor eindeutig bestimmt ist. Da wegen (3) die Coefficienten von $y_1, \ldots, y_n$ in dem Ausdruck

$$D\left(l^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)$$

unabhängig von den Werten $x_1, \ldots x_n$ Lösungen der homogenen Gleichungen (6) sein müssen, so gilt der Ansatz

$$D\left(l^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = [\psi^{(h)}, x][\varphi^{(h)}, y],$$

wo der erste Faktor rechts eine lineare Form in $x_1, \ldots, x_n$ bedeutet. Hieraus folgt wegen der Symmetrie des Ausdrucks linker Hand bei Vertauschung von x mit y

$$D\left(l^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = C[\varphi^{(h)}, x][\varphi^{(h)}, y],$$

wo unter C eine von x, y unabhängige Constante zu verstehen ist, und wenn wir den vorhin erwähnten gemeinsamen Faktor geeignet gewählt denken, so finden wir

(7) $$D\left(l^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = \pm[\varphi^{(h)}, x][\varphi^{(h)}, y].$$

Aus dieser Gleichung schließen wir durch Vergleich der Coefficienten der Producte

$$x_1 y_1, \ldots, x_n y_n$$

auf beiden Seiten die speciellere Formel

(8) $$d_{11}(l^{(h)})+\cdots+d_{nn}(l^{(h)}) = \mp[\varphi^{(h)}, \varphi^{(h)}].$$

und wegen (5) ist somit

(9) $$[\varphi^{(h)}, \varphi^{(h)}] = \pm l^{(h)} d'(l^{(h)}), \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

und sodann nach (7)

(10) $$\frac{D\left(l^{(h)}, \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)}{l^{(h)} d'(l^{(h)})} = \frac{[\varphi^{(h)}, x][\varphi^{(h)}, y]}{[\varphi^{(h)}, \varphi^{(h)}]}, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Gleichung (9) zeigt an, daß in den Gleichungen (7), (8) das obere bez. das untere Vorzeichen auf der rechten Seite zu nehmen ist, je nachdem $l^{(h)} d'(l^{(h)})$ positiv oder negativ ausfällt. Die Gleichungen (6) schreiben wir als Identität in x, wie folgt

(11) $$[\varphi^{(h)}, x] = l^{(h)}[\varphi^{(h)}, Kx]$$

und entnehmen daraus, weil $l^{(h)}$ und $l^{(k)}$ bei ungleichen Indices verschieden sind, die Beziehung

$$[\varphi^{(h)}, \varphi^{(k)}] = 0, \qquad (h \neq k).$$

Um endlich den Zusammenhang mit der Theorie der orthogonalen Transformation der quadratischen Form zu erhalten, gehen wir von dem Ausdruck

$$\frac{D\left(l, \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)}{d(l)}$$

aus. Da der Zähler eine Function $(n-1)$-ten Grades in l und der Nenner vom $n$ten Grade in l ist, so erhalten wir nach den Regeln der Partialbruchentwickelung unter Benutzung von (10)

$$\frac{D\left(l, \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)}{d(l)} = \frac{D\left(l^{(1)}, \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)}{d'(l^{(1)})} \frac{1}{l-l^{(1)}} + \cdots + \frac{D\left(l^{(n)}, \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)}{d'(l^{(n)})} \frac{1}{l-l^{(n)}}$$
$$= \frac{[\varphi^{(1)}, x][\varphi^{(1)}, y]}{[\varphi^{(1)}, \varphi^{(1)}]} \frac{l^{(1)}}{l-l^{(1)}} + \cdots + \frac{[\varphi^{(n)}, x][\varphi^{(n)}, y]}{[\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)}]} \frac{l^{(n)}}{l-l^{(n)}},$$

eine Formel, die identisch in x, y, l erfüllt ist. Für $l = 0$ gehen hieraus die Formeln

(12) $$[x, y] = \frac{D\left(l^{(1)}, \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)}{l^{(1)} d'(l^{(1)})} + \cdots + \frac{D\left(l^{(n)}, \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)}{l^{(n)} d'(l^{(n)})}$$

(13) $$= \frac{[\varphi^{(1)}, x][\varphi^{(1)}, y]}{[\varphi^{(1)}, \varphi^{(1)}]} + \cdots + \frac{[\varphi^{(n)}, x][\varphi^{(n)}, y]}{[\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)}]}$$

hervor. Setzen wir hier an Stelle von y die lineare Combination Ky, so erhalten wir mit Rücksicht auf (11) die Identität

$$(14)\quad Kxy = [Kx, y] = [x, Ky] = \frac{D\left(l^{(1)}, \frac{x}{y}\right)}{(l^{(1)})^2\, d'(l^{(1)})} + \cdots + \frac{D\left(l^{(n)}, \frac{x}{y}\right)}{(l^{(n)})^2\, d'(l^{(n)})}$$

$$(15)\quad = \frac{[\varphi^{(1)}, x][\varphi^{(1)}, y]}{l^{(1)}[\varphi^{(1)}, \varphi^{(1)}]} + \cdots + \frac{[\varphi^{(n)}, x][\varphi^{(n)}, y]}{l^{(n)}[\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)}]}$$

Wir fügen noch die besonderen Formeln hinzu, die aus den beiden letzteren durch Gleichsetzen der x mit den y hervorgehen:

$$(16)\quad [x, x] = \frac{D\left(l^{(1)}, \frac{x}{x}\right)}{l^{(1)}\, d'(l^{(1)})} + \cdots + \frac{D\left(l^{(n)}, \frac{x}{x}\right)}{l^{(n)}\, d'(l^{(n)})}$$

$$= \frac{[\varphi^{(1)}, x]^2}{[\varphi^{(1)}, \varphi^{(1)}]} + \cdots + \frac{[\varphi^{(n)}, x]^2}{[\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)}]}$$

$$(17)\quad Kxx = \frac{D\left(l^{(1)}, \frac{x}{x}\right)}{(l^{(1)})^2\, d'(l^{(1)})} + \cdots + \frac{D\left(l^{(n)}, \frac{x}{x}\right)}{(l^{(n)})^2\, d'(l^{(n)})}$$

$$= \frac{[\varphi^{(1)}, x]^2}{l^{(1)}[\varphi^{(1)}, \varphi^{(1)}]} + \cdots + \frac{[\varphi^{(n)}, x]^2}{l^{(n)}[\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)}]}.$$

II.

Lösung des transcendenten Problems.

Wir erinnern an die Bedeutung der Größen K_{pq}, wie sie am Anfange von Abschnitt I aus der Funktion $K(s,t)$ gebildet worden sind und nehmen an, daß $K(s, t)$ eine symmetrische *stetige* Funktion der Variabeln s, t in den betrachteten Intervallen 0 bis 1 sein möge. Unsere Methode erheischt die strenge Durchführung des Grenzüberganges für $n = \infty$. Der in Abschnitt I zunächst erledigten algebraischen Aufgabe entspricht das transcendente Problem, die Integralgleichung zweiter Art

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_0^1 K(s, t)\, \varphi(t)\, dt,$$

aufzulösen. Wir beschränken uns in diesem Abschnitt II im wesentlichen darauf, nach unserer Methode die zur Auflösung der Integralgleichung nötigen Formeln zu gewinnen, wie sie von Fredholm zuerst angegeben worden sind.

Entwickeln wir $d(l)$ nach Potenzen von l, wie folgt:

$$d(l) = 1 - d_1 l + d_2 l^2 - \cdots \pm d_n l^n,$$

so ist, wenn h irgend einen der Indices 1, 2, ..., n bedeutet,

$$d_h = \sum_{(p_1, p_2, \cdots, p_h)} \begin{vmatrix} K_{p_1 p_1} & K_{p_1 p_2} & \cdots & K_{p_1 p_h} \\ K_{p_2 p_1} & K_{p_2 p_2} & \cdots & K_{p_2 p_h} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{p_h p_1} & K_{p_h p_2} & \cdots & K_{p_h p_h} \end{vmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_h \\ p_1, p_2, \cdots, p_h = 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}$$

Die Summe rechter Hand besteht aus $\binom{n}{h}$ Determinanten; nach einem bekannten Satze [1]) überschreitet der absolute Wert einer jeden Determinante gewiß nicht die Grenze $\sqrt{h^h}\, K^h$, wo K das Maximum der absoluten Beträge der Funktionswerte $K(s, t)$ bedeutet. Hieraus entnehmen wir

$$|d_h| \leqq \binom{n}{h} \sqrt{h^h}\, K^h \leqq \frac{\sqrt{h^h}}{h!} (nK)^h \leqq \left(\frac{neK}{\sqrt{h}}\right)^h$$

d. h. es ist

$$\frac{|d_h|}{n^h} \leqq \left(\frac{eK}{\sqrt{h}}\right)^h. \tag{18}$$

Andererseits finden wir leicht, wenn h festgehalten wird, in der Grenze bei unendlich wachsendem n

$$\underset{n=\infty}{L} \frac{d_h}{n^h} = \delta_h, \tag{19}$$

wo δ_h die Bedeutung eines h-fachen Integrales hat:

$$\delta_h = \frac{1}{h!} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \begin{vmatrix} K(s_1, s_1), & K(s_1, s_2), & \cdots, & K(s_1, s_h) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K(s_h, s_1), & K(s_h, s_2), & \cdots, & K(s_h, s_h) \end{vmatrix} ds_1 \cdots ds_h.$$

Aus (18) und (19) folgt auch

$$\left|\delta_h\right| \leqq \left(\frac{eK}{\sqrt{h}}\right)^h. \tag{20}$$

Wir führen nun die von Fredholm zuerst angegebene und wegen (20) beständig convergente Potenzreihe

$$\delta(\lambda) = 1 - \delta_1 \lambda + \delta_2 \lambda^2 - \delta_3 \lambda^3 + \cdots$$

ein und stellen dann folgenden Hilfssatz auf:

Hilfssatz 1. Der Ausdruck $d\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ convergirt bei unendlich wachsendem n gegen $\delta(\lambda)$ und zwar ist diese Convergenz eine gleichmäßige für alle Werte von λ, deren absoluter Betrag unterhalb einer beliebig gewählten positiven Grenze Λ gelegen

1) Hadamard, Bulletin des sciences mathématiques (2) XVII (1893).

ist. In demselben Sinne convergirt der Ausdruck $\frac{1}{n} d'\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ gegen $\delta'(\lambda)$.

Um diesen Hilfssatz zu beweisen, nehmen wir im Gegensatz zu demselben an, es existire eine positive Größe ε derart, daß für unendlich viele ganzzahlige n und zugehörige Werte von λ mit absoluten Beträgen unterhalb $\varLambda$ stets

$$\left| d\left(\frac{\lambda}{n}\right) - \delta(\lambda) \right| > \varepsilon$$

ausfällt. Nunmehr wählen wir die ganze Zahl m so groß, daß folgende Bedingungen erfüllt sind: es soll für alle λ, deren absoluter Betrag unterhalb $\varLambda$ liegt,

$$(21) \qquad |\delta_{m+1}\lambda^{m+1} - \delta_{m+2}\lambda^{m+2} + \cdots| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

sein; ferner sollen die Ungleichungen

$$(22) \qquad m > (2eK\varLambda)^2$$

$$(23) \qquad \frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{3}$$

erfüllt sein; dann ist gewiß im Hinblick auf (18) und (22) für jedes n auch

$$d\left(\frac{\lambda}{n}\right) = 1 - \frac{d_1}{n}\lambda + \cdots \pm \frac{d_m}{n^m}\lambda^m \mp \frac{d_{m+1}}{n^{m+1}}\lambda^{m+1} \pm \cdots \pm \frac{d_n}{n^n}\lambda^n$$

$$= 1 - \frac{d_1}{n}\lambda + \cdots \pm \frac{d_m}{n^m}\lambda^m \pm \frac{\vartheta}{2^m} \qquad (0 \leq \vartheta \leq 1)$$

oder wegen (23)

$$(24) \qquad \left| d\left(\frac{\lambda}{n}\right) - \left(1 - \frac{d_1}{n}\lambda + \cdots \pm \frac{d_m}{n^m}\lambda^m\right) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Nachdem die ganze Zahl m in dieser Art bestimmt worden ist, wählen wir die ganze Zahl n so groß, daß

$$(25) \qquad \left| \left(1 - \frac{d_1}{n}\lambda + \frac{d_2}{n^2}\lambda^2 - \cdots \pm \frac{d_m}{n^m}\lambda^m\right) - \left(1 - \delta_1\lambda + \delta_2\lambda^2 - \cdots \pm \delta_m\lambda^m\right) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ausfällt; wegen der Gleichung (19) ist eine solche Bestimmung von n gewiß möglich. Die Ungleichungen (21), (24), (25) zeigen nun, daß der Unterschied zwischen $d\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ und $\delta(\lambda)$ absolut ge-

nommen weniger als s betragen muß; diese Folgerung widerspricht unserer Annahme und damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Um zu erkennen, wie sich für die Determinante $D\left(l, \begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)$ der Grenzübergang zum transcendenten Problem gestaltet, verstehen wir unter $x(s)$ und $y(s)$ zwei willkürliche stetige Funktionen der reellen Variabeln s im Intervall 0 bis 1 und setzen allgemein

$$x_p = x\left(\frac{p}{n}\right),\ y_p = y\left(\frac{p}{n}\right)$$

in jene Determinante $D\left(l, \begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)$ ein. Sodann entwickeln wir dieselbe nach Potenzen von l, wie folgt:

$$D\left(l, \begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right) = D_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - D_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} l + D_3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} l^2 - \cdots \pm D_n\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} l^{n-1}$$

und finden leicht in der Grenze bei unendlich wachsendem n, wenn h festbleibt,

$$\underset{n=\infty}{L} \frac{D_h\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}{n^h} = \Delta_h\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},$$

wo $\Delta_h\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ die Bedeutung eines h-fachen Integrales hat:

$$\Delta_h\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{h!}\int_0^1 \cdots \int_0^1 \begin{vmatrix} 0, & x(s_1), & x(s_2), & \ldots & x(s_h) \\ y(s_1), & K(s_1, s_1), & K(s_1, s_2), & \ldots, & K(s_1, s_h) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y(s_h), & K(s_h, s_1), & K(s_h, s_2), & \ldots, & K(s_h, s_h) \end{vmatrix} ds_1 \ldots ds_h.$$

Führen wir nun die beständig convergente Potenzreihe ein:

$$\Delta\left(\lambda, \begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right) = \Delta_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \Delta_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\lambda + \Delta_3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\lambda^2 - \ldots,$$

so folgt durch einen entsprechenden Beweis wie vorhin der folgende Hilfssatz:

Hilfssatz 2. Der Ausdruck $\frac{1}{n} D\left(\frac{\lambda}{n}, \begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)$ convergirt bei unendlich wachsendem n gegen $\Delta\left(\lambda, \begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)$ und zwar ist diese Convergenz eine gleichmäßige für alle λ, deren absoluter Betrag unterhalb einer beliebig gewählten positiven Grenze Λ gelegen ist.

Wie man sieht, ist $\Delta\left(\lambda, \begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)$ eine Potenzreihe in λ, deren Coefficienten noch von den willkürlichen Funktionen $x(s), y(s)$ abhängen.

Wir gehen dazu über, in der Formel (3) den Grenzübergang für $n = \infty$ zu vollziehen.

Bedenken wir, daß zufolge der eingangs eingeführten Abkürzungen

$$Ky_p = K_{p1} y_1 + K_{p2} y_2 + \cdots + K_{pn} y_n$$
$$= K\left(\frac{p}{n}, \frac{1}{n}\right) y\left(\frac{1}{n}\right) + K\left(\frac{p}{n}, \frac{2}{n}\right) y\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + K\left(\frac{p}{n}, \frac{n}{n}\right) y\left(\frac{n}{n}\right)$$

ist, so erhalten wir durch das nämliche Verfahren, das zu den Hilfssätzen 1 und 2 führte, die Formel

$$\underset{n=\infty}{L} \frac{\lambda}{n^2} D\left(\frac{\lambda}{n}, \frac{x}{Ky}\right) = \underset{n=\infty}{L} \frac{\lambda}{n} D\left(\frac{\lambda}{n}, \frac{x}{\frac{1}{n} Ky}\right)$$
$$= \lambda \left\{ \Delta\left(\lambda, \frac{x}{\bar{y}}\right) \right\}_{\bar{y}(s) = \int_0^1 K(s,t)\, y(t)\, dt}$$
$$= \lambda \int_0^1 \left\{ \Delta\left(\lambda, \frac{x}{\bar{y}}\right) \right\}_{\bar{y}(s) = K(s,t)} \cdot y(t)\, dt.$$

Setzen wir daher in der Formel (3) $l = \frac{\lambda}{n}$ ein und dividiren dieselbe durch n, so liefert der Grenzübergang für unendlich wachsende n:

$$(26) \quad \delta(\lambda) \int_0^1 x(s)\, y(s)\, ds + \Delta\left(\lambda, \frac{x}{y}\right) - \lambda \int_0^1 \left\{ \Delta\left(\lambda, \frac{x}{\bar{y}}\right) \right\}_{\bar{y}(s) = K(s,t)} y(t)\, dt = 0.$$

Diese Formel ist eine Identität in λ und gilt, wenn $x(s)$, $y(s)$ irgend welche stetige Funktionen ihres Argumentes sind.

Setzen wir in dieser Formel (26)

$$x(r) = K(r, s) \text{ und } y(r) = K(r, t)$$

ein und benutzen die Abkürzung

$$(27) \qquad \Delta(\lambda; s, t) = \lambda \left\{ \Delta\left(\lambda, \frac{x}{y}\right) \right\}_{\substack{x(r) = K(r,s) \\ y(r) = K(r,t)}} - \delta(\lambda)\, K(s, t),$$

so geht (26) über in

$$(28) \quad \delta(\lambda)\, K(s, t) + \Delta(\lambda; s, t) - \lambda \int_0^1 \Delta(\lambda; s, r)\, K(t, r)\, dr = 0.$$

Setzt man endlich

$$\mathsf{K}(s, t) = -\frac{\Delta(\lambda; s, t)}{\delta(\lambda)},$$

so erhält man

$$K(s,t) = \mathsf{K}(s,t) - \lambda \int_0^1 \mathsf{K}(s,r)\, K(t,r)\, dr. \tag{29}$$

Im Vorstehenden sind $\Delta(\lambda; s, t)$ und $\mathsf{K}(s, t)$ symmetrische Funktionen der reellen Veränderlichen s, t, die noch den Parameter λ enthalten; die Formeln (28) und (29) gelten identisch in s, t und λ.

Die Funktion $\mathsf{K}(s,t)$ heiße die *lösende Funktion für den Kern* $K(s,t)$; mittelst derselben läßt sich nämlich die zu Grunde gelegte Integralgleichung zweiter Art

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_0^1 K(s,t)\, \varphi(t)\, dt$$

auflösen, wie folgt:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_0^1 \mathsf{K}(s,t)\, f(t)\, dt.$$

Man erkennt dies sofort durch Einführung der rechten Seite der letzten Formel in die voranstehende Integralgleichung; zugleich erkennen wir hieraus die Eindeutigkeit der Auflösung der Integralgleichung zweiter Art für solche λ, die nicht Nullstellen von $\delta(\lambda)$ sind.

Für $\Delta(\lambda; s, t)$ erhalten wir aus den obigen Angaben die Reihenentwickelung

$$\Delta(\lambda; s, t) = -K(s,t) + \Delta_1(s,t)\,\lambda - \Delta_2(s,t)\,\lambda^2 + - \cdots,$$

wo

$$\Delta_h(s,t) = \frac{1}{h!} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \begin{vmatrix} K(s,t), & K(s,s_1), & \ldots, & K(s, s_h) \\ K(s_1,t), & K(s_1,s_1), & \ldots, & K(s_1, s_h) \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ K(s_h,t), & K(s_h,s_1), & \ldots, & K(s_h, s_h) \end{vmatrix} ds_1 \ldots ds_h$$

bedeutet. Aus dieser Formel folgt leicht die Identität in λ:

$$\delta'(\lambda) = \int_0^1 \Delta(\lambda; s, s)\, ds. \tag{30}$$

Die so erhaltenen Formeln sind nichts anderes als die bereits mehrmals erwähnten Formeln von Fredholm.

III.

Das transcendente Problem, welches der orthogonalen Transformation der quadratischen Form in eine Quadratsumme entspricht.

Unsere wichtigste Aufgabe besteht darin, diejenigen algebraischen Untersuchungen in Abschnitt I, welche die orthogonale Transformation der quadratischen Form Kxx betreffen, durch Ausführung des Grenzüberganges für $n = \infty$ auf das transcendente Gebiet zu übertragen.

Zu dem Zwecke beweisen wir zunächst folgende Sätze über die Nullstellen von $\delta(\lambda)$.

Satz 1. *Die Funktion $\delta(\lambda)$ besitzt keine complexen Nullstellen.*

Zum Beweise nehmen wir im Gegenteil das Vorhandensein einer solchen Nullstelle an, schlagen dann um dieselbe als Mittelpunkt in der complexen λ-Ebene einen Kreis, auf dessen Peripherie und in dessen Inneres keine weitere Nullstelle von $\delta(\lambda)$ fällt und auf dessen Peripherie überdies $\delta'(\lambda)$ von Null verschieden ist. Da $d\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ nach Hilfssatz 1 für unendlich wachsendes n gleichmäßig gegen $\delta(\lambda)$ und $\frac{1}{n}d'\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ gegen $\delta'(\lambda)$ convergirt, so müßte für genügend große Werte von n auf der ganzen Peripherie jenes Kreises der Quotient $\frac{d\left(\frac{\lambda}{n}\right)}{\frac{1}{n}d'\left(\frac{\lambda}{n}\right)}$ sich von den Werten des Quotienten $\frac{\delta(\lambda)}{\delta'(\lambda)}$ um beliebig wenig unterscheiden und ebenso würde dann auch von der Unterschied der über die Kreisperipherie erstreckten Integrale

$$\int \frac{d\left(\frac{\lambda}{n}\right)}{\frac{1}{n}d'\frac{\lambda}{n}}\,d\lambda \text{ und } \int \frac{\delta(\lambda)}{\delta'(\lambda)}\,d\lambda$$

beliebig nahe an Null liegen; dies aber wäre unmöglich; denn das erste Integral hat den Werth Null, da die Nullstellen von $d\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ sämtlich reell sind, das letzte Integral dagegen wird derjenigen ganzen Zahl gleich, die die Vielfachheit der Nullstelle von $\delta(\lambda)$ im Kreismittelpunkt angiebt.

In ähnlicher Weise erkennen wir auf Grund der in Hilfssatz 1 angegebenen gleichmäßigen Convergenz auch folgende Thatsache:

Satz 2. Wir denken uns für jede der Gleichungen $d(l) = 0$ ihre n Wurzeln dem absoluten Betrage nach geordnet

$$l^{(1)}, \dots, l^{(n)}$$

derart, daß, wenn entgegengesetzt gleiche Wurzeln vorhanden sind, die positive vorangeht und überdies beim Vorhandensein mehrfacher Wurzeln jede so oft gesetzt werden soll, als ihre Vielfachheit beträgt. Ebenso ordne man die Nullstellen von $\delta(\lambda)$, soweit solche da sind: alsdann ist

$$\underset{n=\infty}{L}\, n l^{(1)} = \lambda^{(1)}, \quad \underset{n=\infty}{L}\, n l^{(2)} = \lambda^{(2)}, \quad \underset{n=\infty}{L}\, n l^{(3)} = \lambda^{(3)} \dots$$

Man darf jedoch aus Satz 2 keineswegs auf die Existenz von Nullstellen von $\delta(\lambda)$ schließen, da sehr wohl der Fall eintreten kann, daß bereits $nl^{(1)}$ für unendlich wachsendes n absolut über alle Grenzen zunimmt.

Wir führen hier noch folgende Bezeichnungen ein: die Nullstellen von $\delta(\lambda)$ mögen die *zum Kern $K(s,t)$ gehörigen Eigenwerte* heißen.

Unter $K(s,t)$ wurde bisher irgend eine symmetrische Funktion der reellen Veränderlichen s, t verstanden; wir machen nun in diesem Abschnitte III durchweg die Annahme, daß die zu $K(s,t)$ gehörige Funktion $\delta(\lambda)$ keine mehrfache Nullstelle besitzen möge, so daß für eine jede Wurzel der Gleichung $\delta(\lambda) = 0$ gewiß $\delta'(\lambda)$ von Null verschieden ausfällt.

Wir haben ferner zu beachten, daß die gegen Schluß des Abschnittes I entwickelte Transformationstheorie der quadratischen aus $K(s,t)$ gebildeten Form

$$Kxx = \sum_{p,q} K\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) x_p x_q \qquad (p, q = 1, 2 \ldots, n)$$

zur Voraussetzung hatte, daß die Determinante $d(l)$ keine mehrfache Nullstelle besitzt. Sollte nun für irgend welche Werte von n die zu $K(s,t)$ gehörige Determinante $d(l)$ eine mehrfache Nullstelle aufweisen, so verfahre man in folgender Weise: man denke sich für jeden solchen Wert von n an Stelle von $K(s,t)$ eine modificirte Funktion $\overline{K}(s,t)$ gesetzt, so daß die Nullstellen der entsprechend gebildeten Determinante $\overline{d}(l)$ für $\overline{K}(s,t)$ sämtlich einfach ausfallen; doch sollen die Werte der modificirten Funktion $\overline{K}(s,t)$ sich von denen des ursprünglichen Kerns $K(s,t)$ nur so wenig unterscheiden, daß für alle Werte der Variabeln s, t, für alle Indices h $(= 1, 2, \ldots, n$ und für alle Paare von stetigen Funktionen $x(s)$, $y(s)$ die Ungleichungen

$$\left| K(s,t) - \overline{K}(s,t) \right| < \frac{1}{n},$$

$$\left.\begin{aligned} \left| d_h - \overline{d}_h \right| &< 1, \\ \left| l^{(h)} - \overline{l}^{(h)} \right| &< \frac{1}{n^2}, \\ \left| D_h\binom{x}{y} - \overline{D}_h\binom{x}{y} \right| &< M(x) \cdot M(y) \end{aligned}\right\} \quad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

erfüllt sind; dabei bedeuten $\overline{d}_h$, $\overline{D}_h\binom{x}{y}$ die Coefficienten der ent-

sprechend für $\overline{K}(s,t)$ gebildeten Determinanten $\overline{d}(l)$, $\overline{D}\left(l, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)$, ferner $\overline{l}^{(h)}$ die entsprechenden Nullstellen von $\overline{d}(l)$ und $M(x)$, $M(y)$ sollen die Maxima der absoluten Werte der Funktionen $x(s)$ bez. $y(s)$ sein. Offenbar nähern sich dann die Ausdrücke

$$\overline{K}(s,t), \qquad \overline{d}\left(\frac{\lambda}{n}\right), \qquad \frac{1}{n}\overline{D}\left(\frac{\lambda}{n}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)$$

für unendlich wachsendes n gleichmäßig den Grenzen bez.

$$K(s,t), \qquad \delta(\lambda), \qquad \Delta\left(\lambda, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right),$$

d. h. den nämlichen Grenzen, wie die mittelst des nicht modificirten Kernes gebildeten Ausdrücke. Wir sind dadurch in den Stand gesetzt, auch diejenigen Formeln der in Abschnitt I entwickelten Theorie der quadratischen Form Kxx anzuwenden, zu deren Gültigkeit das Nichtvorhandensein mehrfacher Nullstellen von $d(l)$ eine notwendige Voraussetzung war. Obwohl wir in den fraglichen Fällen mit den modificirten Ausdrücken operiren müssen, wollen wir doch fortan bei unserer Darstellung der größeren Uebersicht halber die ursprünglichen Ausdrücke ohne die Querstriche beibehalten.

Es bezeichne $\lambda^{(h)}$ die h^{te} Nullstelle von $\delta(\lambda)$ unter Beachtung der S. 63 festgesetzten Reihenfolge; aus (26) folgt

$$(31) \qquad \Delta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = \lambda^{(h)}\int_0^1 \left\{\Delta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} x \\ \overline{y} \end{matrix}\right)\right\}_{\overline{y}(r)=K(r,t)} y(t)\,dt$$

und wegen der Symmetrie des Ausdruckes $\Delta\left(\lambda, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)$ in Bezug auf $x(s)$, $y(s)$ ist daher auch:

$$\Delta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = \lambda^{(h)}\int_0^1 \left\{\Delta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} \overline{x} \\ y \end{matrix}\right)\right\}_{\overline{x}(r)=K(r,s)} x(s)\,ds$$

und, wenn wir hierin $y(r) = K(r,t)$ einsetzen:

$$\left\{\Delta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)\right\}_{y(r)=K(r,t)} = \lambda^{(h)}\int_0^1 \left\{\Delta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} \overline{x} \\ y \end{matrix}\right)\right\}_{\substack{\overline{x}(r)=K(r,s) \\ y(r)=K(r,t)}} x(s)\,ds$$

oder im Hinblick auf (27)

$$(32) \qquad \left\{\Delta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)\right\}_{y(r)=K(r,t)} = \int_0^1 \Delta(\lambda^{(h)}; s,t)\,x(s)\,ds.$$

Aus (31) und (32) erhalten wir

$$\Delta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = \lambda^{(h)} \int_0^1 \int_0^1 \Delta(\lambda^{(h)}; s, t)\, x(s)\, y(t)\, ds\, dt. \tag{33}$$

Zugleich ergiebt sich, wenn wir in (32) $x(r) = K(r, s)$ einführen, im Hinblick auf (27)

$$\Delta(\lambda^{(h)}; s, t) = \lambda^{(h)} \int_0^1 \Delta(\lambda^{(h)}; r, t)\, K(r, s)\, dr; \tag{34}$$

Nunmehr bezeichne $l^{(h)}$ die h^{te} Nullstelle von $d(l)$ unter Beachtung der oben festgesetzten Reihenfolge. Wegen Formel (7) ist allgemein

$$D\left(l^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) D\left(l^{(h)}, \begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix}\right) = D\left(l^{(h)}, \begin{matrix} x \\ x^* \end{matrix}\right) D\left(l^{(h)}, \begin{matrix} y \\ y^* \end{matrix}\right)$$

und hieraus folgt in der Grenze für unendlich wachsendes n

$$\Delta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) \Delta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix}\right) = \Delta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} x \\ x^* \end{matrix}\right) \Delta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} y \\ y^* \end{matrix}\right)$$

wenn hierin x^*, y^* ebenso wie x, y stetige Funktionen ihres Argumentes vorstellen, und folglich im Hinblick auf (27)

$$\Delta(\lambda^{(h)}; s, t)\, \Delta(\lambda^{(h)}; s^*, t^*) = \Delta(\lambda^{(h)}; s, s^*)\, \Delta(\lambda^{(h)}; t, t^*). \tag{35}$$

Wegen (30) ist

$$\int_0^1 \Delta(\lambda^{(h)}; s, s)\, ds = \delta'(\lambda^{(h)}), \tag{36}$$

und da unserer Annahme zufolge die Nullstellen von $\delta(\lambda)$ sämtlich einfach sind, so fällt $\delta'(\lambda^{(h)})$ von Null verschieden aus und folglich ist auch gewiß $\Delta(\lambda^{(h)}; s, s)$ nicht identisch für alle Werte von s Null; es sei s^* ein solcher specieller Wert, daß $\Delta(\lambda^{(h)}; s^*, s^*)$ von Null verschieden ausfällt. Alsdann setzen wir

$$\varphi^{(h)}(s) = \left| \sqrt{\frac{\lambda^{(h)}}{\Delta(\lambda^{(h)}; s^*, s^*)}} \right| \Delta(\lambda^{(h)}; s, s^*); \tag{37}$$

dadurch ist $\varphi^{(h)}(s)$ als eine stetige Funktion der Variabeln s definirt: sie heiße die *zu dem Eigenwerte* $\lambda^{(h)}$ *gehörige Eigenfunktion*. Wir gewinnen aus (35), (37), wenn wir noch t^* durch s^* ersetzen, die Gleichung

$$\lambda^{(h)} \Delta(\lambda^{(h)}; s, t) = \pm \varphi^{(h)}(s)\, \varphi^{(h)}(t). \tag{38}$$

Mit Hülfe von (36) folgt mithin

$$\int_0^1 (\varphi^{(h)}(s))^2\, ds = \pm \lambda^{(h)} \delta'(\lambda^{(h)}),$$

und daraus erkennen wir, daß in den beiden letzten Gleichungen

das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nach dem $\lambda^{(h)}\delta'(\lambda^{(h)})$ positiv oder negativ ausfällt.

Unter Hinzuziehung von (33) leiten wir noch die Formeln ab:

$$\Delta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = \pm \int_0^1 \varphi^{(h)}(s)\, x(s)\, ds \cdot \int_0^1 \varphi^{(h)}(s)\, y(s)\, ds$$

und

$$\frac{\Delta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)}{\lambda^{(h)}\delta'(\lambda^{(h)})} = \frac{\int_0^1 \varphi^{(h)}(s)\, x(s)\, ds \cdot \int_0^1 \varphi^{(h)}(s)\, y(s)\, ds}{\int_0^1 (\varphi^{(h)}(s))^2 ds}.$$

Endlich ergiebt die Formel (34) in Verbindung mit (38) nach Weglassung des Faktors $\varphi^{(h)}(t)$

$$\varphi^{(h)}(s) = \lambda^{(h)} \int_0^1 K(s, t)\, \varphi^{(h)}(t)\, dt$$

und hieraus leiten wir, wenn $\varphi^{(k)}(s)$ die zu einem anderen Eigenwerte $\lambda^{(k)}$ gehörige Eigenfunktion bezeichnet, sofort die Gleichung ab:

$$\int_0^1 \varphi^{(h)}(s)\, \varphi^{(k)}(s)\, ds = 0, \quad (h \neq k).$$

Oftmals ist es im Interesse einer kürzeren Schreibweise vorzuziehen, an Stelle der Eigenfunktionen $\varphi^{(h)}(s)$ die Funktionen

$$\psi^{(h)}(s) = \frac{\varphi^{(h)}(s)}{\left|\sqrt{\int_0^1 (\varphi^{(h)}(s))^2 ds}\right|}$$

einzuführen: dieselben mögen *normirte Eigenfunktionen* oder, wenn ein Mißverständnis ausgeschlossen erscheint, *Eigenfunktionen* schlechtweg heißen: sie genügen den Gleichungen

(39) $$\frac{\Delta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)}{\lambda^{(h)}\delta'(\lambda^{(h)})} = \int_0^1 \psi^{(h)}(s)\, x(s)\, ds \cdot \int_0^1 \psi^{(h)}(s)\, y(s)\, ds,$$

$$\int_0^1 (\psi^{(h)}(s))^2\, ds = 1,$$

$$\int_0^1 \psi^{(h)}(s)\, \psi^{(k)}(s)\, ds = 0, \qquad (h \neq k)$$

(40) $$\psi^{(h)}(s) = \lambda^{(h)} \int_0^1 K(s, t)\, \psi^{(h)}(t)\, dt.$$

Nunmehr haben wir die Vorbereitungen beendet, um dieje-

nige Fragestellung zu erledigen, welche aus dem algebraischen Problem der orthogonalen Transformation der quadratischen Form beim Grenzübergange für unendlich wachsendes n entsteht.

Wir haben am Schluß des Abschnitt I die Formeln erhalten:

$$[x, x] = \frac{D\left(l^{(1)}, \begin{matrix} x \\ x \end{matrix}\right)}{l^{(1)} d'(l^{(1)})} + \frac{D\left(l^{(2)}, \begin{matrix} x \\ x \end{matrix}\right)}{l^{(2)} d'(l^{(2)})} + \cdots + \frac{D\left(l^{(n)}, \begin{matrix} x \\ x \end{matrix}\right)}{l^{(n)} d'(l^{(n)})}$$

$$\frac{D\left(l^{(h)}, \begin{matrix} x \\ x \end{matrix}\right)}{l^{(h)} d'(l^{(h)})} = \frac{[\varphi^{(h)}, x]^2}{[\varphi^{(h)}, \varphi^{(h)}]}, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Die letzte Formel zeigt, daß jedes Glied der Summe rechter Hand im Ausdruck für $[x, x]$ positiv ausfällt; mithin gilt, wenn m irgend eine ganze Zahl unterhalb n bedeutet, die Ungleichung:

$$(41) \qquad \frac{D\left(l^{(m+1)}, \begin{matrix} x \\ x \end{matrix}\right)}{l^{(m+1)} d'(l^{(m+1)})} + \frac{D\left(l^{(m+2)}, \begin{matrix} x \\ x \end{matrix}\right)}{l^{(m+2)} d'(l^{(m+2)})} + \cdots + \frac{D\left(l^{(n)}, \begin{matrix} x \\ x \end{matrix}\right)}{l^{(n)} d'(l^{(n)})} \leqq [x, x].$$

Da wegen

$$\left| [\varphi^{(h)}, x] [\varphi^{(h)}, y] \right| \leqq \tfrac{1}{2} \left([\varphi^{(h)}, x]^2 + [\varphi^{(h)}, y]^2 \right)$$

notwendig

$$\left| \frac{D\left(l^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)}{l^{(h)} d'(l^{(h)})} \right| \leqq \tfrac{1}{2} \left(\frac{D\left(l^{(h)}, \begin{matrix} x \\ x \end{matrix}\right)}{l^{(h)} d'(l^{(h)})} + \frac{D\left(l^{(h)}, \begin{matrix} y \\ y \end{matrix}\right)}{l^{(h)} d'(l^{(h)})} \right)$$

ist, so folgt, indem wir (41) anwenden

$$\left| \frac{D\left(l^{(m+1)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)}{l^{(m+1)} d'(l^{(m+1)})} \right| + \left| \frac{D\left(l^{(m+2)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)}{l^{(m+2)} d'(l^{(m+2)})} \right| + \cdots + \left| \frac{D\left(l^{(n)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)}{l^{(n)} d'(l^{(n)})} \right| \leqq \tfrac{1}{2} \left([x, x] + [y, y] \right)$$

und mithin ist umsomehr die Summe der $n - m$ letzten Glieder auf der rechten Seite der Formel (14) absolut nicht größer als

$$\frac{1}{2 \left| l^{(m+1)} \right|} \left([x, x] + [y, y] \right);$$

demnach ist mit Rücksicht auf jene Formel (14) auch

$$(42) \qquad \left| Kxy - \frac{D\left(l^{(1)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)}{(l^{(1)})^2 d'(l^{(1)})} - \frac{D\left(l^{(2)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)}{(l^{(2)})^2 d'(l^{(2)})} - \cdots - \frac{D\left(l^{(m)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)}{(l^{(m)})^2 d'(l^{(m)})} \right|$$

$$\leqq \frac{1}{2 \left| l^{(m+1)} \right|} \left([x, x] + [y, y] \right).$$

In dieser Formel wollen wir, wie bereits früher geschehen ist,

$$K_{pq} = K\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) \qquad x_p = x\left(\frac{p}{n}\right), \; y_p = \left(\frac{p}{n}\right)$$

eingesetzt denken und sodann nach Division durch n^2, während m festbleibt, den Grenzübergang für $n = \infty$ ausführen. Berücksichtigen wir die Grenzgleichungen:

$$\underset{n=\infty}{L} \frac{1}{n^2} Kxy = \underset{n=\infty}{L} \frac{1}{n^2} \Sigma K\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) x_p y_q$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 K(s,t)\, x(s)\, y(t)\, ds\, dt$$

$$\underset{n=\infty}{L} \; n l^{(h)} = \lambda^{(h)}$$

$$\underset{n=\infty}{L} \frac{[x,x]}{n} = \int_0^1 (x(s))^2 ds, \qquad \underset{n=\infty}{L} \frac{[y,y]}{n} = \int_0^1 (y(s))^2 ds$$

und beachten wir, daß den Hilfssätzen 1 und 2 gemäß die Ausdrücke $\frac{1}{n} D\left(\frac{\lambda}{n}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)$ und $\frac{1}{n} d'\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ gleichmäßig für alle unterhalb einer festen Grenze liegenden λ gegen $\varDelta\left(\lambda, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)$ bez. $\delta'(\lambda)$ convergiren, so geht die Ungleichung (42) in die folgende über:

$$(43) \quad \left| \int_0^1 \int_0^1 K(s,t)\, x(s)\, y(t)\, ds\, dt - \frac{\varDelta\left(\lambda^{(1)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)}{(\lambda^{(1)})^2 \delta'(\lambda^{(1)})} - \frac{\varDelta\left(\lambda^{(2)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)}{(\lambda^{(2)})^2 \delta'(\lambda^{(2)})} - \cdots \right.$$

$$\left. - \frac{\varDelta\left(\lambda^{(m)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)}{(\lambda^{(m)})^2 \delta'(\lambda^{(m)})} \right| \leqq \frac{1}{2\,|\,\lambda^{(m+1)}\,|} \left(\int_0^1 (x(s))^2 ds + \int_0^1 (y(s))^2 ds \right).$$

Nunmehr benutzen wir die Thatsache, daß die Eigenwerte $\lambda^{(m)}$, falls es ihrer unendlich viele giebt, mit unendlich wachsendem m absolut genommen selbst über jede Grenze wachsen und erkennen dann mit Hilfe der Formel (39), indem wir noch statt der Integrationsgrenzen 0, 1 die allgemeineren Grenzen a, b einführen, folgendes grundlegende Theorem:

Theorem. Es sei der Kern $K(s,t)$ einer Integralgleichung zweiter Art

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\, \varphi(t)\, dt$$

eine symmetrische stetige Funktion von s, t; ferner seien $\lambda^{(h)}$ die zu $K(s,t)$ gehörigen Eigenwerte und $\psi^{(h)}(s)$ die zugehörigen normirten Eigenfunktionen; endlich seien $x(s)$, $y(s)$ irgend welche stetige Funktionen von s: alsdann gilt die Entwickelung

$$(44)\quad \int_a^b\int_a^b K(s,t)\,x(s)\,y(t)\,ds\,dt = \frac{1}{\lambda^{(1)}}\int_a^b \psi^{(1)}(s)\,x(s)\,ds\cdot\int_a^b \psi^{(1)}(s)\,y(s)\,ds + \frac{1}{\lambda^{(2)}}\int_a^b \psi^{(2)}(s)\,x(s)\,ds\cdot\int_a^b \psi^{(2)}(s)\,y(s)\,ds + \cdots,$$

wobei die Reihe rechter Hand absolut und gleichmäßig für alle Funktionen $x(s)$, $y(s)$ konvergirt, für welche die Integrale

$$\int_a^b (x(s))^2 ds\,,\qquad \int_a^b (y(s))^2 ds$$

unterhalb einer festen endlichen Grenze bleiben.

Dies ist dasjenige Theorem, das für $x(s) = y(s)$ dem in I genannten algebraischen Satze über die Transformation einer quadratischen Form in die Quadratsumme von linearen Formen entspricht.

Einige unmittelbare Folgerungen dieses Theorems sind folgende:

Die nämlichen Eigenwerte $\lambda^{(h)}$ und Eigenfunktionen $\psi^{(h)}(s)$ können nicht noch zu einem anderen von $K(s,t)$ verschiedenen Kern gehören; *die $\lambda^{(h)}$ und $\psi^{(h)}(s)$ bestimmen vielmehr in ihrer Gesammtheit den Kern $K(s,t)$ vollständig.*

Setzt man in die Formel des Theorems an Stelle von $y(t)$ das Integral $\int_a^b K(r,t)\,y(r)\,dr$ ein, so entsteht mit Rücksicht auf (40) die folgende Formel:

$$\int_a^b\int_a^b KK(s,t)\,x(s)\,y(t)\,ds\,dt = \frac{1}{(\lambda^{(1)})^2}\int_a^b \psi^{(1)}(s)\,x(s)\,ds\cdot\int_a^b \psi^{(1)}(s)\,y(s)\,ds + \frac{1}{(\lambda^{(2)})^2}\int_a^b \psi^{(2)}(s)\,x(s)\,ds\cdot\int_a^b \psi^{(2)}(s)\,y(s)\,ds + \cdots,$$

wobei zur Abkürzung

$$KK(s,t) = \int_a^b K(s,r)\,K(t,r)\,dr$$

gesetzt ist; diese Funktion $KK(s,t)$ möge der *aus* $K(s,t)$

zweifach zusammengesetzte Kern heißen. Aus Formel (44) erkennen wir, daß der aus $K(s, t)$ zweifach zusammengesetzte Kern dieselben Eigenfunktionen besitzt, wie $K(s, t)$, während die Eigenwerte die Quadrate der zu $K(s, t)$ gehörigen Eigenwerte sind.

Es möge hier noch eine Verallgemeinerung der Formel (29) Platz finden. Bringen wir nämlich die Abhängigkeit der lösenden Funktion $\mathsf{K}(s, t)$ vom Parameter λ zum Ausdruck, indem wir für dieselbe die Bezeichnung $\mathsf{K}(\lambda; s, t)$ anwenden und setzen wir zur vorübergehenden Abkürzung

$$F(s, t) = \mathsf{K}(\lambda; s, t) - \mathsf{K}(\mu; s, t) + (\mu - \lambda) \int_a^b \mathsf{K}(\lambda; r, s) \mathsf{K}(\mu; r, t)\, dr,$$

so erhalten wir mittelst wiederholter Anwendung von (29) die Identität

$$F(s, t) - \lambda \int_a^b F(r, s)\, K(r, t)\, dr = 0$$

und diese zeigt zu Folge einer Bemerkung am Schluß von II, daß $F(s, t)$ jedenfalls für jeden solchen Wert von λ verschwindet, der von den Eigenwerten $\lambda^{(h)}$ verschieden ausfällt. Daher ist $F(s, t)$ notwendig für alle Argumente λ, μ, s, t identisch Null, d. h. es gilt die allgemeine Formel

$$(45) \qquad \mathsf{K}(\lambda; s. t) - \mathsf{K}(\mu; s, t) = (\lambda - \mu) \int_a^b \mathsf{K}(\lambda; r, s)\, \mathsf{K}(\mu; r, t)\, dr.$$

Diese Formel können wir auch in der Gestalt schreiben:

$$(46) \qquad \mathsf{K}(\mu; s, t) = \mathsf{K}(\lambda + \mu; s, t) - \lambda \int_a^b \mathsf{K}(\lambda + \mu; r, s)\, \mathsf{K}(\mu; r, t)\, dr$$

hieraus folgt, daß, wenn wir $\mathsf{K}(\mu; s, t)$ als Kern für eine Integralgleichung zweiter Art nehmen, die zugehörige lösende Funktion notwendig $\mathsf{K}(\lambda + \mu; s, t)$ ist. Zugleich finden wir

$$\int_a^b \psi^{(h)}(t)\, \mathsf{K}(\lambda; s, t)\, dt = \frac{\psi^{(h)}(s)}{\lambda^{(h)} - \lambda}$$

und erkennen hieraus, daß zum Kern $\mathsf{K}(\mu; s, t)$ dieselben Eigenfunktionen wie zum Kern $K(s, t)$ gehören, während die zugehörigen Eigenwerte die Größen $\lambda^{(h)} - \mu$ sind.

IV.

Entwickelung einer willkürlichen Funktion nach Eigenfunktionen.

Die erste wichtige Anwendung des in Abschnitt III bewiesenen Theorems geschehe zur Beantwortung der Frage nach der

Existenz der Eigenwerte $\lambda^{(h)}$. Diese Frage ist von besonderem Interesse, weil die entsprechende speciellere Aufgabe in der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen, nämlich der Nachweis der Existenz gewisser ausgezeichneter Werte für die in der Differentialgleichung oder in der Randbedingung auftretenden Parameter bisher wesentliche Schwierigkeiten verursacht hat. Durch Heranziehung unseres Theorems wird die weit allgemeinere Frage nach der Existenz der Eigenwerte, die zu einer Integralgleichung zweiter Art gehören, auf einfache und vollständige Weise beantwortet. Nehmen wir nämlich an, es gäbe keine oder nur eine endliche Anzahl, etwa m Eigenwerte, so ist die in dem Theorem auftretende Reihe (44) eine endliche mit m Gliedern und, da die Formel (44) des Theorems für alle stetigen Funktionen $x(s)$ und $y(s)$ gelten soll, so folgt aus derselben mit Notwendigkeit

$$K(s,t) = \frac{1}{\lambda^{(1)}}\,\psi^{(1)}(s)\,\psi^{(1)}(t) + \cdots + \frac{1}{\lambda^{(m)}}\,\psi^{(m)}(s)\,\psi^{(m)}(t),$$

d. h. $K(s,t)$ vermag, wenn man eine der beiden Variablen, etwa t als Parameter auffaßt und diesem irgend welche constante Werte erteilt, nur m linear unabhängige Funktionen der anderen Variabeln s darzustellen. Umgekehrt, wenn $K(s,t)$ diese Besonderheit aufweist, so verschwinden, wie man sieht, alle Coefficienten der Potenzreihe $\delta(\lambda)$, die mit einer höheren als der $m$ten Potenz von λ multiplicirt sind, d. h. $\delta(\lambda)$ wird eine ganze rationale Funktion in λ und es giebt dann gewiß nur m Eigenwerte. Wir sprechen somit den Satz aus:

Satz 3. *Die zu $K(s,t)$ gehörigen Eigenwerte sind stets in unendlicher Anzahl vorhanden — es sei denn, daß $K(s,t)$ als eine endliche Summe von Produkten darstellbar ist, deren Faktoren nur von je einer der Variabeln s, t abhängen; tritt dieser Fall ein, so ist die Zahl der Eigenwerte gleich der Anzahl der Summanden in jener Summe und $\delta(\lambda)$ ist eine ganze rationale Funktion von einem Grade gleich dieser Anzahl.*

Wir wenden uns nunmehr zu der Frage der Entwickelung jener willkürlichen Funktion in eine unendliche Reihe, die nach Eigenfunktionen fortschreitet. Führen wir in die Formel (44) unseres Theorems

$$y(t) = K(r,t)$$

ein und setzen

$$f(r) = \int_a^b\!\!\int_a^b K(s,t)\,K(r,t)\,x(s)\,ds\,dt,$$

bedenken wir sodann, daß mit Rücksicht auf (40)

$$\int_a^b f(r)\,\psi^{(m)}(r)\,dr = \frac{1}{(\lambda^{(m)})^2}\int_a^b x(s)\,\psi^{(m)}(s)\,ds$$

wird, so geht die Formel (44) unseres Theorems über in

$$f(r) = \int_a^b f(s)\,\psi^{(1)}(s)\,ds\cdot\psi^{(1)}(r) + \int_a^b f(s)\,\psi^{(2)}(s)\,ds\cdot\psi^{(2)}(r) + \cdots,$$

d. h. es gilt der Satz:

Satz 4. *Wenn eine Funktion $f(s)$ sich in der Gestalt*

$$f(s) = \int_a^b\int_a^b K(r,t)\,K(s,t)\,h(r)\,dr\,dt$$

darstellen läßt, wo $h(r)$ eine stetige Funktion von r ist, so läßt sie sich auf die Fouriersche Weise in eine nach Eigenfunktionen fortschreitende Reihe entwickeln, wie folgt

$$f(s) = c_1\psi^{(1)}(s) + c_2\psi^{(2)}(s) + \cdots$$

$$c_m = \int_a^b f(s)\,\psi^{(m)}(s)\,ds.$$

Diese Reihe convergirt absolut und gleichmäßig.

Die in diesem Satze gemachte Voraussetzung über $f(s)$ ist gleichbedeutend mit der Forderung, es soll eine stetige Funktion $h(s)$ geben, so daß die Integraldarstellung

$$f(s) = \int_a^b KK(s,t)\,h(t)\,dt$$

gilt, oder auch mit der Forderung, es soll zwei stetige Funktionen $g(s)$ und $h(s)$ geben, so daß

$$f(s) = \int_a^b K(s,t)\,g(t)\,dt$$

$$g(s) = \int_a^b K(s,t)\,h(t)\,dt$$

wird.

Wenn $K(s,t)$ eine solche symmetrische Funktion von s,t ist, daß die Gleichung

$$\int_a^b K(s,t)\,g(s)\,ds = 0$$

sich niemals durch eine stetige von Null verschiedene Funktion $g(s)$ identisch in t erfüllen läßt, so heiße $K(s,t)$ *ein abgeschlos-*

sener Kern. Es ist leicht, aus Satz 3 zu erkennen, daß zu einem abgeschlossenen Kern stets unendlich viele Eigenwerte gehören. Ferner können wir für einen abgeschlossenen Kern folgende Behauptungen aufstellen:

Satz 5. *Es sei $K(s,t)$ ein abgeschlossener Kern und $\psi^{(m)}(s)$ die zugehörigen Eigenfunktionen: wenn dann $h(s)$ eine stetige Funktion ist, so daß für alle m die Gleichung*

$$\int_a^b h(s)\,\psi^{(m)}(s)\,ds = 0$$

erfüllt ist, so ist $h(s)$ identisch Null.

Um diesen Satz zu beweisen, setzen wir

$$g(s) = \int_a^b K(s,t)\,h(t)\,dt,$$

$$f(s) = \int_a^b K(s,t)\,g(t)\,dt.$$

Nach Satz 4 gestattet $f(s)$ die Entwickelung nach den Eigenfunktionen $\psi^{(m)}(s)$, und zwar erhält man für die Coefficienten dieser Entwickelung

$$c_m = \int_a^b f(s)\,\psi^{(m)}(s)\,ds = \frac{1}{\lambda^{(m)}}\int_a^b g(s)\,\psi^{(m)}(s)\,ds =$$

$$\frac{1}{(\lambda^{(m)})^2}\int_a^b h(s)\,\psi^{(m)}(s)\,ds = 0,$$

folglich ist $f(s)$ identisch Null. Da $K(s,t)$ ein abgeschlossener Kern sein sollte, so folgt hieraus zunächst $g(s) = 0$ und sodann auch $h(s) = 0$.

Satz 6. *Es sei $K(s,t)$ ein abgeschlossener Kern und $f(s)$ irgend eine stetige Funktion: wenn sich alsdann herausstellt, daß die in Fourierscher Weise gebildete Reihe*

$$c_1\psi^{(1)}(s) + c_2\psi^{(2)}(s) + \cdots,$$

$$c_m = \int_a^b f(s)\,\psi^{(m)}(s)\,ds$$

gleichmäßig convergirt, so stellt sie die Funktion $f(s)$ dar.

In der Tat erweist sich die Differenz von $f(s)$ und der durch jene Reihe dargestellten Funktion von s unter Benutzung des Satzes 5 als Null.

Für die Entwickelbarkeit einer willkürlichen Funktion $f(s)$ nach Eigenfunktionen haben wir in den Sätzen 4 und 6 gewisse Kriterien aufgestellt. Wir können die Bedingungen des Satzes 4

wesentlich vereinfachen, wenn wir über den Kern $K(s,t)$ eine gewisse Vorraussetzung machen. Wir wollen nämlich eine symmetrische stetige Funktion $K(s,t)$ dann einen *allgemeinen Kern* nennen, wenn es möglich ist, zu jeder stetigen Funktion $g(s)$ und zu jedem beliebig kleinen positiven ε stets eine stetige Funktion $h(s)$ zu ermitteln, so daß, wenn

$$x(s) = g(s) - \int_a^b K(s,t)\, h(t)\, dt$$

gesetzt wird, die Ungleichung

$$\int_a^b (x(s))^2\, ds < \varepsilon$$

gilt, d. h. der Kern $K(s,t)$ heißt *allgemein*, wenn das Integral

$$\int_a^b K(s,t)\, h(t)\, dt$$

bei geeigneter Wahl der stetigen Funktion $h(s)$ jede stetige Funktion $g(s)$ in dem eben bezeichneten Sinne angenähert darzustellen fähig ist. Nunmehr gilt der Satz:

Satz 7. *Wenn $K(s,t)$ ein allgemeiner Kern ist, so ist jede unter Vermittelung einer stetigen Funktion $g(s)$ durch das Integral*

$$f(s) = \int_a^b K(s,t)\, g(t)\, dt$$

darstellbare Funktion in eine nach Eigenfunktionen fortschreitende Reihe entwickelbar, wie folgt

$$f(s) = c_1 \psi^{(1)}(s) + c_2 \psi^{(2)}(s) + \cdots,$$
$$c_m = \int_a^b f(s)\, \psi^{(m)}(s)\, ds.$$

Diese Reihe convergirt absolut und gleichmäßig.

Zum Beweise bezeichnen wir mit ε irgend eine beliebig kleine positive Größe; sodann bedeute M das Maximum der Funktion

$$\int_a^b (K(s,t))^2\, dt,$$

wenn die Variabele s sich im Intervall a bis b bewegt. Da $K(s,t)$ ein allgemeiner Kern und $g(s)$ eine stetige Funktion sein soll, so läßt sich eine stetige Funktion $h(s)$ finden, so daß, wenn

$$x(s) = g(s) - \int_a^b K(s,t)\, h(t)\, dt$$

gesetzt wird, die Ungleichung

$$(47)\qquad \int_a^b (x(s))^2\,ds < \left(\frac{2\varepsilon}{3(1+M)}\right)$$

erfüllt ist. Wir setzen

$$g^*(s) = \int_a^b K(s,t)\,h(t)\,dt,$$

$$f^*(s) = \int_a^b K(s,t)\,g^*(t)\,dt.$$

Nach Satz 4 gestattet die Funktion $f^*(s)$ die Reihenentwickelung nach Eigenfunktionen

$$f^*(s) = c_1^*\psi^{(1)}(s) + c_2^*\psi^{(2)}(s) + c_3^*\psi^{(3)}(s) + \cdots$$

und wegen der gleichmäßigen und absoluten Convergenz dieser Reihe ist es gewiß möglich, eine ganze Zahl m zu finden, so daß für alle s

$$(48)\qquad |f^*(s) - c_1^*\psi^{(1)}(s) - c_2^*\psi^{(2)}(s) - \cdots - c_m^*\psi^{(m)}(s)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ausfällt und auch die Ungleichungen noch gelten, die entstehen wenn man m hierin durch eine größere Zahl ersetzt.

Nun ist

$$\left|\int_a^b K(s,t)\,x(t)\,dt\right| \leqq \left|\sqrt{\int_a^b (K(s,t))^2\,dt\cdot\int_a^b (x(t))^2\,dt}\right|$$

und mit Rücksicht auf (47) mithin

$$\leqq |\sqrt{M}|\,\frac{2\varepsilon}{3(1+M)} \leqq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wegen

$$(49)\qquad f(s) = f^*(s) + \int_a^b K(s,t)\,x(t)\,dt$$

haben wir folglich die Ungleichung

$$(50)\qquad |f(s) - f^*(s)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Andererseits ist wegen (49)

$$c_j - c_j^* = \int_a^b\int_a^b K(s,t)\,\psi^{(j)}(s)\,x(t)\,dt = \frac{1}{\lambda^{(j)}}\int_a^b \psi^{(j)}(t)\,x(t)\,dt$$

und folglich

$$(c_j - c_j^*)\psi^{(j)}(s) = \int_a^b \psi^{(j)}(s)\,x(s)\,ds \cdot \int_a^b K(s,t)\,\psi^{(j)}(t)\,dt. \tag{51}$$

Nehmen wir

$$A = \frac{\int_a^b \psi^{(j)}(s)\,x(s)\,ds}{\sqrt[4]{\int_a^b (x(s))^2\,ds}}, \quad B = \sqrt[4]{\int_a^b (x(s))^2\,ds} \cdot \int_a^b K(s,t)\,\psi^{(j)}(t)\,dt,$$

so folgt wegen

$$|AB| \leqq \tfrac{1}{2}(A^2 + B^2)$$

aus (51) die Ungleichung

$$|(c_j - c_j^*)\psi^{(j)}(s)| \leqq \tag{52}$$
$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\int_a^b \psi^{(j)}(s)\,x(s)\,ds\right)^2}{\sqrt{\int_a^b (x(s))^2\,ds}} + \sqrt{\int_a^b (x(s))^2\,ds}\,\left(\int_a^b K(s,t)\,\psi^{(j)}(t)\,dt\right)^2\right\}.$$

Wir wenden uns nunmehr zu der Formel (16) zurück. Da jedes Glied der Summe auf der rechten Seite dieser Formel (16) $\geqq 0$ ausfällt, so gilt die Ungleichung

$$\frac{D\left(l^{(1)}, \frac{x}{x}\right)}{l^{(1)} d'(l^{(1)})} + \frac{D\left(l^{(2)}, \frac{x}{x}\right)}{l^{(2)} d'(l^{(2)})} + \cdots + \frac{D\left(l^{(m)}, \frac{x}{x}\right)}{l^{(m)} d'(l^{(m)})} \leqq [x, x].$$

Denken wir uns in dieser Formel wieder, wie früher

$$K_{pq} = K\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right), \quad x_p = x\left(\frac{p}{n}\right)$$

eingesetzt und sodann nach Division durch n, während m festbleibt, den Grenzübergang für $n = \infty$ ausgeführt, so entsteht die Ungleichung

$$\begin{aligned} &\left\{\int_0^1 \psi^{(1)}(s)\,x(s)\,ds\right\}^2 + \left\{\int_0^1 \psi^{(2)}(s)\,x(s)\,ds\right\}^2 + \cdots \\ &\quad + \left\{\int_0^1 \psi^{(m)}(s)\,x(s)\,ds\right\}^2 \leqq \int_0^1 (x(s))^2\,ds. \end{aligned} \tag{53}$$

Mit Benutzung dieser Ungleichung, in der wir wieder die Integrationsgrenzen a bis b eingeführt annehmen, folgt, wenn wir (52) für $j = 1, 2, \ldots, m$ bilden und summiren:

$$\sum_{j=1,\ldots,m} |(c_j - c^*)\psi^{(j)}(s)| \leqq \tfrac{1}{2}\sqrt{\int_a^b (x(s))^2\,ds} \quad (1 + M)$$

oder im Hinblick auf (47)

$$\leqq \tfrac{1}{2} \frac{2\varepsilon}{3(1+M)}(1+M) = \frac{\varepsilon}{3},$$

d. h. es ist auch

$$(54) \quad |c_1\psi^{(1)}(s)+\cdots+c_m\psi^{(m)}(s)-c_1^*\psi^{(1)}(s)-\cdots-c_m^*\psi^{(m)}(s)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Aus (48), (50), (54) folgt für alle s

$$|f(s)-c_1\psi^{(1)}(s)-c_2\psi^{(2)}(s)-\cdots-c_m\psi^{(m)}(s)| < \varepsilon$$

und man sieht zugleich, daß diese Ungleichung gültig bleibt, wenn man auf der linken Seite statt m eine größere Zahl wählt; damit ist der Beweis für unseren Satz vollständig erbracht.

Auf Grund des eben bewiesenen Satzes 7 läßt sich auch zeigen, daß die unendliche Reihe

$$\left(\int_a^b \psi^{(1)}(s)x(s)\,ds\right)^2+\left(\int_a^b \psi^{(2)}(s)x(s)\,ds\right)^2+\cdots$$

convergirt und den Wert

$$\int_a^b (x(s))^2\,ds$$

besitzt; dabei ist $K(s,t)$ als allgemeiner Kern vorausgesetzt und $x(s)$ bedeutet eine beliebige stetige Funktion.

V.

Das Variationsproblem, das der algebraischen Frage nach den Minima und Maxima einer quadratischen Form entspricht.

Die in Abschnitt III—IV entwickelte Theorie ist für die Variationsrechnung von besonderer Bedeutung. Ich möchte jedoch hier nur dasjenige transcendente Problem behandeln, welches der algebraischen Frage nach den relativen Maxima und Minima einer quadratischen Form bei Konstanz einer zweiten anderen Form entspricht: es ist dies das Problem, diejenigen Funktionen $x(s)$ zu finden, für welche das Doppelintegral

$$J(x) = \int_a^b\int_a^b K(s,t)\,x(s)x(t)\,ds\,dt$$

minimale oder maximale Werte besitzt, während die Nebenbedingung

$$(55) \qquad \int_a^b (x(s))^2\,ds = 1$$

erfüllt ist.

Wenn der Kern $K(s,t)$ die Eigenschaft hat, daß das Integral $J(x)$ nur positive Werte besitzt, was auch $x(s)$ für eine stetige Funktion sei und Null nur für $x(s) = 0$ wird, so heiße der *Kern* $K(s,t)$ *definit*. Wir machen im Folgenden die Annahme, daß $K(s,t)$ ein definiter Kern sei.

Wenn für eine gewisse stetige Funktion $x(s)$ identisch in allen s

$$\int_a^b K(s,t)x(t)\,dt = 0$$

wird, so folgt offenbar $J(x) = 0$ und hieraus auch $x(s) = 0$, d. h. *ein definiter Kern ist stets auch ein abgeschlossener Kern*; es giebt für ihn also gewiß unendlich viele Eigenwerte und Eigenfunktionen.

Die Eigenwerte eines definiten Kerns sind stets positiv. Denn fiele im Gegenteil etwa $\lambda^{(h)}$ negativ aus, so würde sich aus

$$(56) \quad J(x) = \frac{1}{\lambda^{(1)}}\left\{\int_a^b \psi^{(1)}(s)\,x(s)\,ds\right\}^2 + \frac{1}{\lambda^{(2)}}\left\{\int_a^b \psi^{(2)}(s)\,x(s)\,ds\right\}^2 + \cdots$$

für $x(s) = \psi^{(h)}(s)$ der Wert des Doppelintegrals $J(x)$ negativ ergeben.

Betreffs der Minima und Maxima von $J(x)$ gelten folgende Sätze:

Satz 8. *Es giebt keine stetige Funktion $x(s)$, welche das Doppelintegral $J(x)$ zu einem Minimum macht, während die Nebenbedingung* (55) *erfüllt ist.*

In der Tat, die Eigenfunktionen $\psi^{(1)}(s)$, $\psi^{(2)}(s), \ldots$ erfüllen sämtlich die Nebenbedingung (55); wegen

$$J(\psi^{(1)}) = \frac{1}{\lambda^{(1)}},\ J(\psi^{(2)}) = \frac{1}{\lambda^{(2)}}, \ldots$$

könnte daher der gewünschte Minimalwert nur gleich Null sein; diesen Wert nimmt $J(x)$ aber nur für $x(s) = 0$ an.

Satz 9. *Der größte Wert, den das Doppelintegral $J(x)$ annimmt, falls $x(s)$ eine stetige der Nebenbedingung* (55) *genügende Funktion sein soll, ist $\frac{1}{\lambda^{(1)}}$; denselben nimmt das Doppelintegral für $x(s) = \psi^{(1)}(s)$ an.*

Sei nämlich im Gegenteil $x(s)$ eine Funktion, die der Nebenbedingung (55) genügt und für welche

$$J(x) > \frac{1}{\lambda^{(1)}}$$

ausfiele, so müßte sich eine ganze Zahl m so wählen lassen, daß

auch die Summe $S(x)$ der ersten m Glieder rechter Hand in (56) größer als $\frac{1}{\lambda^{(1)}}$ wird. Nunmehr setzen wir

$$x(s) = c_1\psi^{(1)}(s) + c_2\psi^{(2)}(s) + \cdots + c_m\psi^{(m)}(s) + y(s),$$

wo zur Abkürzung

$$c_h = \int_a^b \psi^{(h)}(s)\, x(s)\, ds \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

gesetzt ist und demnach

$$\int_a^b \psi^{(h)}(s) y(s)\, ds = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

ausfällt; wir finden dann leicht

$$(57) \qquad \int_a^b (x(s))^2 ds = c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_m^2 + \int_a^b (y(s))^2 ds$$

$$(58) \qquad S(x) = \frac{c_1^2}{\lambda^{(1)}} + \frac{c_2^2}{\lambda^{(2)}} + \cdots + \frac{c_m^2}{\lambda^{(m)}}.$$

Aus (57) folgt mit Rücksicht auf (55)

$$c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_m^2 \leqq 1;$$

umsomehr ist also

$$\frac{c_1^2}{\lambda^{(1)}} + \frac{c_2^2}{\lambda^{(2)}} + \cdots + \frac{c_m^2}{\lambda^{(m)}} \leqq \frac{1}{\lambda^{(1)}}$$

und diese Gleichung steht mit (58) in Widerspruch, da $S(x)$ größer als $\frac{1}{\lambda^{(1)}}$ sein sollte; die ursprünglich gemachte Annahme trifft mithin nicht zu.

In analoger Weise erkennen wir die Richtigkeit des folgenden allgemeineren Satzes:

Satz 10. *Der größte Wert, den das Doppelintegral $J(x)$ annimmt, falls $x(s)$ eine stetige Funktion sein soll, die den Nebenbedingungen*

$$\int_a^b (x(s))^2 ds = 1,$$

$$\int_a^b \psi^{(h)}(s)\, x(s)\, ds = 0, \qquad (h = 1, 2, \ldots; m-1)$$

genügt, ist $\frac{1}{\lambda^{(m)}}$; denselben nimmt das Doppelintegral für $x(s) = \psi^{(m)}(s)$ an.

Durch ähnliche Schlüsse erlangen wir auch die Lösung weiterer Maximalprobleme. Beispielsweise gelingt ohne wesentliche Schwierigkeit die Auffindung der Funktion $x(s)$, die das Integral $J(x)$ zu einem Maximum macht, wenn außer der Nebenbedingung (55) noch die folgende Nebenbedingung

$$\int_a^b f(s)x(s)ds = 0 \tag{59}$$

erfüllt sein soll, wobei $f(s)$ irgend eine gegebene Funktion bedeutet.

Wenn der Kern $K(s, t)$ die Eigenschaft besitzt, stets positive Werte anzunehmen, sobald $x(s)$ eine dieser Nebenbedingung (59) genügende stetige Funktion ist, so heiße er kurz *relativ definit*.

Unter den Eigenwerten eines relativ definiten Kernes ist höchstens einer negativ. Denn wären etwa $\lambda^{(1)}$ und $\lambda^{(2)}$ negativ, so bestimme man die Constanten c_1, c_2 derart, daß die Funktion

$$x(s) = c_1\psi^{(1)}(s) + c_2\psi^{(2)}(s)$$

der Nebenbedingung (59) genügt, und überdies $c_1^2+c_2^2 = 1$ ausfällt: alsdann fällt nach (56) gewiß $J(x)$ negativ aus.

VI.

Ergänzung und Erweiterung der Theorie.

Wir haben bisher in Abschnitt I—V stets vorausgesetzt, daß $K(s, t)$ eine *stetige* Funktion der Veränderlichen s, t sei; es ist unsere nächste Aufgabe, festzustellen, inwieweit sich diese Annahme beseitigen läßt.

Wenn es eine endliche Anzahl von analytischen Linien L

$$s = F(t) \text{ oder } t = G(s)$$

in der st-Ebene giebt, so daß $K(s, t)$ in den Punkten dieser Linien unstetig oder unendlich wird, während für einen gewissen positiven, unterhalb $\frac{1}{2}$ liegenden Exponenten α das Produkt

$$(s-F(t))^\alpha K(s, t) \text{ bez. } (t-G(s))^\alpha K(s, t)$$

daselbst stetig bleibt, so sagen wir, daß $K(s, t)$ *Singularitäten von niederer als der $\frac{1}{2}$ten Ordnung besitzt.* Dabei setzen wir voraus, daß $K(s, t)$ außerhalb der Linien L durchweg stetig sei. Nunmehr stellen wir die Behauptung auf:

Die sämtlichen in Abschnitt III—V bewiesenen Resultate sind gültig, auch wenn der Kern $K(s, t)$ der zu Grunde gelegten Integralgleichung Singularitäten von niederer als der $\frac{1}{2}$ten Ordnung besitzt. Zugleich dürfen auch die in unserer Theorie auftretenden Funktionen

$x(s)$, $y(s)$ solche Funktionen sein, die an einer endlichen Anzahl von Stellen von niederer als der $\frac{1}{2}$ten Ordnung unendlich werden, wenn sie sonst stetige Funktionen von s sind.

Die Methode, mittelst der wir die Gültigkeit dieser Behauptung erkennen, besteht darin, daß wir die Linien L durch Gebietsstreifen der st-Ebene von beliebig geringer Breite ε ausschließen und alsdann eine Funktion $K_\varepsilon(s,t)$ construiren, die innerhalb jener Gebietsstreifen Null ist, während sie außerhalb derselben mit $K(s,t)$ übereinstimmt. Die Funktion $K_\varepsilon(s,t)$ ist überall stetig mit Ausnahme der Grenzlinien jener Gebietsstreifen, in denen sie, wie man sieht, sprungweise Wertänderungen erfährt. Für einen solchen Kern wie $K_\varepsilon(s,t)$, dessen Werte überall unterhalb einer endlichen Grenze bleiben und nur in gewissen Linien unstetig werden, sind unsere früheren Beweise unverändert gültig. Um ihre Gültigkeit für den Kern $K(s,t)$ zu erkennen, bedarf es der Ausführung des Grenzüberganges für $\varepsilon = 0$. Wir wollen im Folgenden auseinandersetzen, wie dies zu geschehen hat.

Zu dem Zwecke wenden wir uns zunächst zu den Potenzreihen $\delta(\lambda)$ S. 58 und $\Delta\left(\lambda, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)$ S. 60. Die Coefficienten δ_h bez. $\Delta_h\binom{x}{y}$ derselben lassen sich für den Kern $K(s,t)$ gewiß dann nicht bilden, wenn $K(s,s)$ als Funktion von s keine Bedeutung hat, d. h. sobald die Linie $s = t$ oder ein Teil derselben zu den singulären Linien des Kerns gehört. Diesem Uebelstande helfen wir dadurch ab, daß wir an Stelle der früher angewandten Formeln für δ_h S. 58 bez. $\Delta_h\binom{x}{y}$ S. 60 die folgenden eingesetzt denken

$$\delta_h = \frac{1}{h!}\int_0^1 \cdots \int_0^1 \begin{vmatrix} 0, & K(s_1, s_2), & \dots, & K(s_1, s_h) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K(s_h, s_1), & K(s_h, s_2), & \dots, & 0 \end{vmatrix} ds_1 \dots ds_h,$$

$$\Delta_h\binom{x}{y} = \frac{1}{h!}\int_0^1 \cdots \int_0^1 \begin{vmatrix} 0, & x(s_1), & x(s_2), & \dots, & x(s_h) \\ y(s_1), & 0, & K(s_1, s_2), & \dots, & K(s_1, s_h) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y(s_h), & K(s_h, s_1), & K(s_h, s_2), & \dots, & 0 \end{vmatrix} ds_1 \dots ds_h.$$

Wie man sieht, unterscheiden sich die neuen Ausdrücke für δ_h bez. $\Delta_h\binom{x}{y}$ von den früheren nur dadurch, daß in der Determinante die Elemente der Diagonalreihe überall 0 sind. Die mit den neuen Coefficienten gebildeten Potenzreihen $\delta(\lambda)$ bez. $\Delta\left(\lambda, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)$ stimmen

mit den früheren bis auf einen unwesentlichen Exponentialfaktor überein, der für $\delta(\lambda)$ und $\Delta\left(\lambda, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)$ derselbe ist und daher bei der Bildung des Quotienten $\dfrac{\Delta\left(\lambda, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)}{\delta(\lambda)}$ wegfällt [1]).

Hilfssatz 3. Die neuen Ausdrücke δ_h und $\Delta_h\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)$ haben für unsern Kern $K(s, t)$ gewiß stets einen Sinn und die mit ihnen gebildeten Potenzreihen $\delta(\lambda)$ und $\Delta\left(\lambda, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)$ in λ sind beständig convergent.

Wir wollen der Einfachheit halber den Beweis hierfür nur in dem Falle erbringen, daß $s = t$ die einzige singuläre Linie von $K(s,t)$ ist. In dem h-fachen Integrale für δ_h sollen die Integrationsveränderlichen $s_1, \ldots, s_h$ alle Werte zwischen 0 und 1 durchlaufen. Wir betrachten zunächst den $h!^{\text{ten}}$ Teil T dieses h-dimensionalen Integrationsgebietes, der durch die Ungleichungen

$$s_1 > s_2 > \ldots > s_h$$

charakterisirt ist. Wir denken uns dann in der h-reihigen Determinante, die im Ausdruck für δ_h auftritt, die Elemente

der ersten Horizontalreihe mit			$\lvert (s_1 - s_2)^\alpha \rvert$
„ zweiten	„	„	$\{\lvert (s_1 - s_2)^{-\alpha} \rvert + \lvert (s_2 - s_3)^{-\alpha} \rvert\}^{-1}$
„ dritten	„	„	$\{\lvert (s_2 - s_3)^{-\alpha} \rvert + \lvert (s_3 - s_4)^{-\alpha} \rvert\}^{-1}$
. . . .			. . . . . .
„ h-ten	„	„	$\lvert (s_{h-1} - s_h)^\alpha \rvert$

multiplicirt; dadurch entsteht eine Determinante, deren Elemente, wie man leicht sieht, gewiß sämtlich für alle Werte der Variabeln absolut genommen unterhalb einer endlichen positiven Größe K liegen. Der Wert der letzteren Determinante ist gewiß $\leqq \sqrt{h^h}\, K^h$ und folglich ergiebt sich für das über T erstreckte h-fache Integral als obere Grenze der Ausdruck

$$(60) \qquad \sqrt{h^h}\, K^h \int \cdots \int \lvert (s_1 - s_2)^{-\alpha} \rvert \, \{\lvert (s_1 - s_2)^{-\alpha} \rvert + \lvert (s_2 - s_3)^{-\alpha} \rvert\} \\ \{\lvert (s_2 - s_3)^{-\alpha} \rvert + \lvert (s_3 - s_4)^{-\alpha} \rvert\} \cdots \lvert (s_{h-1} - s_h)^{-\alpha} \rvert \, ds_1 \, ds_2 \ldots ds_h \\ 1 > s_1 > s_2 > \cdots > s_h > 0.$$

---

1) Vergl. Kellogg, Zur Theorie der Integralgleichungen, § 5. Göttinger Nachr. 1902.

Wenn wir in dem h-fachen Integral hier die neuen Veränderlichen

$$s_1 - s_2 = \sigma_1,\ s_2 - s_3 = \sigma_2,\ \ldots\ s_{h-1} - s_h = \sigma_{h-1},\ s_h = \sigma_h$$

einführen und die Produkte unter den Integralzeichen ausmultipliciren, so erkennen wir, daß jenes Integral sich aus 2^{h-2} h-fachen Integralen von folgender Gestalt zusammensetzt:

$$(61)\qquad \int \ldots \int \sigma_1^{\alpha_1} \sigma_2^{\alpha_2} \ldots \sigma_h^{\alpha_h}\, d\sigma_1\, d\sigma_2 \ldots d\sigma_h,$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, \ldots, \sigma_h > 0 \\ \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_h < 1 \end{pmatrix}$$

wo die Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ die Werte $0, -\alpha$ oder -2α haben, ihre Summe $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_h$ jedoch stets gleich $-h\alpha$ ausfällt. Die Berechnung des Integrals (61) liefert für dasselbe als obere Grenze einen Ausdruck

$$\frac{A^h}{\Gamma(1 + h - \alpha h)} < \frac{B^h}{h^{h(1-\alpha)}}$$

wo A, B gewisse von h unabhängige positive Größen bedeuten, und hieraus folgt für (60) eine obere Grenze

$$(62)\qquad \frac{C^h}{h^{h(\frac{1}{2}-\alpha)}},$$

wo C wiederum eine von h unabhängige positive Größe darstellt. Der Ausdruck (62) ist zugleich eine obere Grenze für den über T erstreckten Teil des h-fachen Integrales, das in δ_h auftritt. Da aber alle übrigen $h!-1$ Teile jenes h-fachen Integrales, wie sich bei Vertauschung der Integrationsveränderlichen zeigt, den gleichen Wert besitzen, so folgt, daß das vollständige h-fache Integral, das in δ_h auftritt, den mit $h!$ multiplicirten Ausdruck (62) zur oberen Grenze hat, d. h. es ist

$$(63)\qquad |\delta_h| \leqq \frac{C^h}{h^{h(\frac{1}{2}-\alpha)}}.$$

Wegen $\alpha < \frac{1}{2}$ folgt hieraus die Richtigkeit des Hilfssatzes 3 in Betreff der Potenzreihe $\delta(\lambda)$ *).

*) Die Darstellung dieses Beweises in den früher genannten Dissertationen von Kellogg und Andrae ist unrichtig.

Die nämliche Beweisführung gelingt für die Potenzreihe $\Delta\binom{\lambda,\ x}{\ \ y}$.

Wir kehren nun zu dem Kern $K_\varepsilon(s,t)$ zurück; erinnern wir uns, wie $K_\varepsilon(s,t)$ aus $K(s,t)$ durch Ausschalten der singulären Stellen entstand, so erhellt, daß $K_\varepsilon(s,t)$ als abhängig von der Streifenbreite ε zu betrachten ist. Da für ein bestimmtes ε $K_\varepsilon(s,t)$ absolut genommen stets unterhalb einer endlichen Grenze bleibt, so ist unsere frühere Theorie für $K_\varepsilon(s,t)$ unverändert gültig. Wir bezeichnen die hier zu $K_\varepsilon(s,t)$ gehörigen Potenzreihen in λ mit $\delta_\varepsilon(\lambda)$ bez. $\Delta_\varepsilon\binom{\lambda,\ x}{\ \ y}$. Da offenbar die Ungleichung (63) und die entsprechende für $\Delta_h\binom{x}{y}$ umsomehr für die Coefficienten der Potenzreihen $\delta_\varepsilon(\lambda)$ bez. $\Delta_\varepsilon\binom{\lambda,\ x}{\ \ y}$ gültig sind, so erkennen wir durch das nämliche Schlußverfahren, wie wir es zum Beweise des Hülfssatzes 1 (S. 58) angewandt haben, die Richtigkeit der folgenden Tatsache:

Hilfssatz 4. Die Funktionen $\delta_\varepsilon(\lambda)$ bez. $\Delta_\varepsilon\binom{\lambda,\ x}{\ \ y}$ convergiren für $\varepsilon = 0$ gegen $\delta(\lambda)$ bez. $\Delta\binom{\lambda,\ x}{\ \ y}$ und zwar ist diese Convergenz eine gleichmäßige für alle Werte von λ, deren absoluter Betrag unterhalb einer beliebig gewählten positiven Grenze Λ gelegen ist.

Es ist nicht schwer, nach diesen Vorbereitungen die Gültigkeit unseres grundlegenden Theorems S. 69 auf den Fall auszudehnen, daß der Kern $K(s,t)$ Singularitäten von niederer als der $\frac{1}{2}$ten Ordnung aufweist.

Für den Kern $K_\varepsilon(s,t)$ ist unser Theorem bereits als gültig erkannt, vorausgesetzt, daß die Nullstellen der zugehörigen Funktion $\delta_\varepsilon(\lambda)$ sämtlich einfach sind. Sollte diese Voraussetzung für einen Kern $K_\varepsilon(s,t)$ nicht zutreffen, so denke man sich — ähnlich wie zu Beginn des Abschnitt III ausgeführt worden ist — den betreffenden Kern $K_\varepsilon(s,t)$ ein wenig modificirt, sodaß jener Voraussetzung genügt wird und doch die modificirten Ausdrücke für $\varepsilon = 0$ nach denselben Grenzen $K(s,t)$ bez. $\delta(\lambda)$, $\Delta\binom{\lambda,\ x}{\ \ y}$ gleichmäßig convergiren.

Es sei jetzt Λ irgend eine positive Größe; aus Hilfssatz 4 kann dann geschlossen werden, daß diejenigen Nullstellen $\lambda_\varepsilon^{(h)}$ von $\delta_\varepsilon(\lambda)$,

deren absolute Beträge auch für $\varepsilon = 0$ unterhalb $\varDelta$ bleiben, in der Grenze für $\varepsilon = 0$ in die Nullstellen $\lambda^{(h)}$ von $\delta(\lambda)$, die absolut genommen unterhalb $\varDelta$ liegen, übergehen, und daß die zu jenen Nullstellen $\lambda_\varepsilon^{(h)}$ zugehörigen Werte von $\varDelta_\varepsilon\left(\lambda_\varepsilon^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)$ bei diesem Grenzübergang $\varepsilon = 0$ in die bezüglichen Werte von $\varDelta\left(\lambda^{(h)}, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)$ übergehen.

Wir bezeichnen nun die zum Kern $K_\varepsilon(s, t)$ gehörigen Eigenfunktionen mit $\psi_\varepsilon^{(1)}(s)$, $\psi_\varepsilon^{(2)}(s)$, ... Da wegen (53) S. 77 für jedes noch so große m die Ungleichung

$$\left\{\int_a^b \psi_\varepsilon^{(1)}(s)\, x(s)\, ds\right\} + \left\{\int_a^b \psi_\varepsilon^{(2)}(s)\, x(s)\, ds\right\}^2 + \cdots$$
$$+ \left\{\int_a^b \psi_\varepsilon^{(m)}(s)\, x(s)\, ds\right\}^2 \leqq \int_a^b (x(s))^2\, ds$$

gilt, so ist auch gewiß:

$$(64) \qquad \sum_{(\lambda_\varepsilon^{(h)} \geqq \varDelta)} \left\{\int_a^b \psi_\varepsilon^{(h)}(s)\, x(s)\, ds\right\}^2 \leqq \int_a^b (x(s))^2 ds.$$

Nunmehr setzen wir in der Formel (44) unseres Theorems an Stelle von $y(s)$ die Funktion $x(s)$ ein und schreiben die entstehende Formel dann in der Gestalt

$$(65) \quad \int_a^b \int_a^b K_\varepsilon(s, t)\, x(s)\, x(t)\, ds\, dt = \sum_{(\lambda_\varepsilon^{(h)} < \varDelta)} \frac{1}{\lambda_\varepsilon^{(h)}} \left\{\int_a^b \psi_\varepsilon^{(h)}(s)\, x(s)\, ds\right\}^2$$
$$+ \sum_{(\lambda_\varepsilon^{(h)} \geqq \varDelta)} \frac{1}{\lambda_\varepsilon^{(h)}} \left\{\int_a^b \psi_\varepsilon^{(h)}(s)\, x(s)\, ds\right\}^2;$$

dabei soll die erstere Summe rechter Hand über alle Eigenfunktionen $\psi_\varepsilon^{(h)}(s)$ erstreckt werden, deren zugehörige Eigenwerte $\lambda_\varepsilon^{(h)}$ absolut genommen unterhalb $\varDelta$ bleiben, während die zweite Summe rechter Hand ebenso wie die Summe linker Hand in (64) alle übrigen Glieder enthält. Wegen (64) folgt aus (65) die Gleichung:

$$\int_a^b \int_a^b K_\varepsilon(s, t)\, x(s)\, x(t)\, ds\, dt = \sum_{(\lambda_\varepsilon^{(h)} < \varDelta)} \frac{1}{\lambda_\varepsilon^{(h)}} \left\{\int_a^b \psi_\varepsilon^{(h)}(s)\, x(s)\, ds\right\}^2$$
$$\pm \frac{\vartheta}{\varDelta} \int_a^b (x(s))^2 ds$$
$$(0 \leqq \vartheta \leqq 1)$$

und durch Grenzübergang für $\varepsilon = 0$ entsteht hieraus:

$$\int_a^b \int_a^b K(s,t)\, x(s)\, x(t)\, ds\, dt = \sum_{(\lambda^{(h)} < \Lambda)} \frac{1}{\lambda^{(h)}} \left\{ \int_a^b \psi^{(h)}(s)\, x(s)\, ds \right\}^2 \pm \frac{\vartheta}{\Lambda} \int_a^b (x(s))^2\, ds,$$
$$(0 \leqq \vartheta \leqq 1).$$

Wenn wir nun Λ über jede Grenze zunehmen lassen, so ergiebt sich die Formel (44) unseres Theorems für den Kern $K(s,t)$ und im Falle $x(s) = y(s)$ genommen wird. Die letztere Einschränkung läßt sich sofort beseitigen.

Wir erkennen ohne Schwierigkeit auch alle früheren Folgerungen unseres Theorems für den Kern $K(s,t)$ als gültig, insbesondere die Sätze 4 und 7 über die Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen, die zu $K(s,t)$ gehören.

Sollte der vorgelegte Kern $K(s,t)$ singuläre Linien von höherer als der $\frac{1}{2}$ten und niederer als erster Ordnung besitzen, so bedürfen unsere Sätze gewisser Modifikationen; man erkennt diese leicht, wenn man die zweifach bez. mehrfach aus $K(s,t)$ zusammengesetzten Kerne (vgl. S. 70—71) bildet; bedenkt man, daß unter diesen Kernen stets solche Kerne vorhanden sein müssen, für die unsere oben dargelegte Theorie gültig ist, so ergeben sich die gewünschten Folgerungen für den Kern $K(s,t)$.

Wir haben bisher durchweg — auch in den Entwickelungen dieses Abschnittes VI — die Voraussetzung gemacht, daß für den zu Grunde gelegten Kern $K(s,t)$ die Potenzreihe $\delta(\lambda)$ nur einfache Nullstellen besitzt. Es sind nunmehr die Modifikationen zu ermitteln, die unsere Theorie erfährt, wenn wir diese beschränkende Annahme fallen lassen.

Zu dem Zwecke sei $K(s,t)$ ein solcher Kern, zu dem $\lambda^{(h)}$ als n_h-facher Eigenwert gehört, d. h. $\lambda^{(h)}$ sei genau eine n_h-fache Nullstelle von $\delta(\lambda)$. Sodann bietet es keine erhebliche principielle Schwierigkeit, einen Kern $K_\mu(s,t)$ von folgeden Eigenschaften zu finden: $K_\mu(s,t)$ sei eine solche Potenzreihe von μ, deren Coefficienten stetige symmetrische Funktionen von s, t sind, die für genügend kleine Werte von μ convergirt und für $\mu = 0$ in $K(s,t)$ übergeht. Es sei $\delta_\mu(\lambda)$ die fragliche zum Kern $K_\mu(s,t)$ gehörige Potenzreihe, so daß $\delta_\mu(\lambda)$ für $\mu = 0$ in die zu $K(s,t)$ gehörige Potenzreihe $\delta(\lambda)$ übergeht; $\delta_\mu(\lambda)$ wird, wie man aus dem früheren Beweise leicht erkennt, eine Potenzreihe in λ, die gewiß für alle λ und genügend kleine μ convergirt; diese Convergenz ist außerdem für alle absolut unterhalb einer endlichen Grenze Λ liegenden λ bei genügend kleinem μ gewiß eine gleichmäßige,

sodaß $\delta_\mu(\lambda)$ auch als Potenzreihe in λ und μ darstellbar ist. Endlich gestatte — so sei der Parameter μ gewählt — die Gleichung

$$\delta_\mu(\lambda) = 0$$

in der Umgebung von $\lambda = \lambda^{(h)}$ die folgenden n_h Auflösungen:

$$(66)\qquad \begin{aligned} \lambda_\mu^{(h)} &= \mathfrak{P}(\mu), \\ \lambda_\mu^{(h+1)} &= \mathfrak{P}_1(\mu), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_\mu^{(h+n_h-1)} &= \mathfrak{P}_{n_h-1}(\mu); \end{aligned}$$

hierin sollen $\mathfrak{P}(\mu)$, $\mathfrak{P}_1(\mu), \ldots \mathfrak{P}_{n_h-1}(\mu)$ Potenzreihen in μ bedeuten und unter diesen seien keine zwei in μ einander identisch gleich. Die letztere Festsetzung bringt die für die nachfolgenden Entwickelungen wesentliche Eigenschaft der Funktion $K_\mu(s,t)$ zum Ausdruck, die darin besteht, daß für alle genügend kleinen, von Null verschiedenen Werte des Parameters μ die Funktion $K_\mu(s,t)$ einen Kern darstellt, der lauter einfache Eigenwerte besitzt. Wir bilden nunmehr für $K_\mu(s,t)$ nach Art von (27) die Potenzreihe $\Delta_\mu(\lambda; s,t)$, die für $\mu = 0$ in die zu $K(s,t)$ gehörige Potenzreihe $\Delta(\lambda; s,t)$ übergeht. $\Delta_\mu(\lambda; s,t)$ ist gewiß für alle λ und genügend kleine μ ebenso wie $\delta_\mu(\lambda)$ gleichmäßig convergent und auch als Potenzreihe von λ und μ darstellbar. Endlich construiren wir für $K_\mu(s,t)$ die zu

$$\lambda_\mu^{(h)},\ \lambda_\mu^{(h+1)},\ \ldots,\ \lambda_\mu^{(h+n_h-1)}$$

gehörigen normirten Eigenfunktionen

$$\psi_\mu^{(h)}(s),\ \psi_\mu^{(h+1)}(s),\ \ldots,\ \psi_\mu^{(h+n_h-1)}(s),$$

indem wir in $\delta_\mu(\lambda)$ und $\Delta_\mu(\lambda; s,t)$ an Stelle von λ der Reihe nach aus (66) die Werte für $\lambda_\mu^{(h)}$, $\lambda_\mu^{(h+1)}, \ldots, \lambda_\mu^{(h+n_h-1)}$ als Potenzreihen in μ einsetzen; wir erhalten zunächst

$$\psi_\mu^{(h)}(s)\,\psi_\mu^{(h)}(t) = \frac{\Delta_\mu(\lambda^{(h)}; s,t)}{\delta'_\mu(\lambda^{(h)})} = \mu^{\pm e}\left\{\Psi^{(h)}(s,t) + \Psi_1^{(h)}(s,t)\,\mu + \cdots\right\},$$

$$\psi_\mu^{(h+1)}(s)\,\psi_\mu^{(h+1)}(t) = \frac{\Delta_\mu(\lambda^{(h+1)}; s,t)}{\delta'_\mu(\lambda^{(h+1)})} = \mu^{\pm e_1}\left\{\Psi^{(h+1)}(s,t) + \Psi_1^{(h+1)}(s,t)\,\mu + \cdots\right\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}\psi_\mu^{(h+n_h-1)}(s)\,\psi_\mu^{(h+n_h-1)}(t) = \frac{\Delta_\mu(\lambda^{(h+n_h-1)}; s,t)}{\delta'_\mu(\lambda^{(h+n_h-1)})} = \mu^{\pm e_{n_h-1}}\Big\{&\Psi^{(h+n_h-1)}(s,t) \\ &+ \Psi^{(h+n_h-1)}(s,t)\,\mu + \cdots\Big\};\end{aligned}$$

darin bedeuten $e, e_1, \ldots e_{n_h-1}$ gewisse ganze rationale Exponenten die $\geqq 0$ sind; ferner bedeuten die Ausdrücke $\Psi(s, t)$ auf der rechten Seite stetige Funktionen von s, t. Es fällt nicht schwer, hieraus für die gesuchten Eigenfunktionen Formeln von folgender Art abzuleiten:

$$(67) \quad \begin{aligned} \psi_\mu^{(h)}(s) &= \mu^{\pm f}\{\psi^{(h)}(s) + \psi_1^{(h)}(s)\mu + \cdots\}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi_\mu^{(h+n_h-1)}(s) &= \mu^{\pm f_{n_h-1}}\{\psi^{(h+n_h-1)}(s) + \psi_1^{(h+n_h-1)}(s)\mu + \cdots\}; \end{aligned}$$

darin bedeuten wiederum $f, f_1, \ldots, f_{n_h-1}$ gewisse ganze rationale Exponenten, die $\geqq 0$ sind. Ferner bedeuten die Ausdrücke $\psi^{(\cdot)}(s)$ auf der rechten Seite stetige Funktionen von s, und insbesondere dürfen wir annehmen, daß von den Funktionen

$$(68) \qquad \psi^{(h)}(s), \quad \psi^{(h+1)}(s), \quad \ldots, \quad \psi^{(h+n_h-1)}(s)$$

keine für alle s identisch gleich Null sei. Da andererseits für alle genügend kleinen von Null verschiedenen μ die Gleichungen

$$\int_a^b (\psi_\mu^{(h)}(s))^2 ds = 1, \quad \ldots, \quad \int_a^b (\psi^{h+n_h-1}(s))^2 ds = 1$$

bestehen müssen, so folgt, daß die Exponenten $f, f_1, \ldots, f_{n_h-1}$ sämtlich Null sind, und die Formeln (67) lehren dann, daß die Funktionen

$$\psi_\mu^{(h)}(s), \; \psi_\mu^{(h+1)}(s), \; \ldots, \; \psi_\mu^{h+n_h-1}(s)$$

für $\mu = 0$ stetig in die Funktionen (68) übergehen. Diese Funktionen (68) heißen *die zum n_h-fachen Eigenwert $\lambda^{(h)}$ gehörigen Eigenfunktionen*; sie erfüllen, wie man aus den Formeln für die Eigenfunktionen $\psi_\mu^{(1)}(s)$, $\psi_\mu^{(2)}(s)$, ... durch Grenzübergang zu $\mu = 0$ sofort erkennt, die folgenden Gleichungen

$$\int_a^b (\psi^{(k)}(s))^2 ds = 1,$$

$$\int_a^b \psi^{(k)}(s)\,\psi^{(k')}(s)\, ds = 0,$$

$$(k = h, h+1, \ldots h+n_h-1; \; k' \neq k).$$

Wir wenden nunmehr die Formel (43) auf den Kern $K_\mu(s, t)$ an, wobei μ einen genügend kleinen von Null verschiedenen Wert bedeutet. Mit Rücksicht auf (39) erhalten wir

$$\left| \int_0^1\int_0^1 K_\mu(s,t)\,x(s)\,y(t)\,ds\,dt - \frac{1}{\lambda_\mu^{(1)}}\int_0^1 \psi_\mu^{(1)}(s)\,x(s)\,ds.\int_0^1 \psi_\mu^{(1)}(s)\,y(s)\,ds \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\lambda^{(2)}}\int_0^1 \psi_\mu^{(2)}(s)\,x(s)\,ds\cdot\int_0^1 \psi_\mu^{(2)}(s)\,y(s)\,ds - \cdots - \frac{1}{\lambda^{(m)}}\int_0^1 \psi_\mu^{(m)}(s)\,x(s)\,ds\ .\ \int_0^1 \psi_\mu^{(m)}(s)\,y(s)\,ds \right|$$

$$\leqq \frac{1}{2\,|\lambda_\mu^{(m+1)}|}\left(\int_0^1 (x(s))^2\,ds + \int_0^1 (y(s))^2\,ds\right);$$

wenn wir hierin zur Grenze $\mu = 0$ übergehn und alsdann m über jede Grenze wachsen lassen, so erkennen wir, daß auch für den Kern $K(s,t)$ die Formel (44) des grundlegenden Theorems unverändert gültig bleibt: *man hat nur nötig, für den Fall eines n_h-fachen Eigenwertes $\lambda^{(h)}$ rechter Hand in (44) der Reihe nach jede der n_h verschiedenen, zu $\lambda^{(h)}$ gehörigen Eigenfunktionen zu berücksichtigen, so daß in jedem dieser n_h Glieder der reciproke Wert desselben Eigenwertes $\lambda^{(h)}$ als Faktor zu stehen kommt.*

Eine einfache Methode zur Berechnung der Eigenfunktionen (68) gewinnen wir, indem wir von der Formel

$$\int_a^b\int_a^b \mathsf{K}(\lambda;s,t)\,x(s)\,y(t)\,ds\,dt = \sum_{(h=1,2,\ldots)} \frac{1}{\lambda^{(h)}-\lambda}\int_a^b \psi^{(h)}(s)\,x(s)\,ds\ .\ \int_a^b \psi^{(h)}(s)\,y(s)\,ds$$

ausgehen. Setzen wir hierin

$$\mathsf{K}(s,t) = -\frac{\Delta(\lambda;s,t)}{\delta(\lambda)}$$

ein, multipliciren dann die Formel mit $\lambda-\lambda^{(h)}$ und gehen zur Grenze $\lambda=\lambda^{(h)}$ über, so erhalten wir schließlich:

$$\left(\frac{\dfrac{\partial^{n_h-1}}{\partial\lambda^{n_h-1}}\Delta(\lambda;s,t)}{\dfrac{\partial^{n_h}}{\partial\lambda^{n_h}}\delta(\lambda)}\right)_{\lambda=\lambda^{(h)}} = \psi^{(h)}(s)\,\psi^{(h)}(t) + \psi^{(h+1)}(s)\,\psi^{(h+1)}(t) + \cdots + \psi^{(h+n_h-1)}(s)\,\psi^{(h+n_h-1)}(t).$$

Durch diese Gleichung sind die zu dem n_h-fachen Eigenwerte $\lambda^{(h)}$ gehörigen Eigenfunktionen (68) eindeutig bestimmt, wenn man von einer unwesentlichen orthogonalen Combination derselben mit constanten Coefficienten absieht.

Mittelst einer eben bewiesenen Verallgemeinerung unseres grundlegenden Theorems sind wir im Stande, auch die anderen im Falle mehrfacher Eigenwerte entstehenden Fragen ohne Schwierigkeit zu beantworten.

In einer zweiten Mitteilung werde ich einige Anwendungen der obigen Theorie der Integralgleichungen zweiter Art auf die Theorie der linearen gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen behandeln.

Bemerkung zur Theorie der automorphen Funktionen.

Von

Otto Blumenthal in Göttingen.

Mit 1 Figur im Text.

Vorgelegt in der Sitzung am 5. März 1904 durch Herrn Hilbert.

Wir betrachten eine eigentlich discontinuierliche Gruppe G linearer Substitutionen der complexen Veränderlichen z [1]), welche das Innere des Einheitskreises der z-Ebene in sich überführt. Die sämtlichen Substitutionen der Gruppe sind von der Form

$$(1) \qquad z' = \frac{\bar{\delta} z + \bar{\gamma}}{\gamma z + \delta},$$

wo $\bar{\gamma}$, $\bar{\delta}$ die zu γ, δ conjugiert complexen Größen bezeichnen und außerdem

$$(2) \qquad |\delta|^2 - |\gamma|^2 = 1.$$

Wir wollen dazu noch annehmen, daß die Gruppe G den Einheitskreis zum „Grenzkreis" hat, d. h. daß jeder Punkt des Einheitskreises Häufungspunkt nach der Gruppe äquivalenter Punkte ist [2]). Alsdann zerfällt der Discontinuitätsbereich der Gruppe in zwei getrennte, in Bezug auf den Einheitskreis symmetrische Stücke und hat nur dann mit dem Einheitskreis Punkte (in endlicher Anzahl) gemein, wenn G parabolische Substitutionen enthält [3]).

1) Betreffs der eingeführten Begriffe und Bezeichnungen verweise ich auf Fricke-Klein, Automorphe Funktionen (Leipzig, 1897—1901).

2) Diese Annahme ist nur zur Vereinfachung der Ausdrucksweise eingeführt, die Gültigkeit der Beweise ist nicht von ihr abhängig.

3) Dabei ist, wie üblich, vorausgesetzt, daß die Gruppe einen Discontinuitätsbereich von endlicher Seitenzahl besitzt.

Um Funktionen zu bilden, welche gegenüber der Gruppe G invariant sind, betrachtet Poincaré[1]) die Reihen

$$\Theta(z) = \sum \frac{H\left(\frac{\bar{\delta} z + \bar{\gamma}}{\gamma z + \delta}\right)}{(\gamma z + \delta)^p}, \tag{3}$$

wo die Summe über sämtliche Substitutionen der Gruppe zu erstrecken ist, p eine positive ganze Zahl $\geqq 4$ und $H(z)$ eine rationale Funktion bezeichnet, welche auf dem Einheitskreise keinen Pol besitzen soll. Poincaré beweist die absolute und gleichmäßige Convergenz dieser Reihen in der ganzen Ebene mit Ausnahme eines den Einheitskreis umgebenden beliebig schmalen Ringgebiets. Es folgt: Die Reihe $\Theta(z)$ stellt im Inneren und Aeußeren des Einheitskreises je eine bis auf Pole reguläre eindeutige Funktion dar, welche sich bei Ausübung der Substitution $\begin{pmatrix} \bar{\delta}_0 & \bar{\gamma}_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{pmatrix}$ mit dem Faktor $(\gamma_0 z + \delta_0)^p$ multipliciert.

Der Beweis der absoluten Convergenz stützt sich darauf, daß die Reihe

$$\sum \frac{1}{|\gamma z + \delta|^p}, \quad p \geqq 4$$

für alle Punkte der Ebene mit Ausschluß des genannten Ringgebietes gleichmäßig convergiert. Daraus folgt insbesondere, durch Betrachtung der Punkte 0 und ∞, die Convergenz der beiden Reihen

$$\sum \frac{1}{|\delta|^p} \text{ und } \sum \frac{1}{|\gamma|^p}.$$

Dagegen scheint das Verhalten der Θ-Reihen bei Annäherung an den Einheitskreis bis jetzt noch nicht behandelt worden zu sein. Wir geben in dieser Note ein sehr einfaches Resultat über dieses Verhalten an.

Betrachten wir zuerst das Innere des Einheitskreises. Sei z_0 ein beliebiger Punkt auf dem Einheitskreise, ich trage in z_0 an dem Radius $(0\, z_0)$ nach beiden Seiten einen Winkel $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ab und begrenze den so entstandenen Winkelraum im Innern des Einheitskreises durch einen um z_0 als Mittelpunkt beschriebenen Kreisbogen, so daß das entstandene Gebiet mit dem Einheitskreise nur

1) Poincaré, Acta Math. I, pg. 193—198, Fricke-Klein, Aut. Funkt., II, pg. 142—147.

den Punkt z_0 gemeinsam hat. Wir schließen aus diesem Gebiete ferner alle diejenigen Bereiche aus, in welchen irgend eine der Funktionen $H\left(\frac{\overline{\delta}z+\overline{\gamma}}{\gamma z+\delta}\right)$ Werte besitzt, welche dem absoluten Betrage nach größer als eine feste Zahl M sind. Das erhaltene Gebiet nennen wir D. Der Punkt z_0 selbst werde nicht zu D hinzugerechnet[1]).

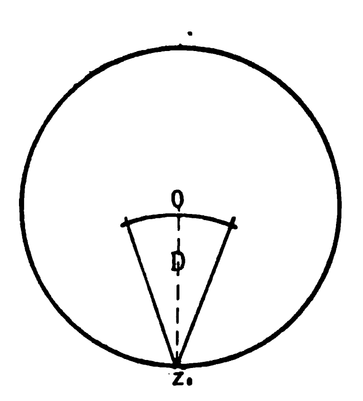


Fig. 1.

Ich behaupte: Nähern wir uns dem Punkte z_0 auf einem beliebigen innerhalb D gelegenen Wege, so convergiert das Produkt

$$(z-z_0)^\nu\,\Theta(z)$$

gegen den Wert Null.

In der That haben wir für jeden Punkt von D

$$(z-z_0)^\nu\,\Theta(z) = \sum H\left(\frac{\overline{\delta}z+\overline{\gamma}}{\gamma z+\delta}\right)\cdot\frac{(z-z_0)^\nu}{(\gamma z+\delta)^\nu}$$

$$|(z-z_0)^\nu\,\Theta(z)| < M\sum\left|\frac{z-z_0}{\gamma z+\delta}\right|^\nu.$$

---

1) Der Bereich D ist zusammenhängend, d. h. ich kann von jedem seiner Punkte nach z_0 einen Weg ziehen, welcher ganz im Inneren von D verläuft, so zwar, daß auch eine endliche Umgebung jedes seiner Punkte dem Bereiche angehört. In der That liegen in einem Discontinuitätsbereich der Gruppe nur eine endliche Anzahl von Polen der Funktionen $H\left(\frac{\overline{\delta}z+\overline{\gamma}}{\gamma z+\delta}\right)$. Sie mögen alle im Innern, nicht auf dem Rande des D. B. liegen. Ich kann dann durch genügend große Wahl von M erreichen, daß die entsprechenden Bereiche $|H|>M$ ganz im Innern des D. B. liegen; dann sind aber alle übrigen Bereiche $\left|H\left(\frac{\overline{\delta}z+\overline{\gamma}}{\gamma z+\delta}\right)\right|>M$ (weil H keinen Pol auf dem Einheitskreise hat) einfach die zu den bestimmten Bereichen äquivalenten und liegen daher ganz im Innern der entsprechenden äquivalenten D. B. Um also von einem Punkte z von D auf einem Wege der gewünschten Art nach z_0 zu gelangen, habe ich nur von z zuerst nach dem Rande des zu z gehörigen D. B. zu gehen und dann immer den Randcurven der nach z_0 sich häufenden Bereiche zu folgen.

Ist z_1 ein beliebiger Punkt im Aeußeren oder auf dem Rande des Einheitskreises, so gilt für jeden Punkt von D

$$\frac{|z - z_0|}{|z - z_1|} < A,$$

wo A eine nur noch von D abhängige Größe bedeutet. Daher ist insbesondere, da nach (2) die Punkte $z_1 = -\frac{\delta}{\gamma}$ außerhalb des Einheitskreises liegen,

$$\left|\frac{z - z_0}{z + \frac{\delta}{\gamma}}\right| < A, \quad \left|\frac{z - z_0}{\gamma z + \delta}\right| < \frac{A}{|\gamma|}.$$

Daher folgt für jeden Punkt von D

$$\sum \left|\frac{z - z_0}{\gamma z + \delta}\right|^{\nu} < A^{\nu} \sum \frac{1}{|\gamma|^{\nu}}.$$

Die Summe $\sum \left|\frac{z - z_0}{\gamma z + \delta}\right|^{\nu}$ ist daher, wegen der Convergenz der Reihe $\sum \frac{1}{|\gamma|^{\nu}}$, in dem ganzen Bereiche D gleichmäßig convergent.

Ich kann daher von dieser Summe eine Restsumme so abtrennen, daß diese für jeden Punkt von D unterhalb einer vorgeschriebenen beliebig kleinen Zahl ϱ bleibt. Von den übrigen Gliedern nähert sich jedes bei Annäherung an z_0 dem Werte Null: unser Satz ist also bewiesen.

Der analoge Satz gilt bei Annäherung im Aeußeren des Einheitskreises. Zum Beweise dient eine einfache Umformung der Θ-Reihe. Man setze nämlich

$$H(z) = \frac{H'(z)}{z^{\nu}}, \quad \text{woraus} \quad H\left(\frac{\bar{\delta} z + \bar{\gamma}}{\gamma z + \delta}\right) = \frac{H'\left(\frac{\bar{\delta} z + \bar{\gamma}}{\gamma z + \delta}\right)}{\left(\frac{\bar{\delta} z + \bar{\gamma}}{\gamma z + \delta}\right)^{\nu}}$$

folgt, so ist $H'(z)$ wieder eine rationale Funktion der betrachteten Art und die Θ-Reihe nimmt die Form an:

$$\Theta(z) = \sum \frac{H'\left(\frac{\bar{\delta} z + \bar{\gamma}}{\gamma z + \delta}\right)}{(\bar{\delta} z + \bar{\gamma})^{\nu}}.$$

Tragen wir jetzt im Aeußeren des Einheitskreises an dem durch z_0 hindurchgehenden Radius nach beiden Seiten einen Winkel von

der Größe $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ab, schließen den Winkelraum durch einen Kreisbogen um z_0 und scheiden aus dem erhaltenen Gebiete die Bereiche aus, in welchen $|H'| > M$, so erhalten wir einen Bereich D', und es gilt wieder:

Nähern wir uns dem Punkte z_0 auf einem Wege, welcher ganz innerhalb D' verläuft, so convergiert das Produkt

$$(z - z_0)^\nu \Theta(z)$$

gegen den Grenzwert Null.

Der Beweis vollzieht sich wie früher, indem man bemerkt, daß die Punkte $z_i' = -\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\delta}}$ im Innern des Einheitskreises liegen.

Unser Satz gilt allgemein für jeden Punkt z_0 des Einheitskreises, er wird von besonderer Bedeutung, wenn die Gruppe parabolische Substitutionen enthält, und wir den Satz auf die parabolischen Ecken z_0 des Discontinuitätsbereiches anwenden. Dann folgt nämlich sofort das Resultat:

Jede Θ-Reihe convergiert gegen den Wert Null, wenn wir uns einem parabolischen Eckpunkt z_0 des Discontinuitätsbereichs auf einem ganz innerhalb des Discontinuitätsbereiches gelegenen Wege nähern. Sie gestattet um den parabolischen Eckpunkt herum eine Entwicklung nach aufsteigenden Fourier-Reihen:

$$\Theta(z) = t^\nu \sum_{\nu}^{\infty} A_\nu e^{2\pi i \nu t}, \qquad \nu > 0. \tag{4}$$

Die Variabele t bestimmt sich dabei in folgender Weise: Sei

$$\frac{1}{z' - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + \omega \tag{5}$$

die parabolische Substitution, wo in ω das Vorzeichen noch willkürlich ist. Man setzt alsdann

$$t = \frac{1}{\omega} \frac{1}{z - z_0} \tag{6}$$

und findet bei richtiger Bestimmung des Vorzeichens von ω leicht die Thatsache: Nähern wir uns dem Punkte z_0 im Innern des Bereiches D, so nimmt der imaginäre Bestandteil von t beliebig wachsende positive Werte an. Die Substitution (5) erhält bei Einführung von t die einfache Form:

$$t' = t + 1.$$

Nun bleibt das Produkt $(z - z_0)^\nu \Theta(z)$ bei der Substitution (5) ungeändert, ferner liegt das an die Ecke z_0 sich anschließende Stück des Discontinuitätsbereichs der Gruppe G ganz im Innern von D, daher nähert sich für $0 \leqq \Re(t) \leqq 1$ das Produkt bei unendlich wachsendem imaginärem Bestandteil von t dem Werte Null und ist daher nach bekannten Sätzen in eine aufsteigende Fourier-Reihe entwickelbar:

$$(z - z_0)^\nu \Theta(z) = \sum_{\nu}^{\infty} A_n e^{2\pi i n t}, \qquad \nu > 0.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Der Satz spielt eine entscheidende Rolle in der Theorie der automorphen Funktionen. Er ist nämlich notwendig zu dem Nachweise, daß solche Funktionen sich durch Quotienten von Θ-Reihen darstellen lassen. Der von Poincaré erbrachte Beweis ist erheblich complicierter als der hier gegebene [1]).

Ich möchte hinzufügen, daß unser Beweis sich auf eine allgemeinere Gattung von Reihen anwenden läßt, welche der Poincaré'schen Behandlung schwieriger zugänglich erscheint. Betrachten wir nämlich die Reihe

$$\Theta_\lambda(z) = \sum \frac{H\left(\dfrac{\bar{\delta} z + \bar{\gamma}}{\gamma z + \delta}\right)}{(\gamma z + \delta)^\lambda},$$

wo λ eine beliebige reelle Zahl > 4 bedeutet, so stellt diese Reihe eine im Inneren des Einheitskreises definierte, eindeutige und bis auf Pole reguläre Funktion dar, welche den Einheitskreis zur natürlichen Grenze hat. Die Funktion multipliciert sich (bei einheitlicher Festsetzung der Determination von $(\gamma z + \delta)^\lambda$ für alle Glieder) bei Ausübung der Substitution (1) nur mit dem Faktor $(\gamma z + \delta)^\lambda$, hat also im Innern des Einheitskreises alle Eigenschaften der Θ-Reihen.

Diese verallgemeinerten Reihen werden auch von Poincaré gelegentlich in Betracht gezogen [2]). Sie gestatten an parabolischen Punkten die gleichen Fourier-Entwickelungen wie die gewöhnlichen Θ-Reihen, denn unser Beweis bleibt ungeändert auf sie anwendbar. Sie sind daher (durch Quotientenbildung) ebenfalls zur Construction automorpher (in Bezug auf die Gruppe invarianter) Funktionen geeignet.

1) Acta Math. I, pg. 213—215; Fricke-Klein, Aut. Funkt., II, pg. 147—153.

2) Acta Math. I, pg. 236.



Zur Elektronentheorie.

I. Allgemeine Untersuchung des Feldes eines beliebig bewegten Elektrons.

Von

A. Sommerfeld in Aachen.

Vorgelegt in der Sitzung vom 5. März 1904 durch W. Voigt.

§ 1. *Einleitung. Die Differentialgleichung des skalaren Potentials.*

Von den Bewegungen eines Elektrons beherrschen wir bisher nur die gleichförmig-geradlinige Bewegung und ihre Nachbarbewegungen oder, wie man sagt, die stationäre und quasistationäre Bewegung. Ueber die wirklich beschleunigten Bewegungen kennen wir die Potentialgesetze von Liénard und Wiechert, welche das Feld eines Elektrons in hinreichender Entfernung von demselben beschreiben, für die Umgebung des Elektrons aber und für das Innere desselben nicht zureichen. Dementsprechend können diese Gesetze zur Beantwortung dynamischer Fragen, bei denen es auf das Feld im Innern des Elektrons ankommt, nicht herangezogen werden.

Im Folgenden gebe ich explicite, überraschend einfache Formeln für das Feld eines in beliebiger Weise bewegten Elektrons, welche innerhalb und außerhalb desselben strenge Gültigkeit haben. Aus ihnen lassen sich alle bisher bekannten und viele neue Ergebnisse der Elektronentheorie, soweit sie sich auf ein einzelnes Elektron bezieht, auf direktestem Wege herleiten, wie ich in einigen folgenden Noten zu zeigen gedenke. Ich teile hier den Weg mit, auf dem ich meine Formeln ursprünglich gefunden habe, da mir derselbe nicht ohne Interesse und Verallgemeinerungs-

fähigkeit zu sein scheint. Ein einfacherer Weg, der zu demselben Ziel führt, wird in § 7 angedeutet werden.

Die Differentialgleichung des skalaren Potentiales φ lautet bekanntlich für ein im Raume festes Coordinatensystem bei Benutzung der sog. rationellen (Heaviside'schen) Einheiten[1]):

$$1)\qquad \ddot{\varphi} - c^2 \Delta \varphi = c^2 \varrho,$$

wo ϱ die Dichte, c die Lichtgeschwindigkeit und ein Punkt die Differentiation nach t in einem festen Raumpunkte bedeutet. Ob das Elektron in Rotation befindlich ist, macht für die Aufstellung des skalaren Potentials nichts aus, wenn nur, was wir voraussetzen wollen, die elektrische Dichte symmetrisch um die Rotationsaxe verteilt ist, so daß immer Stellen gleicher Dichte durch die Rotation in einander übergeführt werden. Benutzen wir dagegen ein Coordinatensystem, welches die Translationsbewegung $\mathfrak{v}$ des Elektrons mitmacht, an der ev. vorhandenen Rotationsbewegung aber nicht teilnimmt, und bezeichnen wir mit $\partial/\partial t$ die Differentiation nach der Zeit in einem mit diesem Coordinatensystem fest verbundenen Punkte, so gilt:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mathfrak{v}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \mathfrak{v}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \mathfrak{v}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

oder kürzer geschrieben, wenn grad φ den **Anstieg** des Potentiales, d. h. den Vektor mit den Componenten $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial z$ und ( ) das skalare Produkt der eingeklammerten Größen bedeutet:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - (\mathfrak{v} \operatorname{grad} \varphi);$$

daraus folgt:

$$\ddot{\varphi} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \left(\frac{d\mathfrak{v}}{dt} \operatorname{grad} \varphi\right) - 2\left(\mathfrak{v} \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + (\mathfrak{v} \operatorname{grad} (\mathfrak{v} \operatorname{grad} \varphi)).$$

Die Differentialgleichung des Potentials lautet daher, bezogen auf ein derart mitbewegtes Coordinatensystem:

$$2)\quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \left(\frac{d\mathfrak{v}}{dt} \operatorname{grad} \varphi\right) - 2\left(\mathfrak{v} \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + (\mathfrak{v} \operatorname{grad} (\mathfrak{v} \operatorname{grad} \varphi)) - c^2 \Delta \varphi = c^2 \varrho.$$

Den Anfangspunkt des Coordinatensystems werden wir im Falle eines kugelförmigen Elektrons naturgemäß in den Mittel-

1) Näheres hierüber s. Enc. d. Math. Wiss. Bd. V Art. 12 (H. A. Lorentz: Maxwell'sche Theorie) Nr. 7. Bei Benutzung der gewöhnlichen Einheiten wäre ϱ durch $4\pi\varrho$ zu ersetzen.

punkt der Kugel legen; er soll daher schon jetzt der „Mittelpunkt des Elektrons“ heißen.

Die Dichte ϱ ist nach Einführung unseres mitbewegten Coordinatensystems für jeden mit diesem Coordinatensystem fest verbundenen Punkt $x\,y\,z$ zeitlich unveränderlich und zwar außerhalb des Elektrons gleich Null. Wegen dieses Umstandes ist die scheinbar complicirtere Gl. (2) für das bewegte Coordinatensystem in Wirklichkeit einfacher, wie die Gl. (1), in welcher ϱ zeitlich veränderlich ist, so bald das Elektron über den betrachteten Raumpunkt hinweggeht.

§ 2. *Auflösung der unstetigen Dichte ϱ in stetig-harmonische Verteilungen ϱ'.*

Es ist für alles Folgende sehr bequem, die einigermaßen gesetzlose und an der Grenze des Elektrons unstetig wechselnde wirkliche Dichtigkeitsverteilung ϱ durch eine Summe von durchaus stetigen Verteilungen ϱ' zu ersetzen. Das Mittel hierzu bietet die Theorie des Fourier'schen Integrals. Nach dieser gilt (unter bekannten für das Folgende belanglosen Einschränkungen) für eine beliebige im ganzen Raum definirte Funktion $f(x\,y\,z)$ die Formel:

$$f(x\,y\,z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, dl\, dm\, d\varkappa\, d\lambda\, d\mu\, f(\varkappa\,\lambda\,\mu)\, e^{ik(x-\varkappa)+il(y-\lambda)+im(z-\mu)}\,.$$

Die sämtlichen Integrationen nach $k\,l\,m$ und $\varkappa\,\lambda\,\mu$ sind dabei von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstrecken und zwar sind die Integrationen nach $\varkappa\,\lambda\,\mu$ vor denen nach $k\,l\,m$ auszuführen. Wir wenden diese Formel auf unsere Funktion ϱ an und führen die Abkürzungen ein:

$$3)\qquad \varrho' = e^{i(kx+ly+mz)}$$

$$4)\qquad \mathrm{P} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} d\varkappa\, d\lambda\, d\mu\, \varrho(\varkappa\,\lambda\,\mu)\, e^{-i(k\varkappa+l\lambda+m\mu)}.$$

Es gilt dann nach der vorausgeschickten Formel die folgende Darstellung für ϱ:

$$5)\qquad \varrho = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, dl\, dm\, \mathrm{P}\, \varrho':$$

Die Dichteverteilung ϱ' ist eine im ganzen Raum stetige und, wie wir sagen können, harmonisch variable, da sie durch eine Exponentialfunktion mit imaginärem Exponenten dargestellt wird. Die Hülfsgröße P ist von $x\,y\,z$ unabhängig und als Funktion von $k\,l\,m$ aufzufassen. Gl. (5) zeigt nun, daß die wirkliche Dichteverteilung

ϱ gewissermaßen durch Ueberlagerung der harmonischen Verteilungen ϱ' erhalten wird, nachdem wir jede dieser Verteilungen mit dem Faktor $dk\,dl\,dm\,\mathrm{P}$ multiplicirt haben.

Wir führen nun ein Hülfspotential φ' ein, welches in derselben Beziehung zu ϱ' steht, wie φ zu ϱ. Wir definiren nämlich φ' durch die zu 2) analoge Gleichung:

$$2')\quad \frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2}-\left(\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\operatorname{grad}\varphi'\right)-2\left(\mathfrak{v}\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi'}{\partial t}\right)+(\mathfrak{v}\operatorname{grad}(\mathfrak{v}\operatorname{grad}\varphi'))-c^2\Delta\varphi'=c^2\varrho'.$$

Aus φ' berechnet sich φ durch ganz dieselbe Ueberlagerung wie ϱ aus ϱ' nämlich durch die zu (5) analoge Gleichung:

$$5')\qquad \varphi=\int_{-\infty}^{+\infty} dk\,dl\,dm\,\varphi'\mathrm{P}.$$

In der That genügt das so berechnete φ der Gl. (2), wie man erkennt, wenn man auf jedes Glied der Gl. (2') die Operation $\int dk\,dl\,dm\,\mathrm{P}$ anwendet.

Gl. (2') ist aber wegen des gesetzmäßigen Charakters der rechten Seite sehr viel einfacher als Gl. (2). Es ergiebt sich gleichzeitig der weitere Vorteil, daß man sich um die Stetigkeitsbedingungen, die φ an der Oberfläche des Elektrons erfüllen muß, nicht zu kümmern braucht. Diese werden nämlich von selbst erfüllt, sofern man ursprünglich mit den stetigen Dichtigkeitsverteilungen ϱ' und den zu ihnen gehörigen Potentialen φ' rechnet.

§ 3. *Bestimmung des Hülfspotentiales* φ'.

Nach der Bedeutung von ϱ' liegt es nahe φ' in der folgenden Form versuchsweise anzusetzen:

$$6)\qquad \varphi'=e^{i(kx+ly+mz)}F(t).$$

Tragen wir in (2') ein, so folgt nach Forthebung des allen Gliedern gemeinsamen Exponentialfaktors, wenn man mit $\mathfrak{s}$ den aus den Componenten klm gebildeten Vektor und mit s seine Länge bezeichnet, für F die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2F}{dt^2}-2i(\mathfrak{s}\mathfrak{v})\frac{dF}{dt}+\left\{c^2s^2-i\left(\mathfrak{s}\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right)-(\mathfrak{v}\mathfrak{s})^2\right\}F=c^2.$$

Wir vereinfachen diese Gleichung, indem wir

$$F=\alpha f$$

setzen und α so bestimmen, daß das Glied mit df/dt fortfällt.

Zunächst kommt

$$7)\quad \begin{cases} \alpha\frac{d^2f}{dt^2}+2\left(\frac{d\alpha}{dt}-i(\mathfrak{s}\mathfrak{v})\alpha\right)\frac{df}{dt}+ \\ \left\{\frac{d^2\alpha}{dt^2}-2i(\mathfrak{s}\mathfrak{v})\frac{d\alpha}{dt}+c^2s^2\alpha-(\mathfrak{s}\mathfrak{v})^2\alpha-i\left(\mathfrak{s}\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right)\alpha\right\}f = c^2. \end{cases}$$

Wir wählen also α so, daß

$$8)\quad \frac{d\alpha}{dt} = i(\mathfrak{s}\mathfrak{v})\alpha$$

wird; dies liefert für α den Wert:

$$8')\quad \alpha = e^{i(\mathfrak{s}\mathfrak{V}_t)},\quad \text{wobei } \mathfrak{V}_t = \int^t \mathfrak{v}\,dt.$$

Da uns mit jedem partikulären Integral von 8) gedient ist, können wir die untere Grenze in dem Ausdruck für $\mathfrak{V}$, welche die Integrationsconstante vertritt, ganz beliebig wählen. Die Bedeutung des hier eingeführten Vektors $\mathfrak{V}(t)$ ist die des Fahrstrahls von einer beliebig zu wählenden Anfangslage nach dem Orte des Mittelpunktes des Elektrons zur Zeit t. Aus 8) und 8') folgt noch:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = i\left(\mathfrak{s}\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right)\alpha+i(\mathfrak{s}\mathfrak{v})\frac{d\alpha}{dt} = i\left(\mathfrak{s}\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right)\alpha+2i(\mathfrak{s}\mathfrak{v})\frac{d\alpha}{dt}+(\mathfrak{s}\mathfrak{v})^2\alpha.$$

Der Wert der $\{\ \}$ in Gl. (7) wird daraufhin einfach $c^2s^2\alpha$, indem sich alle übrigen Glieder zerstören. Man erhält also die folgende vereinfachte Differentialgleichung für f:

$$9)\quad \frac{d^2f}{dt^2}+c^2s^2f = c^2e^{-i(\mathfrak{s}\mathfrak{V}_t)}.$$

Wir schreiben ein partikuläres Integral dieser Differentialgleichung in der folgenden Form an:

$$10)\quad f = \frac{c}{s}\int_{-\infty}^{t} e^{-i(\mathfrak{s}\mathfrak{V}_u)}\sin cs\,(t-u)\,du.$$

In der That genügt es, diesen Ausdruck in die Gl. (9) einzutragen um einzusehen, daß dieselbe befriedigt wird. Dabei ist zu beachten, daß in (10) t sowohl in der oberen Grenze des Integrals wie unter dem Integralzeichen vorkommt.

Aus unserem partikulären würde das allgemeine Integral der Differentialgleichung (9) durch Hinzufügung von Gliedern der Form $A\cos cst+B\sin cst$ entstehen. Man erkennt aber aus der Betrachtung der stationären Bewegung, daß in diesem speciellen Falle $A = B = 0$ zu nehmen ist, vorausgesetzt, daß man die untere Grenze ∞ in (10) dazu bestimmt, in's Unendliche zu wachsen.

Allerdings ist in dem Ausdrucke (10) der Grenzübergang $\omega = \infty$ unerlaubt, weil dabei das Integral divergent werden würde. Er soll daher erst nach Ausführung der in dem Ausdruck von φ vorgesehenen Integrationen vorgenommen werden.

Indem wir diesen einfachsten Ansatz von dem speciellen Falle der stationären Bewegung auf den allgemeinen Fall übertragen, was natürlich nur durch den Erfolg gerechtfertigt werden kann, wollen wir allgemein

$$A = B = 0, \quad \omega = \infty$$

setzen, letzteres aber erst in dem integrirten Ausdrucke φ, wobei die Zulässigkeit des Grenzüberganges $\omega = \infty$ erst später geprüft werden kann.

Den mutmaßlichen Wert unserer Funktion $F = \alpha f$ schreiben wir daher mit Benutzung der Integrationsvariabeln $\tau = t - u$ und der Abkürzung $\Omega = \omega + t$:

$$F = \frac{c}{s}\int_0^{\Omega} e^{i(\mathfrak{s}\mathfrak{B}_t) - i(\mathfrak{s}\mathfrak{B}_{t-\tau})} \sin cs\tau \, d\tau.$$

Wir führen noch die Abkürzungen ein

$$11) \quad \mathfrak{T} = \mathfrak{B}_t - \mathfrak{B}_{t-\tau} \quad \xi = \int_{t-\tau}^{t} \mathfrak{v}_x \, dt, \quad \eta = \int_{t-\tau}^{t} \mathfrak{v}_y \, dt, \quad \zeta = \int_{t-\tau}^{t} \mathfrak{v}_z \, dt;$$

dabei sind $\xi \eta \zeta$ die Componenten des Fahrstrahls $\mathfrak{T}$ vom Orte des Elektronen-Mittelpunktes zur Zeit $t-\tau$ nach seinem Orte zur Zeit t, welch letzterer jeweils mit dem Anfangspunkte unseres beweglichen Coordinatensystems zusammenfällt. Die Exponentialfunktion in dem Ausdrucke von F kann danach auch geschrieben werden:

$$e^{i(k\xi + l\eta + m\zeta)}.$$

Aus F ergiebt sich nach (6) der Wert von φ' durch Multiplikation mit

$$e^{i(kx + ly + mz)}.$$

Dementsprechend tritt in dem Ausdrucke von φ' die Exponentialfunktion auf

$$e^{i\{k(x+\xi) + l(y+\eta) + m(z+\zeta)\}} = e^{i(\mathfrak{s}\mathfrak{R})},$$

wobei die Componenten

$$11') \qquad x+\xi, \quad y+\eta, \quad z+\zeta$$

zu dem Vektor $\mathfrak{R}$ zusammengefaßt sind. Dieser neue Vektor $\mathfrak{R}$ bedeutet alsdann den Fahrstrahl vom Orte des Elektronenmittelpunktes zur Zeit $t-\tau$ nach dem Orte des Aufpunktes zur Zeit t.

Der Ausdruck unseres Hülfspotentiales φ' lautet nun einfach folgendermaßen:

12) $$\varphi' = \frac{c}{s}\int_0^\Omega e^{i(\mathfrak{s}\mathfrak{R})} \sin cs\tau \, d\tau.$$

§ 4. *Berechnung der Größe* P.

Unsere Hülfsgröße P ist durch 4) definirt. Um sie zu berechnen, müssen wir specielle Annahmen über Gestalt und Ladung des Elektrons machen. Am nächsten liegt es, das Elektron als Kugel (Radius a) vorauszusetzen und es mit gleichförmiger Volum- oder Oberflächenladung (Gesamtbetrag ε) auszustatten.

Bezeichnen wir den Abstand des Integrationspunktes ($\varkappa$, λ, μ) vom Anfangspunkte der Coordinaten $\varkappa\,\lambda\,\mu$ mit σ, so wird bei gleichförmiger Volumladung

$$\text{für } \sigma < a \ldots\ldots \varrho = \text{const} = \frac{3\,\varepsilon}{4\pi a^3}$$
$$\text{„ } a < \sigma \ldots\ldots \varrho = 0.$$

Andrerseits gelangen wir zu einer gleichförmigen Oberflächenladung, indem wir von einer gleichförmig geladenen Kugelschale von der Dicke δ ausgehen und im Endresultat $\delta = 0$ machen. In diesem Falle haben wir

$$\text{für } \sigma < a - \delta \qquad \ldots\ldots \varrho = 0,$$
$$\text{„ } a - \delta < \sigma < a \ldots\ldots \varrho = \frac{\varepsilon}{4\pi a^2 \delta},$$
$$\text{„ } \qquad a < \sigma \quad \ldots\ldots \varrho = 0.$$

Um nun im einen und anderen Falle die Größe P auszuwerten, führen wir statt der „rechtwinkligen Integrationsvariabeln“ $\varkappa\,\lambda\,\mu$ Polarcoordinaten ein. Die eine derselben sei der Abstand σ; zwei zugehörige Winkel ϑ und ψ definiren wir folgendermaßen: Wir denken uns im Raume der $\varkappa\,\lambda\,\mu$ den Punkt $P = (k\,l\,m)$ markirt, der vom Anfangspunkt O den Abstand s hat. Seine Verbindungslinie mit O sei die ausgezeichnete Axe des Polarcoordinatensystems, von welcher aus bez. um welche herum wir die Winkel ϑ und ψ messen. Nennen wir also den variabeln Integrationspunkt $Q = (\varkappa\,\lambda\,\mu)$, so bedeutet ϑ den Winkel POQ und es wird:

$$\cos\vartheta = \frac{k\varkappa + l\lambda + m\mu}{s\sigma}.$$

Der Exponent in dem Ausdrucke von P, Gl. (4), kann daher ge-

schrieben werden $-is\sigma\cos\vartheta$ und es wird, je nachdem es sich um Volum- oder Oberflächenladung handelt

$$P = \frac{3\varepsilon}{4\pi}\left(\frac{1}{2\pi a}\right)^3 \int_0^a \sigma^2 d\sigma \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\psi\, e^{-is\sigma\cos\vartheta}$$

bez.

$$P = \frac{\varepsilon}{4\pi}\left(\frac{1}{2\pi a}\right)^3 \frac{a}{\delta} \int_{a-\delta}^a \sigma^2 d\sigma \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\psi\, e^{-is\sigma\cos\vartheta}.$$

Hier lassen sich die Integrationen nach ϑ und ψ unmittelbar ausführen. Die Integration nach ψ liefert den Faktor 2π, die nach ϑ führt auf

$$\left[\frac{e^{-is\sigma\cos\vartheta}}{is\sigma}\right]_0^\pi = \frac{2\sin s\sigma}{s\sigma}.$$

Man erhält daher bei gleichförmiger Volumladung

$$P = \frac{3\varepsilon}{(2\pi a)^3}\int_0^a \frac{\sin s\sigma}{s}\sigma d\sigma$$

und bei gleichförmiger Oberflächenladung:

$$P = \frac{\varepsilon}{(2\pi a)^3}\frac{a}{\delta}\int_{a-\delta}^a \frac{\sin\sigma s}{s}\sigma d\sigma.$$

Im zweiten Fall ist der Grenzwert des Integrales für $\delta = 0$ unmittelbar hinzuschreiben, er lautet:

13) $$P = \frac{\varepsilon}{(2\pi)^3}\frac{\sin as}{as}.$$

Auch im ersten Fall hat die Ausführung der Integration keine Schwierigkeit, sie ergiebt:

13') $$P = \frac{3\varepsilon}{(2\pi)^3}\frac{\sin as - as\cos as}{(as)^3}.$$

Die beiden Werte (13) und (13') haben das Gemeinsame, daß sie Funktionen von $s = \sqrt{h^2+k^2+l^2}$ sind, die für $s = 0$ den endlichen Wert $\varepsilon/(2\pi)^3$ haben, bei wachsendem s mit abnehmender Amplitude oscilliren und für $s = \infty$ verschwinden. Wir dürfen hiernach wohl annehmen, daß ein ähnliches Verhalten von P auch bei einer ganz beliebigen Dichtigkeitsverteilung im Elektron gelten wird.

§ 5. *Allgemeiner Ausdruck des skalaren Potentials φ.*

Um zu φ überzugehen haben wir nach 5′) das Produkt $P\varphi'$ nach $k\,l\,m$ von $-\infty$ bis $+\infty$ zu integriren, wobei wir der Einfachheit wegen zunächst Oberflächenladung voraussetzen, also die bequemere Formel (13) anwenden wollen. Wir erhalten so bei Vertauschung der Integrationsfolgen nach τ und $k\,l\,m$:

$$\varphi = \frac{\varepsilon c}{(2\pi)^3}\int_0^{\Omega} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\,k\,d\,l\,d\,m\; e^{i(\mathfrak{s}\mathfrak{R})}\,\frac{\sin a s}{a s^2}\sin c s \tau.$$

Um nun die Integrationen nach $k\,l\,m$ auszuführen, definiren wir abermals statt der rechtwinkligen Integrationsvariabeln geeignete Polarcoordinaten. Als solche wählen wir erstens den Abstand s des Integrationspunktes $Q = (k\,l\,m)$ vom Anfangspunkte O; ferner denken wir uns im Raume der $k\,l\,m$ den Vektor $\mathfrak{R}$ von O aus gezogen, dessen Länge beträgt

14) $$R = \sqrt{(x+\xi)^2+(y+\eta)^2+(z+\zeta)^2}.$$

Von $\mathfrak{R}$ aus zählen wir den Winkel Θ, der den Winkel zwischen $\mathfrak{R}$ und dem Strahle OQ bedeuten soll; ferner zählen wir um $\mathfrak{R}$ herum den Winkel Ψ. Es wird dann $(\mathfrak{s}\mathfrak{R}) = sR\cos\Theta$ und

15) $$\varphi = \frac{\varepsilon c}{(2\pi)^3 a}\int_0^{\Omega} d\tau \int_0^{\infty} ds \sin a s \sin c s \tau \int_0^{\pi} \sin\Theta d\Theta \int_0^{2\pi} d\Psi\, e^{isR\cos\Theta}.$$

Die Integrationen nach Ψ und Θ lassen sich ebenso wie im vorigen § diejenigen nach ψ und ϑ ausführen.

Demnach erhalten wir für φ:

16) $$\varphi = \frac{\varepsilon c}{2\pi^2 a}\int_0^{\Omega}\frac{S d\tau}{R}$$

16′) $$S = \int_0^{\infty} \sin a s \sin c s \tau \sin R s \frac{ds}{s}.$$

Auch das Integral S läßt sich ausführen u. zw. liefert dasselbe (vgl. § 8 unter (a)) den Wert $\pi/4$ oder 0, je nachdem sich die drei Längen a, $c\tau$ und R zu einem Dreieck zusammensetzen lassen oder nicht. Schreiben wir

$$S = \frac{\pi}{4}\lambda,$$

so bedeutet λ die Zahl 1 oder 0, je nachdem ein Dreieck aus den Seiten a, $c\tau$ und R möglich oder unmöglich ist. Der Wert unse-

res Potentials wird alsdann einfach:

$$\varphi = \frac{\varepsilon c}{8\pi a}\int_0^{\Omega} \lambda \frac{d\tau}{R}.$$

Die Größe λ ist dabei unter das Integralzeichen gesetzt, weil vorauszusehen ist, daß λ in verschiedenen Intervallen des Integrationsgebietes verschiedene Werte haben wird. Insbesondere ist klar, daß λ bei sehr großen Werten der Variabeln τ gleich Null wird, weil alsdann die Strecke $c\tau$ die beiden anderen Strecken a und R so sehr überwiegt, daß die Bildung eines Dreiecks $(a, c\tau, R)$ unmöglich wird[1]). Hieraus geht unmittelbar hervor, daß die obere Grenze unseres Integrals ohne Weiteres durch ∞ ersetzt werden darf oder (vgl. pag. 6) daß der Grenzübergang $\omega = \infty$, an dem integrirten Ausdruck φ vorgenommen, zulässig ist, wofür wir den Nachweis früher schuldig blieben.

Wir haben daher den folgenden allgemeinen Ausdruck von φ bei gleichförmiger Oberflächenladung gewonnen:

17) $$\varphi = \frac{\varepsilon c}{8\pi a}\int_0^{\infty} \frac{\lambda d\tau}{R}, \qquad (\lambda = 0 \text{ oder } 1).$$

Einen entsprechenden Ausdruck wollen wir für den Fall gleichförmiger Volumladung herleiten. Wir haben dabei statt mit (13) mit dem Werte (13') von P zu rechnen. Es kommt dies darauf hinaus, daß wir in (15) ersetzen:

$$\sin as \text{ durch } 3\,\frac{\sin as - as\cos as}{(as)^3},$$

so daß

18) $$\varphi = \frac{\varepsilon c}{2\pi^2 a}\int_0^{\Omega} \frac{S d\tau}{R}$$

18') $$S = 3\int_0^{\infty} \frac{\sin as - as\cos as}{(as)^3}\sin cs\tau \sin Rs\,\frac{ds}{s}.$$

Das Integral S wird im § 8 unter (b) berechnet werden; dasselbe

1) Hierbei ist stillschweigend vorausgesetzt, daß die Bewegung mit „Unterlichtgeschwindigkeit" vor sich geht. Findet die Bewegung mit „Ueberlichtgeschwindigkeit" statt, so würde umgekehrt die Strecke R für $\tau = \infty$ die beiden anderen Strecken a und $c\tau$ überwiegen und ein Dreieck ebenfalls unmöglich sein. Nur wenn die Geschwindigkeit der Bewegung zur Zeit $t - \tau$ im Limes $\tau = \infty$ gleich der Lichtgeschwindigkeit war, kann eine Ausnahme eintreten und, indem λ für wachsende Werte von τ nicht verschwindet, unser Integral (17) seinen Sinn verlieren.

ist, wenn sich die drei Längen a, $c\tau$ und R zu einem Dreieck zusammensetzen lassen, gleich

$$\frac{3\pi}{8}\left(1-\left(\frac{c\tau-R}{a}\right)^2\right),$$

dagegen, wenn dies nicht möglich ist, gleich

$$\frac{3\pi}{2}\frac{c\tau R}{a^2} \text{ oder } 0,$$

je nachdem a die größte der drei Längen a, $c\tau$, R ist oder nicht. Wir wollen allgemein schreiben

$$S = \frac{\pi}{4}\varkappa,$$

wobei

$$19)\quad \begin{cases} \varkappa = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{c\tau-R}{a}\right)^2\right) \ldots \text{Dreiecksbildung möglich} \\ \varkappa = 6\frac{c\tau R}{a^2} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{„ „ unmöglich, } a > c\tau \text{ und } a > R \\ \varkappa = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{„ „ „ „ , } a < c\tau \text{ oder } a < R. \end{cases}$$

Alsdann ergiebt sich aus (18) die einfache Formel als **allgemeiner Ausdruck von φ bei gleichförmiger Volumladung:**

$$20)\quad \varphi = \frac{\varepsilon c}{8\pi a}\int_0^\infty \frac{\varkappa d\tau}{R}.$$

Auch hier ist es nämlich offenbar erlaubt, die obere Grenze des Integrals gleich ∞ zu setzen, weil bei sehr großem τ ein Dreieck aus den Seiten $a, c\tau$ und R sicherlich nicht gebildet werden kann und überdies $c\tau > a$ ist, so daß dann für $\varkappa$ der letzte der Werte (19), nämlich $\varkappa = 0$ gilt.

§ 6. *Allgemeiner Ausdruck des Vektorpotentials* $\mathfrak{A}$.

Bei der Bestimmung des Vektorpotentials ist zu unterscheiden, ob das Elektron lediglich die bisher betrachtete Translationsgeschwindigkeit hat, oder ob es außerdem noch Rotationen ausführt, deren Vorhandensein bei der Bestimmung des skalaren Potentials belanglos war:

1. Sehen wir zunächst von der Rotation ab und nennen wir $\mathfrak{A}_1$ den allein von der Translation herrührenden Bestandteil von $\mathfrak{A}$, so werden die Formeln für das Vektorpotential $\mathfrak{A}_1$ fast genau mit denen für das skalare Potential φ identisch.

Beim Uebergange von φ zu $\mathfrak{A}_1$ haben wir in Gl. (1) und daher auch in (2), (2') etc. ϱ zu ersetzen durch $\mathfrak{v}\varrho/c$. Ferner haben wir wegen des Vektorcharakters von $\mathfrak{A}_1$ den Term ($\mathfrak{v}$ grad φ) zu ersetzen durch

$$(\mathfrak{v}\ \mathrm{grad})\ \mathfrak{A}_1,$$

wobei also der Vektor $\mathfrak{v}$ mit der Vektoroperation grad skalar zu multipliciren und die so entstehende Operation auf den Vektor $\mathfrak{A}_1$ anzuwenden ist. Die weiteren Rechnungen bleiben durch diese Abänderung unberührt.

Darauf definiren wir ein Vektor-Hülfspotential $\mathfrak{A}_1'$, welches der Gl. (2') genügt mit der Modifikation, daß darin ϱ' ersetzt ist durch

$$\frac{\mathfrak{v}\varrho'}{c}.$$

Dieses Hilfspotential bestimmt sich wieder genau durch die Formeln des § 3, wenn man nur in (10) unter dem Integralzeichen den Faktor $\mathfrak{v}_u/c$ und dementsprechend in (12) unter dem Integralzeichen den Faktor $\mathfrak{v}_{t-\tau}/c$ hinzufügt wobei u und $t-\tau$ den Zeitpunkt angeben, für welchen der Wert der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ zu bilden ist. Die weiteren Rechnungen verlaufen genau so wie früher. Infolge dessen erhält man statt der Endformeln 17) und 20) die folgende allgemeine Darstellung des Translationsbestandteils des Vektorpotentials bei gleichförmiger Oberflächenladung

21) $$\mathfrak{A}_1 = \frac{\varepsilon}{8\pi a}\int_0^\infty \frac{\lambda \mathfrak{v}_{t-\tau}\, d\tau}{R},$$

bei gleichförmiger Volumladung

22) $$\mathfrak{A}_1 = \frac{\varepsilon}{8\pi a}\int_0^\infty \frac{\varkappa \mathfrak{v}_{t-\tau}\, d\tau}{R}$$

mit der im vorigen § angegebenen Bedeutung von λ und $\varkappa$.

2. Das Elektron führe außer der Translation $\mathfrak{v}$ eine Rotation $\mathfrak{w}$ um einen beliebigen Durchmesser aus, wobei die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ nach Größe und Axe als gegebene Funktion der Zeit anzusehen ist. Da sich die von der Translation und der Rotation herrührenden Bestandteile glatt überlagern, soll jetzt lediglich der Rotationsbestandteil des Vektorpotentials betrachtet und mit $\mathfrak{A}_2$ bezeichnet werden. Mit ihm ist der Translationsbestandteil nachträglich durch vektorielle Addition zu vereinigen. Wegen der Ortsveränderung des Elektrons ist aber $\mathfrak{A}_2$ auch jetzt

auf das bewegliche Coordinatensystem zu beziehen und durch die Differentialgleichung (2) zu bestimmen, in welcher ϱ zu ersetzen ist, durch

$$\varrho \frac{[\mathfrak{w}\mathfrak{r}]}{c};$$

es giebt nämlich das Vektorprodukt $[\mathfrak{w}\mathfrak{r}]$ nach Richtung und Größe die im Abstande $\mathfrak{r}$ vom Mittelpunkte wegen der Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ vorhandene Lineargeschwindigkeit an.

Wir definiren jetzt statt der früheren skalaren Größe P einen Vektor P mit den drei Componenten

$$P_x\ P_y\ P_z;$$

die letzteren sollen sich aus der früheren Gl. (4) ergeben, wenn wir darin unter dem Integralzeichen bez. die Faktoren

$$\varkappa\ \lambda\ \mu$$

hinzufügen.

Ferner definiren wir statt φ' ein Vektorhilfspotential $\mathfrak{A}_s'$, welches, ebenso wie früher φ', durch Gl. (2') definirt sein soll, nachdem darin ϱ' durch $\varrho'\mathfrak{w}/c$ ersetzt ist.

Man übersieht dann leicht, daß zur Bestimmung von $\mathfrak{A}_s$ an Stelle von 5') die Gleichung dient:

$$23)\qquad \mathfrak{A}_s = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, dl\, dm\, [\mathfrak{A}_s' P].$$

Um $\mathfrak{A}_s$ zu finden haben wir uns also zunächst mit der Bestimmung von $\mathfrak{A}_s'$ und P zu befassen.

Die Bestimmung von $\mathfrak{A}_s'$ geschieht ebenso wie die von φ' durch Gl. (12), nachdem darin unter dem Integralzeichen der Faktor $\mathfrak{w}_{t-\tau}/c$ hinzugefügt ist, wo $t-\tau$ das Argument von $\mathfrak{w}$ angiebt:

$$24)\qquad \mathfrak{A}_s' = \frac{1}{s}\int_0^{\Omega} e^{i(\mathfrak{s}\mathfrak{R})}\, \mathfrak{w}_{t-\tau}\, \sin cs\tau\, d\tau.$$

Dagegen erfordert die Berechnung des Vektors P einige Vorbereitungen. In § 4 benutzten wir statt der $\varkappa\,\lambda\,\mu$ Polarcoordinaten $\sigma\,\vartheta\,\psi$, die uns auch jetzt dienen werden. Es ist aber jetzt übersichtlicher, den Uebergang von den $\varkappa\,\lambda\,\mu$ zu den Polarcoordinaten $\sigma\,\vartheta\,\psi$ in zwei Schritte zu zerlegen, indem man noch ein rechtwinkliges Coordinatensystem $K\,\Lambda\,M$ dazwischenschaltet, dessen erste Axe ebenso wie die ausgezeichnete Polaraxe ($\vartheta = 0$) durch den Punkt mit den Coordinaten $k\,l\,m$ hindurchgehen, d. h. mit dem Vektor $\mathfrak{s}$ zusammenfallen soll. Die Richtungscosinus dieser Axe

gegen die Axen $\varkappa\,\lambda\,\mu$ sind dann ersichtlich k/s, l/s, m/s und die Transformationsformeln von den $\varkappa\,\lambda\,\mu$ zu den $K\,\Lambda\,M$ werden:

$$\varkappa = \frac{k}{s}K + \cdots = \frac{k}{s}\sigma\cos\vartheta + \cdots$$

$$\lambda = \frac{l}{s}K + \cdots = \frac{l}{s}\sigma\cos\vartheta + \cdots$$

$$\mu = \frac{m}{s}K + \cdots = \frac{m}{s}\sigma\cos\vartheta + \cdots$$

Die nicht hingeschriebenen mit Λ oder M proportionalen Glieder enthalten beim Uebergang zu den Polarcoordinaten sämtlich einen der beiden Faktoren $\sin\psi$ oder $\cos\psi$. Denken wir uns nun in dem Ausdruck 4) von P verabredetermaßen die Faktoren $\varkappa$ bez. $\lambda\,\mu$ hinzugefügt, so fallen diese Glieder bei der Integration nach ψ fort, während dieselbe Integration in den hingeschriebenen ersten Gliedern den Faktor 2π ergiebt. Bei der Integration nach ϑ ferner haben wir es in allen drei Componenten von P mit dem Ausdrucke

25) $$\int_0^\pi e^{-is\sigma\cos\vartheta}\cos\vartheta\sin\vartheta d\vartheta = -2i\frac{\sin s\sigma - s\sigma\cos s\sigma}{(s\sigma)^2}$$

zu thun. Infolgedessen ergiebt sich, wenn wir alle drei Componenten vektoriell zusammenfassen, für P der Wert

$$\mathrm{P} = \frac{-\varepsilon i\mathfrak{s}}{(2\pi a s)^3}\,3\int_0^a(\sin s\sigma - s\sigma\cos s\sigma)\,\sigma\,d\sigma$$

im Falle gleichförmiger Volumladung und

$$\mathrm{P} = \frac{-\varepsilon i\mathfrak{s}}{(2\pi a s)^3}\,\frac{a}{\delta}\int_{a-\delta}^a(\sin s\sigma - s\sigma\cos s\sigma)\,\sigma\,d\sigma$$

im Falle gleichförmiger Oberflächenladung.

Beide Integrale lassen sich leicht ausführen; insbesondere findet man im letzteren Falle unmittelbar:

26) $$\mathrm{P} = \frac{-\varepsilon i\mathfrak{s}}{(2\pi)^3}\,\frac{\sin as - as\cos as}{as^3},$$

im ersteren Falle dagegen

26') $$\mathrm{P} = \frac{-\varepsilon i\mathfrak{s}}{(2\pi)^3}\,3\,\frac{3\sin as - 3\,as\cos as - (as)^2\sin as}{a^3 s^5}.$$

Wir setzen jetzt die Werte von $\mathfrak{A}_1'$ und P in die Gl. (23) ein, um $\mathfrak{A}$ zu finden. Dabei führen wir statt der Integrationsvariabeln $k\,l\,m$ die früheren Polarcoordinaten $s\,\Theta\,\Psi$ ein unter Zwischen-

schaltung eines rechtwinkligen Systems KLM, dessen erste Axe mit der Polaraxe $\Theta = 0$ zusammenfallen, also wie früher mit dem Vektor $\mathfrak{R}$ (s. Gl. (11')) übereistimmen soll. Ihre Richtungscosinus gegen die Axen klm sind bez.

$$\frac{x+\xi}{R}, \quad \frac{y+\eta}{R}, \quad \frac{z+\zeta}{R}.$$

Die Transformationsformeln zwischen den klm und den KLM lauten daher:

$$k = \frac{x+\xi}{R} K + \cdots = \frac{x+\xi}{R} s \cos \Theta + \cdots$$

$$l = \frac{y+\eta}{R} K + \cdots = \frac{y+\eta}{R} s \cos \Theta + \cdots$$

$$m = \frac{z+\zeta}{R} M + \cdots = \frac{z+\zeta}{R} s \cos \Theta + \cdots$$

Da sich der Wert von P proportional mit $\mathfrak{s}$ ergab, so ist jeder der Terme, aus denen sich $[\mathfrak{A}_2' \mathrm{P}]$ zusammensetzt, mit einem der Faktoren klm behaftet. Führen wir nun die vorgeschriebenen Integrationen in Polarcoordinaten aus, so fallen wieder die nicht hingeschriebenen Glieder der hkl bei der Integration nach Ψ fort. Bei der Integration nach Θ tritt abermals der Ausdruck (25) auf, wenn wir darin $-i$ mit $+i$ und σ mit R vertauschen.

Für $\mathfrak{A}_2$ erhält man so

$$\mathfrak{A}_2 = \frac{\varepsilon}{2\pi^2} \int_0^{\Omega} [\mathfrak{w}_{t-\tau} \mathfrak{R}] \frac{S d\tau}{R^2};$$

dabei hat S bei gleichförmiger Oberflächen- bez. Volumladung die Bedeutung:

$$27) \quad S = \int_0^{\infty} \frac{\sin as - as \cos as}{as} \frac{\sin Rs - Rs \cos Rs}{Rs} \sin cs\tau \frac{ds}{s}$$

bezw.

$$27') \quad S = 3 \int_0^{\infty} \frac{3 \sin as - as \cos as - (as)^2 \sin as}{(as)^3} \frac{\sin Rs - Rs \cos Rs}{Rs} \sin cs\tau \frac{ds}{s}.$$

Wir setzen noch im ersten oder zweiten Falle

$$S = \frac{\pi}{4} \lambda' \frac{R}{a} \text{ oder } S = \frac{\pi}{4} \varkappa' \frac{R}{a};$$

ferner bemerken wir, daß auf Grund der sogleich anzugebenden

Werte von λ' und $\varkappa'$ diese für sehr große Werte von τ verschwinden, so daß wir die obere Grenze unseres Integrals $\Omega = \infty$ setzen dürfen.

Die definitiven Werte des Rotationsbestandteiles des Vektorpotentials lauten daraufhin bei Oberflächenladung

$$28)\qquad \mathfrak{A}_2 = \frac{\varepsilon}{8\pi a}\int_0^\infty [\mathfrak{w}_{t-\tau}\,\mathfrak{R}]\frac{\lambda'\,d\tau}{R}$$

und bei Volumladung

$$29)\qquad \mathfrak{A}_2 = \frac{\varepsilon}{8\pi a}\int_0^\infty [\mathfrak{w}_{t-\tau}\,\mathfrak{R}]\frac{\varkappa'\,d\tau}{R}.$$

Was die Bedeutung von λ' und $\varkappa'$ angeht, so wird in § 8 gezeigt werden, daß

$$30)\qquad \lambda' = \frac{a^2+R^2-c^2\tau^2}{2R^2} \text{ bez. } = 0$$

ist, je nachdem aus den drei Strecken a, R und $c\tau$ ein Dreieck gebildet werden kann oder nicht. Ebenda wird gezeigt, daß unsere Größe $\varkappa'$ den Wert hat

$$31)\qquad \varkappa' = \frac{3}{2}\left(\frac{a^2+2R^2-2(c\tau)^2}{4R^2} - \frac{(R-c\tau)^2(3R+c\tau)}{4a^2R^2}\right)$$

wenn sich die Strecken $a, R, c\tau$ zu einem Dreieck vereinigen lassen; daß dagegen wenn dies nicht der Fall ist, gilt:

$$31')\qquad \varkappa' = 6\frac{Rc\tau}{a^2} \text{ bez. } 0$$

je nachdem a die größte der drei Seiten $a, R, c\tau$ ist oder nicht.

Beiläufig berechnet man leicht, daß div. $\mathfrak{A}_2 = 0$, daß also der Rotationsbestandteil des Vektorpotentials quellenfrei verteilt ist; ferner verificirt man an unseren Formeln einen allgemeingültigen Zusammenhang zwischen $\mathfrak{A}_1$ und φ, nämlich

$$\operatorname{div} \mathfrak{A}_1 = -\frac{1}{c}\dot{\varphi} = -\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t} - (\mathfrak{v}\,\text{grad}'\varphi)\right\}.$$

§ 7. *Deutung der gefundenen Ausdrücke und Vergleich mit den bisher bekannten Darstellunyen.*

Wir stellen uns die Lage des Elektrons zur Zeit t vor (Fig. 1) und ziehen von seinem Mittelpunkte O aus den Vektor $\mathfrak{r}$, dessen Componenten x, y, z die Coordinaten des Aufpunktes A sind. Ferner markiren wir die Bahn, die der Mittelpunkt des Elektrons in der vorangehenden Zeit beschrieben hat, sowie seine Lage P in dem um das Zeitintervall τ zurückliegenden Zeitpunkte $t-\tau$. Um P herum beschreiben wir die Kugel vom Radius a, die der Oberfläche des Elektrons zur Zeit $t-\tau$ entspricht. Verbinden wir P mit O, so erhalten wir den Vektor $\mathfrak{T}$ mit den Componenten ξ, η, ζ (Gl. 11) und es ist $\mathfrak{T}+\mathfrak{r}$ unser früherer Vektor $\mathfrak{R}$ (Gl. 11').

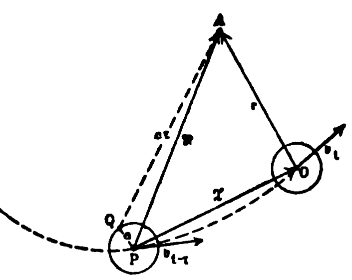


Fig. 1.

Die Bedingung nun, daß sich aus den Strecken $R, c\tau$ und a ein Dreieck bilden lassen solle, kommt darauf hinaus, daß es auf der Oberfläche des Elektrons in seiner dem Zeitpunkt $t-\tau$ entsprechenden Lage solche Punkte Q gebe, von denen ein mit Lichtgeschwindigkeit auslaufender Potentialwert den Aufpunkt gerade zur Zeit t erreicht. Das in diesem Falle vorhandene Dreieck mit den Seiten $QA = c\tau$, $QP = a$ und $PA = R$ ist aus der Figur zu ersehen. Zumal im Falle von Oberflächenladung gestatten die Ausdrücke φ und $\mathfrak{A}$ eine einfache Deutung. Sie besagen gleichmäßig, daß sich der Potentialwert zur Zeit t aus allen früher ausgesandten Potentialwerten (algebraisch oder vektoriell) zusammensetzt, wobei aber nur diejenigen Zeitpunkte in Betracht kommen und als „wirksame Zeitpunkte" bezeichnet werden sollen, für welche die in der Fig. verdeutlichte Bedingung der Dreiecksmöglichkeit erfüllt ist. Der Beitrag jedes wirksamen Zeitelementes $d\tau$ zu dem Werte des skalaren Potentials, des Translations- oder Rotationsbestandteiles des Vektorpotentials beläuft sich nun nach Gl. (17), (21) oder (28) auf:

$$\frac{\varepsilon c}{8\pi aR}\,d\tau,\; \frac{\varepsilon\mathfrak{v}}{8\pi aR}\,d\tau \quad \text{bez.}\; \frac{\varepsilon[\mathfrak{w}\mathfrak{R}]}{8\pi aR}\,\frac{a^2+R^2-c^2\tau^2}{R^2}\,d\tau.$$

Dabei sind für $\mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \mathfrak{R}$ und R diejenigen Werte zu nehmen, die jene Größen in dem wirksamen Zeitpunkte hatten. Beispiels-

weise besagt die letzte der drei angeschriebenen Formeln u. A., daß der Beitrag zum Rotationsbestandteil des Vektorpotentials senkrecht steht auf der Richtung von $\mathfrak{R}$ und der Drehaxe des Elektrons zur Zeit $t-\tau$.

Auch im Falle gleichförmiger Volumladung gestaltet sich unsere Deutung für äußere Aufpunkte, d. h. für solche, die in dem wirksamen Zeitpunkte außerhalb des Elektrons lagen, ebenso. Der Beitrag, den jedes wirksame Zeitelement $d\tau$ zu den fraglichen drei Potentialwerten leistet, ist hier

$$\frac{3\varepsilon c}{16\pi a R}\left(1-\left(\frac{c\tau-R}{a}\right)^2\right)d\tau,\quad \frac{3\varepsilon \mathfrak{v}}{16\pi a R}\left(1-\left(\frac{c\tau-R}{a}\right)^2\right)d\tau \text{ bez.}$$

$$\frac{3\varepsilon[\mathfrak{w}\mathfrak{R}]}{16\pi a R}\left(\frac{a^2+2R^2-2c^2\tau^2}{4R^2}-\frac{(R-c\tau)^3(3R+c\tau)}{4a^2R^2}\right)d\tau.$$

Handelt es sich dagegen um einen inneren Aufpunkt, d. h. einen Punkt, der zur Zeit $t-\tau$ im Inneren des Elektrons lag, so daß $R<a$, und ist auch $c\tau<a$, so ist die Definition der wirksamen Zeitpunkte dahin abzuändern, daß auch Zeitpunkte, für die ein Dreieck aus den Seiten $R, c\tau$ und a unmöglich ist, bei den Potentialwerten mitwirken, und zwar mit den Beiträgen:

$$\frac{3\varepsilon c}{4\pi a}\frac{c\tau}{a^2}d\tau,\quad \frac{3\varepsilon \mathfrak{v}}{4\pi a}\frac{c\tau}{a^2}d\tau,\quad \frac{3\varepsilon[\mathfrak{w}\mathfrak{R}]}{4\pi a}\frac{c\tau}{a^2}d\tau.$$

Die besondere Leistung unserer Formeln besteht darin, daß sie die Zusammenwirkung der verschiedenen Potentialwerte, die im Aufpunkte von den verschiedenen Lagen des Elektrons her zusammentreffen, durch ein einfaches Integral nach der Zeit über die vom Mittelpunkte des Elektrons gerechnete Entfernung R darstellen.

Wohlbekannt als sog. „verzögerte Potentialwerte" sind andere Formeln[1]), in denen φ und $\mathfrak{A}$ (je nach der Art der Ladung) durch ein Integral über die Oberfläche oder über das Volumen des Elektrons dargestellt werden. Abgesehen davon aber, daß sie im Gegensatz zu unsern Formeln noch die Auswertung eines doppelten oder dreifachen Integrals erfordern, enthalten sie die Entfernung des Aufpunktes von den Oberflächen- oder Volumelementen des Elektrons, und zwar die Entfernung von derjenigen Lage dieser Elemente, die sie in dem wirksamen Augenblicke $t-\tau$ einnahmen. Man kann dieses so ausdrücken, daß in den Formeln jener ver-

1) Vgl. z. B. Encykl. d. Math. Wiss. V Art. 13 (H. A. Lorentz: Elektronentheorie) Nr. 5.

zögerten Potentiale nicht über die wirkliche Gestalt des Elektrons, sondern über eine nach Maaßgabe der vorangehenden Bewegung deformirte Gestalt zu integriren ist. Jede besondere Bewegung würde von diesem Standpunkt aus die Betrachtung einer besonderen und complicirten Deformation des Elektrons nötig machen, während bei der Aufstellung unserer Formeln von einer solchen Deformation nirgends die Rede war.

Meinem Freunde von Mangoldt verdanke ich indessen eine Interpretation meiner Formeln, durch die die hier betonte Gegensätzlichkeit beider Methoden gehoben wird. Man kann nämlich meine Formeln direkt aus der Vorstellung des deformirten Elektrons ableiten, wenn man um den Aufpunkt Kugeln von dem veränderlichen Radius $c\tau$ beschreibt, durch diese das deformirte Elektron in Schichten von der Dicke $c\,d\tau$ zerlegt und den Beitrag jeder Schicht zum Potentialwerte auf elementarem Wege bestimmt. Am einfachsten gelingt dieses bei gleichförmiger Volumladung; der Fall gleichförmiger Oberflächenladung läßt sich darauf zurückführen, indem man die Oberfläche durch eine dünne Kugelschale ersetzt. Die Bestimmung des Rotationsbestandteiles $\mathfrak{A}_2$ macht auch bei dieser Betrachtung etwas mehr Umstände als die von φ und $\mathfrak{A}_1$ und erfordert Coordinatentransformationen wie sie in § 6 unter 2) angegeben wurden.

Ersichtlich ordnet man bei dem zuletzt angegebenen Verfahren die Integration über das Volumen des Elektrons nach der zeitlichen Reihenfolge der Wirksamkeit seiner einzelnen Schichten an und verwandelt so das dreifache (oder zweifache) räumliche in ein einfaches nach der Zeit genommenes Integral.

Gegenüber diesem sehr viel kürzeren Verfahren hat unser ursprünglicher Weg den Vorteil, daß er uns nicht nur mit den ausgerechneten Werten der $\varkappa$, λ, $\varkappa'$, λ' sondern auch mit den zugehörigen, durch ein einheitliches analytisches Gesetz definirten Integralen S ausstattet, welche für die dynamischen Betrachtungen der folgenden Note bequemer sind, wie die in den verschiedenen Integrationsintervallen durch verschiedene Ausdrücke gegebenen Werte der $\varkappa\,\lambda$ selbst.

§ 8. *Nachträglicher Beweis einiger Integralformeln.*

a) Wir gehen aus von der bekannten Formel:

$$\int_0^\infty \sin xy \frac{dx}{x} = \pm \frac{\pi}{2} \cdots \text{ je nach dem } y \gtrless 0;$$

auf diese führen wir das folgende Integral (a) zurück, das mit der ersten der in § 5 betrachteten Größen S bis auf die Bezeichnung übereinstimmt:

$$(a) = \int_0^\infty \sin xy \sin xz \sin xt \frac{dx}{x}.$$

Die drei Größen y, z, t setzen wir als positiv voraus; außerdem dürfen wir, da keine derselben in unserer Formel vor der anderen ausgezeichnet ist, ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit annehmen, daß

$$y > z > t.$$

Wir benutzen darauf die bekannten Formeln:

$$\sin xz \sin xt = \frac{1}{2}(\cos x(z-t) - \cos x(z+t))$$

$$\sin xy \cos x(z-t) = \frac{1}{2}(\sin x(y+z-t) + \sin x(y-z+t))$$

etc. und erhalten statt (a):

$$(a) = \frac{1}{4}\int_0^\infty \Big\{ \sin x(y+z-t) + \sin x(y-z+t) - \sin x(y+z+t) - \sin x(y-z-t) \Big\} \frac{dx}{x}.$$

Nun sind die drei Größen.

$$y+z-t, \quad y-z+t, \quad y+z+t$$

wegen unserer Ungleichung $y > z > t$ sicher positiv; dagegen ist

$$y-z-t$$

positiv oder negativ, je nachdem ein Dreieck mit den drei Seiten y, z, t unmöglich oder möglich ist. Nach der vorangeschickten Integralformel wird daher

$$(a) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

wenn die drei Längen y, z, t sich nicht zu einem Dreieck vereinigen lassen, dagegen

$$(a) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4},$$

wenn ein Dreieck mit den Seiten y, z, t möglich ist.

b) Auf das Integral (a) führen wir das folgende Integral (b) zurück, welches bis auf die Bezeichnung und den Faktor 3 mit

der zweiten der in § 5 betrachteten Größen S übereinstimmt:

$$(b) = \int_0^\infty \frac{\sin xy - xy \cos xy}{(xy)^2} \sin xz \sin xt \frac{dx}{x}.$$

Ersichtlich darf darin $z > t$ und y, z, t als positiv vorausgesetzt werden. Indem man y unter dem Integralzeichen von (a) durch eine neue Integrationsvariable η ersetzt, überzeugt man sich, daß zwischen (b) und (a) der Zusammenhang besteht

$$(b) = \frac{1}{y^2} \int_0^y (a) \eta \, d\eta.$$

Ist nun das Dreieck (y, z, t) möglich, so ist am oberen Ende des Integrationsintervalles $(a) = \pi/4$, am unteren Ende jedenfalls $(a) = 0$. Die Grenze zwischen beiden Teilen des Integrationsvalles bildet der Wert

$$\eta = z - t$$

der Integrationsvariabeln, für den die Dreiecksbildung aus η, z und t eben möglich zu werden beginnt. Es ist also

$$(b) = \frac{\pi}{4} \frac{1}{y^2} \int_{z-t}^y \eta \, d\eta = \frac{\pi}{8}\left(1 - \frac{(z-t)^2}{y^2}\right).$$

Ist die Dreiecksbildung (y, z, t) unmöglich und zwar deshalb, weil y zu groß (nämlich größer als $z + t$) ist, so ist am oberen und unteren Ende des Integrationsintervalles $(a) = 0$, dagegen für einen gewissen mittleren Teil desselben $(a) = \pi/4$, nämlich für das Gebiet $z - t < \eta < z + t$. Man hat dann

$$(b) = \frac{\pi}{4} \frac{1}{y^2} \int_{z-t}^{z+t} \eta \, d\eta = \frac{\pi}{8} \frac{(z+t)^2 - (z-t)^2}{y^2} = \frac{\pi}{2} \frac{zt}{y^2}.$$

Ist die Dreiecksbildung (y, z, t) unmöglich und zwar deshalb, weil einer der beiden anderen Werte (z oder t) zu groß ist, so ist sie um so mehr unmöglich, wenn man y durch einen kleineren Wert η ersetzt. Es ist deshalb für das ganze Integrationsintervall $(a) = 0$ und daher auch

$$(b) = 0.$$

c) Wir gehen zu dem Integral

$$(c) = \int_0^\infty \frac{\sin xy - xy \cos xy}{xy} \frac{\sin xz - xz \cos xz}{xz} \sin xt \frac{dx}{x}$$

über, welches bis auf die Bezeichnung mit dem ersten der in § 6 betrachteten Integrale S übereinstimmt. Dabei darf ersichtlich

ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden, daß $y > z$; es sind dann noch zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich $y < t$ und $y > t$. Indem man z unter dem Integralzeichen von (b) durch eine Integrationsvariable ζ ersetzt und nach dieser von 0 bis z integrirt, erkennt man, daß

$$(c) = -\frac{y}{z}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^z (b)\,\zeta\, d\zeta.$$

Das Dreieck $(y z t)$ ist möglich und es ist $y < t$. Dann ist auch das Dreieck (y, ζ, t) möglich, solange $\zeta > \zeta_1$, $\zeta_1 = t - y$. Ist dagegen $\zeta < \zeta_1$, so wird das Dreieck (y, ζ, t) unmöglich, wobei gleichzeitig y wegen $y < t$ nicht die größte der drei fraglichen Zahlen y, ζ, t bedeutet. Infolgedessen ist

$$\text{für } z > \zeta > \zeta_1 \quad (b) = \frac{\pi}{8}\left(1 - \frac{(\zeta - t)^2}{y^2}\right)$$

$$\text{„} \quad \zeta_1 > \zeta > 0 \quad (b) = 0.$$

Daraus folgt

$$\int_0^z (b)\,\zeta\, d\zeta = \frac{\pi}{8}\int_{t-y}^z \left(1 - \frac{(\zeta - t)^2}{y^2}\right)\zeta\, d\zeta$$

und durch Differentiation nach t

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^z (b)\,\zeta\, d\zeta = \frac{\pi}{4}\int_{t-y}^z \frac{(\zeta - t)\,\zeta}{y^2}\, d\zeta,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^z (b)\,\zeta\, d\zeta = \frac{\pi}{4y^2}\left(yt - y^2 - \int_{t-y}^z \zeta\, d\zeta\right) = \frac{\pi}{8}\,\frac{t^2 - y^2 - z^2}{y^2}.$$

Somit endlich

$$(c) = \frac{\pi}{8}\,\frac{y^2 + z^2 - t^2}{yz}.$$

Das Dreieck $(y z t)$ ist möglich und es ist $y > t$. Wir haben jetzt $\zeta_1 = y - t$ zu definiren und zu unterscheiden ob $\zeta > \zeta_1$ oder $\zeta < \zeta_1$. Da jetzt y die größte der drei Zahlen y, ζ, t ist, so haben wir für $0 < \zeta < \zeta_1$ die Formel

$$(b) = \frac{\pi}{2}\,\frac{\zeta t}{y^2}$$

anzuwenden. Infolge dessen wird jetzt

$$\int_0^z (b)\,\zeta\, d\zeta = \frac{\pi}{2}\int_0^{y-t} \frac{\zeta^2 t}{y^2}\, d\zeta + \frac{\pi}{8}\int_{y-t}^z \left(1 - \frac{(\zeta - t)^2}{y^2}\right)\zeta\, d\zeta.$$

Durch zweimalige Differentiation nach t ergiebt sich von hieraus gerade derselbe Wert wie vorher; es wird daher auch jetzt:

$$(c) = \frac{\pi}{8} \frac{y^2 + z^2 - t^2}{yz}.$$

Das Dreieck $(y z t)$ ist unmöglich, und es ist $y < t$. Dann ist es um so mehr unmöglich, wenn wir z durch den kleineren Wert ζ ersetzen. Es wird daher im ganzen Integrationsintervall $(b) = 0$ und daher auch

$$(c) = 0.$$

Ist aber die Dreiecksbildung $(y z t)$ unmöglich, und $y > t$, so ergiebt sich

$$\int_0^z (b) \zeta \, d\zeta = \frac{\pi}{2} \int_0^z \frac{\zeta^2 t}{y^3} \, d\zeta$$

Dieser Ausdruck verschwindet bei zweimaler Differentiation nach t. Es ergiebt sich also auch jetzt:

$$(c) = 0.$$

d) Wir betrachten schließlich das Integral

$$(d) = \int_0^\infty \frac{3 \sin xy - 3\, xy \cos xy - (xy)^2 \sin xy}{(xy)^3} \frac{\sin xz - xz \cos xz}{xz} \sin xt \frac{dx}{x},$$

welches bis auf die Bezeichnung und bis auf den Faktor 3 mit dem zweiten der Integrale S des § 6 übereinstimmt. Indem man in (c) y unter dem Integralzeichen durch eine Integrationsvariable η ersetzt und $\eta^2 (c)$ von 0 bis y integrirt, erkennt man leicht, daß

$$(d) = \frac{1}{y^3} \int_0^y (c) \, \eta^2 \, d\eta.$$

Ist das Dreieck (y, z, t) möglich, so ist auch das Dreieck (η, z, t) möglich für alle Werte von η, die der Bedingung genügen $y > \eta > |z - t|$, dagegen unmöglich für alle Werte von η, für die $|z - t| > \eta > 0$. Man hat daher

$$(d) = \frac{\pi}{8 y^3} \int_{|z-t|}^y \frac{\eta^2 + z^2 - t^2}{z} \, \eta \, d\eta.$$

Die Ausrechnung ergiebt:

$$(d) = \frac{\pi}{16\, y^3 z} \left\{ \frac{y^4 - (z-t)^4}{2} + (z^2 - t^2)(y^2 - (z-t)^2) \right\}$$

$$= \frac{\pi}{16} \left\{ \frac{y^2 + 2z^2 - 2t^2}{2yz} - \frac{(z-t)^3 (3z + t)}{2 y^3 z} \right\}.$$

Das Dreieck $(y\,z\,t)$ ist unmöglich, weil y zu groß, nämlich $> z+t$ ist. Dann ist das Dreieck $(\eta\,z\,t)$ möglich für alle Werte $z+t>\eta>|z-t|$, dagegen unmöglich für alle Werte $\eta>z+t$ und $\eta<|z-t|$. Daher ergiebt sich in diesem Falle

$$
\begin{aligned}
(d) &= \frac{\pi}{8y^3}\int_{|z-t|}^{z+t}\frac{\eta^2+z^2-t^2}{z}\,\eta\,d\eta \\
&= \frac{\pi}{32\,y^3 z}\Big\{(z+t)^4-(z-t)^4+2(z^2-t^2)\big((z+t)^2-(z-t)^2\big)\Big\} \\
&= \frac{\pi}{32\,y^3 z}\Big\{(z+t)^2-(z-t)^2\Big\}\Big\{(z+t)^2+(z-t)^2+2(z^2-t^2)\Big\} \\
&= \frac{\pi}{2}\,\frac{z^2 t}{y^3}.
\end{aligned}
$$

Das Dreieck $(y\,z\,t)$ ist unmöglich, weil y zu klein, nämlich $<|z-t|$ ist. Dann ist auch das Dreieck $(\eta\,z\,t)$ für alle Werte $\eta<y$ unmöglich und man erhält unmittelbar

$$(d) = 0.$$

§ 9. *Näherungsformeln für das Feld. Die Potentialgesetze von Liénard und Wiechert.*

Indem wir alle speciellen Anwendungen für eine spätere Note zurückstellen, wollen wir hier nur die allgemeinen Näherungswerte der Potentiale φ und $\mathfrak{A}$ ableiten, die sich bei hinreichender Entfernung des Aufpunktes vom Elektron von selbst darbieten. Die Bedingung ihrer näherungsweisen Gültigkeit besteht im Wesentlichen darin, daß der Abstand R des Aufpunktes vom Elektron (genauer gesagt von der in Betracht kommenden früheren Lage des Elektrons) groß sein muß gegenüber dem Radius a. Die Formeln versagen daher für das Innere oder für die unmittelbare Nähe des Elektrons. Die Rechnung ist für Oberflächen- und Volumladung gesondert zu führen.

1. Oberflächenladung. a) Die Potentiale φ und $\mathfrak{A}_1$. In Gl. (17) sei die Größe λ für das Intervall zwischen τ_1 und τ_2 gleich 1, außerhalb desselben gleich Null. Nach der Bedingung der Dreiecksmöglichkeit bestimmen sich τ_1 und τ_2 aus den Gleichungen:

32) $$R_2 = c\tau_2 - a, \quad R_1 = c\tau_1 + a;$$

R_1, R_2 sind dabei die den Zeitpunkten $t-\tau_1$, $t-\tau_2$ zugehörigen Längen des Vektors $\mathfrak{R}$. Ferner sei

$$\tau_0 = \frac{\tau_1+\tau_2}{2},$$

R_0 die zugehörige Länge von $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{v}_0 = \mathfrak{v}_{t-\tau_0}$ die zugehörige Geschwindigkeit. Für den Fall nun, daß sich R im Integrationsintervalle $\tau_1 \ldots \tau_2$ relativ nur wenig ändert, d. h. für den Fall, daß

$$\frac{R_2-R_1}{R_0}$$

eine kleine Zahl ist, können wir die Integration in (17) ersetzen durch die Mittelwertbildung:

33) $$\varphi = \frac{\varepsilon c}{8\pi a}\frac{|\tau_2-\tau_1|}{R_0}.$$

Wenn sich ferner auch $\frac{\partial R}{\partial \tau}$ im Integrationsintervalle nur wenig ändert, wenn also

$$\frac{\partial R_2}{\partial \tau}-\frac{\partial R_1}{\partial \tau}$$

eine z. B. gegen c kleine Geschwindigkeit ist, so können wir nach dem Mittelwertsatze der Differentialrechnung schreiben

34) $$\begin{cases} R_2 = R_0+(\tau_2-\tau_0)\dfrac{\partial R_0}{\partial \tau} = R_0+(\tau_2-\tau_0)\dfrac{(\mathfrak{R}_0\mathfrak{v}_0)}{R_0} \\ R_1 = R_0+(\tau_1-\tau_0)\dfrac{\partial R_0}{\partial \tau} = R_0+(\tau_1-\tau_0)\dfrac{(\mathfrak{R}_0\mathfrak{v}_0)}{R_0}. \end{cases}$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf (32):

34') $$R_2-R_1 = (\tau_2-\tau_1)\frac{(\mathfrak{R}_0\mathfrak{v}_0)}{R_0} = c(\tau_2-\tau_1)-2a,$$

d. h.

35) $$\tau_2-\tau_1 = \frac{2a}{c-\dfrac{(\mathfrak{R}_0\mathfrak{v}_0)}{R_0}} = \frac{2a}{c-v_0\cos(R_0,v_0)}.$$

Nach (33) ergiebt sich daher

33') $$\varphi = \frac{\varepsilon}{4\pi R_0}\left|\frac{1}{1-\dfrac{v_0}{c}\cos(R_0,v_0)}\right|.$$

Betrachtet man nur Bewegungen mit Unterlichtgeschwindigkeit, so kann das Zeichen | | des absoluten Betrages auch fortbleiben, weil alsdann $\tau_2 > \tau_1$ ist.

In genau derselben Weise berechnet sich der Translationsbestandteil $\mathfrak{A}_1$ des Vektorpotentials, dessen Ausdruck (21) sich ja nur um den Faktor $\mathfrak{v}_{t-\tau}/c$ von dem Ausdrucke von φ unterscheidet. Man findet nach derselben Methode:

$$33'') \qquad \mathfrak{A}_1 = \frac{\varepsilon}{4\pi R_0}\frac{\mathfrak{v}_0}{c}\left|\frac{1}{1-\frac{v_0}{c}\cos(R_0, v_0)}\right|.$$

Wir haben noch die Gültigkeitsgrenzen unseres Verfahrens anzugeben. Wir bilden zu dem Zweck nach zwei obigen Bemerkung mit Rücksicht auf (34) und (35):

$$\frac{R_2 - R_1}{R_0} = (\tau_2 - \tau_1)\frac{v_0\cos(R_0, v_0)}{R_0} = \frac{2a}{R_0}\frac{v_0\cos(R_0, v_0)}{c - v_0\cos(R_0, v_0)}.$$

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial R_2}{\partial \tau} - \frac{\partial R_1}{\partial \tau}\right) = \frac{\tau_2 - \tau_1}{c}\frac{\partial^2 R_0}{\partial \tau^2} = \frac{2a}{c - v_0\cos(R_0 v_0)}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\{v_0\cos(R_0, v_0)\}$$

Der erste dieser Ausdrücke ist der Größenordnung nach gleich a/R_0, außer wenn v der Lichtgeschwindigkeit zu nahe kommt; der zweite Ausdruck ist allemal dann klein, wenn während der Zeitdauer, in welcher ein Lichtstrahl das bewegte Elektron in der Richtung nach dem Aufpunkte hin überstreichen würde, die Geschwindigkeitsänderung klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist, was nur bei ganz außerordentlichen, stoßartigen Beschleunigungen nicht der Fall sein wird. Unser Verfahren erweist sich also als berechtigt in allen Fällen, wo der Abstand R groß gegen den Radius des Elektrons ist, vorausgesetzt, daß die Geschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit nicht zu nahe kommt und die Beschleunigung nicht einen stoßartigen Charakter annimmt. Dieselbe Bemerkung überträgt sich ohne Weiteres auf die folgenden Fälle.

b) Das Potential $\mathfrak{A}_2$. Der Rotationsbestandteil des Vektorpotentials ist nach (28) und (30) gegeben durch:

$$\mathfrak{A}_2 = \frac{\varepsilon}{8\pi a}\int_{\tau_1}^{\tau_2}[\mathfrak{w}_{t-\tau}\mathfrak{R}]\frac{a^2 + R^2 - c^2\tau^2}{2R^3}\,d\tau,$$

wobei τ_1, τ_2 dieselbe Bedeutung wie oben haben und die Stellung von τ_1 und τ_2 zu vertauschen ist, falls $\tau_1 > \tau_2$ (Ueberlichtgeschwindigkeit). Ferner benutzen wir die Zeichen τ_0, R_0, $\mathfrak{w}_0$, $\mathfrak{R}_0$ in

derselben oder in entsprechender Bedeutung wie unter a). Man erkennt nun unmittelbar, daß man hier, um den vollständigen asymptotischen Ausdruck von $\mathfrak{A}_2$ zu erhalten, nicht einfach im Integranden $\tau = \tau_0$ setzen darf, wie vorher, daß man vielmehr diesen entwickeln muß bis zu den Gliedern $(\tau - \tau_0)^2$ incl. Die Entwickelung lautet, wenn J abkürzend den Integranden bezeichnet:

36) $$J = J_0 + (\tau - \tau_0)\frac{\partial J_0}{\partial \tau} + \frac{(\tau - \tau_0)^2}{2}\frac{\partial^2 J_0}{\partial \tau^2}.$$

Bei der Integration nach τ verschwindet das Glied mit $\tau - \tau_0$, weil τ_0 das arithmetische Mittel der Integrationsgrenzen bedeutet. Das Glied mit $(\tau - \tau_0)^2$ wird gleichzeitig

36') $$\int \frac{(\tau - \tau_0)^2}{2} d\tau = \frac{(\tau_2 - \tau_1)^2}{24} |\tau_2 - \tau_1|$$

und es zeigt sich, daß von derselben Größenordnung auch das Glied nullter Ordnung

$$J_0 = [\mathfrak{w}_0 \mathfrak{R}_0] \frac{1}{2 R_0^3}(a^2 + R_0^2 - c^2 \tau_0^2)$$

wird. Nach den Gl. (32) und (34) haben wir nämlich, wenn wir die letzteren durch die Glieder zweiter Ordnung vervollständigen:

$$c\frac{\tau_1 + \tau_2}{2} = c\tau_0 = \frac{R_1 + R_2}{2} = R_0 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 R_0}{\partial \tau^2}\frac{(\tau_2 - \tau_0)^2 + (\tau_1 - \tau_0)^2}{2}.$$

Wegen der Definition von τ_0 als arithmetischen Mittels zwischen τ_1, τ_2 wird aber

$$(\tau_2 - \tau_0)^2 = (\tau_1 - \tau_0)^2 = \frac{1}{4}(\tau_2 - \tau_1)^2,$$

also

37) $$\left\{\begin{aligned} c\tau_0 &= R_0 + \frac{1}{8}\frac{\partial^2 R_0}{\partial \tau^2}(\tau_2 - \tau_1)^2 \\ R_0^2 - c^2\tau_0^2 &= -\frac{1}{4} R_0 \frac{\partial^2 R_0}{\partial \tau^2}(\tau_2 - \tau_1)^2 \end{aligned}\right.$$

36'') $$\int J_0\, d\tau = [\mathfrak{w}_0 \mathfrak{R}_0]\frac{1}{2R_0^3}\left(a^2 - \frac{1}{4} R_0 \frac{\partial^2 R_0}{\partial \tau^2}(\tau_2 - \tau_1)^2\right)|\tau_2 - \tau_1|,$$

was in der That wegen der Bedeutung von $\tau_2 - \tau_1$ (Gl. 35) von derselben Größenordnung wie (36') ist.

Tragen wir nun die Entwickelung (36) mit dem Werte (35) von $\tau_2 - \tau_1$ in die Definitionsgleichung von $\mathfrak{A}_2$ ein, so ergiebt sich

38) $$\mathfrak{A}_2 = \frac{\varepsilon}{4\pi R_0}\frac{a^2}{R_0^2}\frac{1}{|c - v_0 \cos(R_0, v_0)|}\mathfrak{B}$$

mit der Abkürzung:

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2}[\mathfrak{w}_0 \mathfrak{R}_0]\left(1 - R_0 \frac{\partial^2 R_0}{\partial \tau^2}\frac{1}{(c - v_0 \cos(R_0, v_0))^2}\right)$$
$$+ \frac{1}{6} R_0^3 \frac{\partial^2 J_0}{\partial \tau^2}\frac{1}{((c - v_0 \cos(R_0, v_0))^2}.$$

Beschränkt man sich consequenter Weise bei der Ausrechnung von $\partial^2 J_0/\partial \tau^2$ auf die Glieder nullter Ordnung in a, so findet man leicht

$$\frac{\partial^2 J_0}{\partial \tau^2} = \frac{[\mathfrak{w}_0 \mathfrak{R}_0]}{R_0^3}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 (R_0^2)}{\partial \tau^2} - c^2\right) - 2R_0 \frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\frac{[\mathfrak{w}_0 \mathfrak{R}_0]}{R_0^3}\right\}(c - v_0 \cos(R_0, v_0))$$

und daher

38') $$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{B} = [\mathfrak{w}_0 \mathfrak{R}_0]&\left(\frac{1}{2} + \frac{-\frac{1}{2} R_0^4 \frac{\partial^2 R_0}{\partial \tau^2} + \frac{1}{12}\frac{\partial^2 (R_0^2)}{\partial \tau^2} - \frac{c^2}{6}}{(c - v_0 \cos(R_0, v_0))^2}\right) \\ &- \frac{1}{3} R_0^4 \frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\frac{[\mathfrak{w}_0 \mathfrak{R}_0]}{R_0^3}\right\}\frac{1}{c - v_0 \cos(R_0, v_0)}. \end{aligned}\right.$$

Wie man sieht verschwindet $\mathfrak{A}_2$ mit wachsendem R von höherer Ordnung als $\mathfrak{A}_1$ oder φ, da es gegenüber jenen mit dem Faktor $(a/R)^2$ behaftet ist. Der Einfluß der Rotationsbewegung auf das Feld reicht also, was verständlich ist, nicht so weit wie der der Translationsbewegung.

2. Volumladung. a) Die Potentiale φ und $\mathfrak{A}_1$. Bedeuten wieder τ_1, τ_2 die Grenzen, innerhalb deren ein Dreieck aus den Strecken a, R, $c\tau$ gebildet werden kann, so ist außerhalb des Intervalles $(\tau_1 \tau_2)$ nach (19) $\varkappa = 0$, da sicherlich a nicht die größte der drei Strecken a, R, $c\tau$ ist, vielmehr $R > a$ vorausgesetzt wird. Innerhalb dieses Intervalles ist

$$\varkappa = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{c\tau - R}{a}\right)^2\right).$$

Wir schreiben daher nach (20) und (22), indem wir die nur wenig veränderlichen Faktoren durch ihre zum Werte $\tau = \tau_0$ ge-

hörigen Mittelwerte ersetzen:

$$39)\quad \begin{cases} \varphi = \dfrac{\varepsilon}{8\pi a R_0}\dfrac{3}{2}\displaystyle\int\left(1-\left(\frac{c\tau-R}{a}\right)^2\right)c\,d\tau, \\ \mathfrak{A}_1 = \dfrac{\varepsilon}{8\pi a R_0}\dfrac{\mathfrak{v}_1}{c}\dfrac{3}{2}\displaystyle\int\left(1-\left(\frac{c\tau-R}{a}\right)^2\right)c\,d\tau. \end{cases}$$

In dem hier noch auszuwertenden Integral führen wir die Integrationsvariable

$$u = \frac{c\tau - R}{a}$$

ein; dieselbe wird für $\tau = \tau_2$ oder $\tau = \tau_1$ nach (32) gleich ± 1, und es ist

$$du = \frac{1}{a}\left(c - \frac{\partial R}{\partial \tau}\right)d\tau = \frac{1}{a}\left(c - \frac{(\mathfrak{R}\mathfrak{v}_{t-\tau})}{R}\right)d\tau.$$

Indem wir abermals einen Mittelwert einführen, können wir schreiben

$$c\,d\tau = \frac{a\,du}{\left|1 - \frac{v_0}{c}\cos(R_0, v_0)\right|},$$

wobei nach Hinzufügung des Zeichens | |, auch wenn $\tau_1 > \tau_2$ sein sollte, die Integration nach u in der Richtung von -1 bis $+1$ zu erstrecken ist. Es ist aber

$$\frac{3}{2}\int_{-1}^{+1}(1-u^2)\,du = 2.$$

Mit Rücksicht hierauf und den angegebenen Wert von $c\,d\tau$ gehen die Gleichungen (39) unmittelbar in die früheren Ausdrücke (33') und (33'') über. Für die Fernwirkung macht es also bei dem skalaren Potential und dem Translationsterm des Vektorpotentials nichts aus, in welcher Weise die Ladung im Elektron verteilt ist.

b) Das Potential $\mathfrak{A}_2$. Bei Volumladung ergeben die Gl. (29) und (31) für den Rotationsbestandteil des Vektorpotentials mit der früheren Bedeutung der Grenzen τ_1, τ_2 (vorbehaltlich einer ev. Vertauschung derselben):

$$\mathfrak{A}_2 = \frac{\varepsilon}{8\pi a}\int_{\tau_1}^{\tau_2}[\mathfrak{w}_{t-\tau}\mathfrak{R}]\frac{3}{8R^3}\left\{a^2 + 2R^2 - 2c^2\tau^2 - \frac{(R-c\tau)^3}{a^2}(3R+c\tau)\right\}d\tau.$$

Bezeichnen wir den Integranden mit J und entwickeln denselben ähnlich wie in (36), so müssen wir jetzt bis zum Gliede

mit $(\tau-\tau_0)^4$ gehn, um sicher zu sein, alle der Größenordnung nach maaßgebenden Terme beizubehalten. Wir schreiben also:

$$J = J_0 + (\tau-\tau_0)\frac{\partial J_0}{\partial\tau} + \frac{(\tau-\tau_0)^2}{2!}\frac{\partial^2 J_0}{\partial\tau^2} + \frac{(\tau-\tau_0)^3}{3!}\frac{\partial^3 J_0}{\partial\tau^3} + \frac{(\tau-\tau_0)^4}{4!}\frac{\partial^4 J_0}{\partial\tau^4}.$$

Bei der Integration nach τ fallen die Glieder mit $\tau-\tau_0$ und $(\tau-\tau_0)^3$ fort, weil τ_0 das arithmetische Mittel der Integrationsgrenzen ist. Wegen (36′) und der Formel

$$\int\frac{(\tau-\tau_0)^4}{4!}d\tau = \frac{(\tau_2-\tau_1)^4}{2^4\,5!}|\tau_2-\tau_1|$$

erhält man dann:

$$\int J\,d\tau = \left(J_0 + \frac{\partial^2 J_0}{\partial\tau^2}\frac{(\tau_2-\tau_1)^2}{24} + \frac{\partial^4 J_0}{\partial\tau^4}\frac{(\tau_2-\tau_1)^4}{2^4\,5!}\right)|\tau_2-\tau_1|.$$

Vernachlässigt man alles, was in a von höherer als der zweiten Ordnung ist, so ergiebt sich

$$J_0 = [\mathfrak{w}_0\,\mathfrak{R}_0]\frac{3}{8R_0^3}\left(a^2 - \frac{1}{2}R_0\frac{\partial^2 R_0}{\partial\tau^2}(\tau_2-\tau_1)^2\right)$$

und es wird

40)
$$\mathfrak{A}_2 = \frac{\varepsilon}{4\pi R_0}\frac{a^2}{R_0^2}\frac{1}{|c-v_0\cos(R\,,v_0)|}\mathfrak{B},$$

$$\mathfrak{B} = \frac{3}{8}[\mathfrak{w}_0\,\mathfrak{R}_0]\left(1 - 2R_0\frac{\partial^2 R_0}{\partial\tau^2}\frac{1}{(c-v_0\cos(R_0,v_0))^2}\right)$$

$$+\frac{1}{6}R_0^3\frac{\partial^2 J_0}{\partial\tau^2}\frac{1}{(c-v_0\cos(R_0,v_0))^2}$$

$$+\frac{a^2}{120}R_0^3\frac{\partial^4 J_0}{\partial\tau^4}\frac{1}{(c-v_0\cos(R_0,v_0))^4}.$$

Es ist aber mit der hier erforderlichen Genauigkeit:

$$\frac{\partial^2 J_0}{\partial\tau^2} = \frac{3}{4}\frac{[\mathfrak{w}_0\,\mathfrak{R}_0]}{R_0^3}\left\{\frac{\partial^2(R_0^2)}{\partial\tau^2} - 2c^2 + 6R_0\frac{\partial^2 R_0}{\partial\tau^2}\right\}$$

$$-3R_0\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{[\mathfrak{w}_0\,\mathfrak{R}_0]}{R_0^3}\right\}(c-v_0\cos(R_0,v_0))$$

$$a^2 \frac{\partial^4 J_0}{\partial \tau^4} = -54 \frac{[\mathfrak{w}_0 \mathfrak{R}_0]}{R_0^8} R_0 \frac{\partial^2 R_0}{\partial \tau^2} (c - v_0 \cos(R_0, v_0))^2$$

$$+ 36 R_0 \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{[\mathfrak{w}_0 \mathfrak{R}_0]}{R_0^3} \right\} (c - v_0 \cos(R_0, v_0))^3$$

$$+ 9 \frac{[\mathfrak{w}_0 \mathfrak{R}_0]}{R_0^3} \left(3 \frac{\partial R_0}{\partial \tau} + c \right) (c - v_0 \cos(R_0, v_0))^3.$$

Trägt man diese Werte in den Ausdruck von $\mathfrak{B}$ ein, so zieht sich derselbe zusammen zu:

$$40') \qquad \mathfrak{B} = [\mathfrak{w}_0 \mathfrak{R}_0] \left(\frac{3}{8} + \frac{-\frac{9}{20} R_0 \frac{\partial^2 R_0}{\partial \tau^2} + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 (R_0^2)}{\partial \tau^2} - \frac{c^2}{4}}{(c - v_0 \cos(R_0, v_0))^2} \right)$$
$$+ \frac{-\frac{1}{5} R_0^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{[\mathfrak{w}_0 \mathfrak{R}_0]}{R_0^3} \right\} + \frac{3}{40} [\mathfrak{w}_0 \mathfrak{R}_0] \left(3 \frac{\partial R_0}{\partial \tau} + c \right)}{c - v_0 \cos(R_0, v_0)}.$$

Ueber die Größenordnung von $\mathfrak{A}_2$ im Verhältnis zu der von φ und $\mathfrak{A}_1$ ist dasselbe zu sagen wie oben unter 1 b). Wollen wir uns mit derselben Näherung wie bei der Berechnung von φ und $\mathfrak{A}_1$ begnügen und Größen von der Ordnung a^2/R^2 schlechtweg vernachlässigen, so könnten wir einfach den für Volum- und Oberflächenladung gemeinsamen Wert

$$\mathfrak{A}_2 = 0$$

angeben. Unter Beibehaltung der Größen von der Ordnung a^2/R^2 dagegen unterscheiden sich Oberflächen- und Volumladung, sowohl in dem Ausdrucke von $\mathfrak{A}_2$ wie in denen von φ und $\mathfrak{A}_1$, wofern wir die letzteren durch Glieder höherer Ordnung ergänzen wollten.

Die Potentialgesetze (33') und (33'') sind von Liénard[1] und Wiechert[2] gefunden worden; der Faktor 4π, durch den sich unsere Ausdrücke von denen jener Forscher unterscheiden, rührt von der Wahl der Einheiten her. Diese Potentialgesetze gestatten die folgende Deutung: **Das Potential φ in hinreichend entfernten Aufpunkten zur Zeit t kann so berechnet werden, wie wenn sich das Elektron dauernd an derjenigen Stelle befände, die es zur Zeit $t - \tau_0$ inne**

1) A. Liénard, L'Éclairage électrique 1898, p. 5, 53, 106.

2) E. Wiechert, Archives néerlandaises 5 (1900) p. 549, (Lorentz-Jubelband).

hatte, wobei jedoch seine Ladung ε im Verhältnis $1 : \left|1 - \frac{v_0}{c}\cos(R_0, v_0)\right|$ zu reduciren ist. Ferner: Das Vektorpotential $\mathfrak{A}_1$ kann berechnet werden wie dasjenige eines Stromelementes, welches nach Lage und Richtung übereinstimmt mit dem Orte und der Bewegungsrichtung des Elektrons zur Zeit $t - \tau_0$; die im Elemente fließende (elektrostatisch gemessene) Stromstärke ist dabei jedoch nicht gleich $\varepsilon v_0/c$ zu setzen, sondern abermals im Verhältnis $1 : \left|1 - \frac{v_0}{c}\cos(R_0, v_0)\right|$ zu reduciren.

Das Vektorpotential $\mathfrak{A}_2$ endlich und das ihm entsprechende Magnetfeld können wir vergleichen mit dem Felde eines Elementarmagneten, der sich am Orte des Elektrons zur Zeit $t - \tau_0$ befindet; und zwar ist die magnetische Axe dieses äquivalenten Elementarmagneten durch den oben eingeführten Vektor $\mathfrak{B}$ bestimmt; sein magnetisches Moment hängt dabei noch von der Lage des Aufpunktes ab und wird im Uebrigen gegeben durch Ladung, Radius und Winkelgeschwindigkeit des Elektrons, wobei die Ladung abermals im Verhältnis $1 : \left|1 - \frac{v_0}{c}\cos(R_0, v_0)\right|$ zu reduciren ist.

In allen drei Fällen bedeutet die genannte Reduktion eine scheinbare Vergrößerung von Ladung, Stromstärke und magnetischem Moment, wenn der Winkel zwischen $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{v}_0$ ein spitzer ist, d. h. wenn die Bewegung des Elektrons nach dem Aufpunkte hin gerichtet ist (allgemeiner gesagt, eine nach dem Aufpunkte hin gerichtete Componente besitzt), dagegen eine scheinbare Verkleinerung von Ladung etc., wenn der Winkel zwischen $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{v}_0$ stumpf ist die Bewegung also von dem Aufpunkte fort gerichtet ist (eine vom Aufpunkte abgewandte Componente besitzt). Diese Reduktion entspricht also völlig dem sog. Doppler'schen Prinzip.

Das graphische Verfahren zur Entwickelung correcter Curven aus Beobachtungsresultaten.

Von

V. Hensen, Kiel.

Mit 4 Figuren im Text und 2 Tabellen.

Vorgelegt in der Sitzung vom 5. März 1904.

Durch das graphische Verfahren lassen sich Curven und Curventeile, wenn sie die Art ihrer Krümmung nicht ändern und sofern ihre beiden rechtwinkligen Coordinaten in gleichem Sinne wachsen, im engsten Anschluß an die Beobachtungsresultate und ohne Voraussetzung einer Formel bis zu beliebiger Stellenzahl numerisch feststellen. Nur bei arithmetischen Reihen wäre eine absolute Genauigkeit erreichbar; wenn die Differenzreihen nicht Null werden, lassen sie sich so nahe an Null heranführen, daß das sog. allgemeine Glied der Hauptreihe so genau, wie man will, bestimmt werden kann. Für die Praxis, an die hier in erster Linie gedacht wird, ist die zu verlangende Genauigkeit leicht genug erreicht. Diese Art, die Methode der kleinsten Fehlerquadrate zu umgehen, dürfte für manche Beobachtungsreihen Vorzüge haben, sowohl weil es häufig recht schwer ist, die passendste Formel zu finden, als auch, weil es in der Wissenschaft erwünscht ist, über verschiedene Wege zu dem gleichen Endziel zu verfügen. Mein Verfahren erfordert einen guten graphischen Apparat, der nach festen Regeln verwendet wird, und eine ausgiebige Verwendung der Differenzreihen. Von letzteren ist ja die Hauptreihe unter Benutzung eines beliebigen Anfangsgliedes derselben und eines genügend entfernten Endgliedes strenge abhängig, da jede „vorangehende“ Reihe aus dem Anfangs- oder Endgliede dieser Reihe und aus ihrer Differenzreihe genau wieder

aufzubauen ist. Die Summe der Beobachtungsresultate, deren Summenreihen und die Summen dieser Reihen bilden die voraussetzungsfreie Basis für die graphische Richtigstellung der Beobachtungen. Je besser diese sind und je größer deren Anzahl ist, desto mehr trifft die Curve den genauen Sachverhalt, immer kann sie diesem so nahe gebracht werden, wie es die Genauigkeit und die Zahl der Beobachtungen gestattet.

Es möge 1) mit Hilfe der anliegenden Tabelle I das Verfahren und dessen Resultat an einem einfachen Fall übersichtlich vorgeführt werden, 2) soll die Art der Behandlung der Differenzreihen, 3) soll die Herstellung und Behandlung der Hauptreihe, 4) die graphische Interpolation dargelegt werden, 5) mögen einige Anweisungen für die mechanische Ausführung der graphischen Interpolation und Correctur gegeben werden, 6) zum Schluß sollen alle Vornahmen in der einzuhaltenden Reihenfolge zusammengestellt werden.

1. Die Tabelle I.

An einem einfachen Beispiel läßt sich das Verfahren und dessen Erfolg am leichtesten verständlich machen. Es lag eine Reihe von Beobachtungsresultaten, bestehend aus 22 Ordinaten, (Tonhöhen von 39 bis 1767 v. d.) und Abscissen, (1 bis 700 mgr.) vor. Die Intervalle waren anfänglich Einheiten der Abscisse, gegen Ende 100 bis 200 Einheiten. Da es für die graphische Arbeit erwünscht und z. T. nötig ist, äquidistante Ordinaten zu haben und selbstverständlich nicht entsprechend viele Ordinaten interpolirt werden konnten, mußten Abteilungen in der Reihe gemacht werden, die es gestatteten, alle Beobachtungsresultate zu verwenden, ohne eine große Menge von interpolirten Werten zu erfordern. Es wurden zunächst Intervalle von 50 Einheiten ausgelegt, resp. interpolirt und es wurde die gewonnene Curve durch eine Anzahl von Differenzreihen ausgeglichen. Damit waren die Ordinaten für die Abscissen 50, 100, 150 ..... 700 vorläufig festgelegt und es konnten passende Abschnitte der Curve genauer durchgearbeitet werden. Die Tabelle I gibt die Ausarbeitung der Werte zwischen den Abscissen 50 und 100. Die Endordinaten waren als festgelegt zu betrachten. Die Mittelwerte der Beobachtungen sind in der Reihe I der Tabelle aufgeführt, aus ihnen ergibt sich die Summe der Hauptreihe, sei es mit, sei es ohne die festgelegten Endordinaten. (Summenreihen und deren Summen dienen nur zur Feststellung der Endordinaten, wie in Abschnitt 3 gezeigt werden wird, sie kommen also für den vorliegenden Fall

nicht in Betracht). Die Auslage der Werte in Reihe I ergab die graphische Aufnahme der Reihe II, die aus den beiden früher richtig gestellten Endwerten, aus den abgeglichenen Mittelwerten Y_3, Y_5, Y_7 Y_9 und aus interpolirten Werten besteht. Diese Reihe ist als „Hauptreihe" zu bezeichnen. Die beobachteten Mittelwerte und die entsprechenden abgeglichenen Werte ergeben nicht die gleiche Summe, sondern die abgeglichenen Werte sind in Summa um 0,7 zu hoch. Der Unterschied wird künftig mit „R" bezeichnet und hat das negative Vorzeichen, wenn die Summe der abgeglichenen Werte kleiner ist als sie sein soll, daher die Fehlsumme R (oder δ) ihr noch zuzufügen ist. Die Summe der beobachteten Werte dient als Leitzahl; weil sie mit Wahrscheinlichkeit als fehlerfrei zu betrachten ist; sie muß daher für die Summe der abgeglichenen Werte wieder hergestellt werden. Das ist in der „berichtigten" Reihe III zur Ausführung gekommen. (Es ist von mir nicht beachtet worden, daß die Berichtigung etwas über das Ziel hinausgeschossen ist, der Fehler schadet nichts für die beabsichtigte Demonstration). Mit der berichtigten Hauptreihe wurde die erste Differenzreihe berechnet und ausgelegt, Tabelle I, III a. Sie fiel, wie die Zahlenreihe zeigt, recht schlecht aus. Die Reihe wurde graphisch corrigirt und aufgenommen, wodurch die Zahlenfolge III b. entstand. Die Summe dieser Reihe fällt um ein $R = 0{,}002$ zu groß aus und muß entsprechend berichtigt werden. Das ist in Reihe III c. ausgeführt worden. Wenn mit dieser berichtigten Differenzreihe die Hauptreihe neu gebildet wird, so ergibt sich, daß ΣY um einen Wert $\delta = -2{,}23\ldots$ zu klein ausfällt. Da ΣY die Leitzahl ist, also genau wiederkommen soll, muß die Δ Curve dem Wert δ entsprechend „gedreht", oder, was dasselbe bedeutet, die Δ Reihe entsprechend „geschwenkt" werden. Dabei entsteht die Reihe III d. und mit Hilfe dieser Zahlenreihe wird endlich die Hauptreihe wieder hergestellt. Diese neue Reihe IV ist bereits recht fehlerfrei geworden.

In dieser, mit Hilfe der Differenzreihen zu beschaffenden Correctur weiter fortschreitend, erhält man aus der Reihe der Δ^2 die Y-Reihe V und weiterhin aus Δ^4 die Y-Reihe VI und endlich aus Δ^{10} die Y-Reihe VII. Bis zur zehnten Differenzreihe kann man natürlich nur gelangen, wenn bei der achten Differenzreihe einige Ordinaten interpolirt werden; auf diese Weise kann man bis zu beliebig hohen Differenzreihen kommen. Wie die Tabelle nachweist verlaufen die Correcturen ganz regelmäßig, immer sind die nachfolgenden Y weitergehend genau, als die der vorhergehenden Reihe. Ich kann mitteilen, daß nach Entwickelung der elften

Differenzreihe nur noch an einer Position in der Y-Reihe die vorletzte Decimale der in VII angegebenen Werte sich um eine Einheit ändert, daß also in Reihe VII alle Zahlen bis auf die beiden letzten Decimalen genau sind. Die in der Tabelle gegebenen Differenzreihen sind aus der mit Δ_{10} hergestellten Y-Reihe entwickelt, sie sind so stellenreich, daß eine Rechnung mit siebenstelligen Logarithmen nicht ausreichen würde, um die Curve zu entwickeln, wenn deren Formel bekannt wäre. Die Differenzreihen lassen noch keine „Fehlerwellen", wie die durch Fehler, ungenaue Beobachtungen und durch Kürzungen entstandenen Unregelmäßigkeiten der Curve genannt sein mögen, erkennen. Die Arbeit hat in dieser Ausdehnung ja weiter keinen praktischen Zweck, ihre Ausdehnung sollte nur zeigen, daß man mit der graphischen Methode jede verlangte numerische Schärfe erzielen kann. Das ist bisher nicht ersichtlich gewesen, im Gegenteil erschien diese Methode gegenüber dem rechnerischen Verfahren von unzureichender Schärfe. Die Vergrößerung meiner Maaseinheit ging bei Δ^{10} über 100000; wäre ich bis zur achtzehnten Differenz gegangen, so wäre sie billionenfach geworden, während die Fehler der Messung immer ihre relative Größe unverändert behalten hätten. Es genügt bei der Aufnahme der Differenzen, wenn immer nur der Anschluß an die vorangehende Differenzreihe gewahrt wird und am Schluß der Arbeit bis zur Hauptreihe zurück gegangen wird. Dabei werden dann nur Schwenkungen der Differenzreihen, aber keine Berichtigungen erforderlich. In der Praxis dürften die Hauptreihen meistens genau genug kommen, wenn man sich begnügt bis zur zweiten Differenz zu gehen.

Die Tabelle I ergibt, daß zwar die ΣY unverändert geblieben ist, daß sich aber die Summe der corrigirten Ordinaten der Beobachtungen um $-0{,}3465$, also nicht unerheblich verkleinert hat. Die Summe war ja bereits anfänglich etwas zu klein geworden, aber die jetzt vorliegende Verkleinerung hat ihren Hauptgrund in dem Fortfall der Fehlerwellen der Curve. Der Grad der Verkleinerung wird daher von Zufälligkeiten abhängig sein. Die Summe der beobachteten Zahlen, also $Y_3 + Y_5 + Y_7 + Y_9$ war die Leitzahl, aus der sich erst sekundär die bei der Correctur festgehaltene Zahl $4918{,}9 \ldots = \Sigma Y$ ableitete, daher muß diese Leitzahl wieder hergestellt werden, auch dann, wenn nur bis Δ^2 gegangen wird. Die mit $R = -0{,}3465$ berichtigte ΣY ist in Reihe VIII hergestellt; dabei dürfen die Endordinaten nicht verändert werden, weil auch sie Leitzahlen bilden. Die Verrechnung des R ließ sich nicht ganz vollkommen ausführen, weil dafür die Loga-

rithmen nicht ausreichten, aber der Fehlerrest an den $Y_2 + Y_3 + Y_7 + Y_9$ ist, wie man sieht, minimal. Es zeigt sich, daß die durch das Verfahren aus den graphisch berichtigten Zahlen gewonnene Curve ganz innerhalb der mittleren Fehler an den Mitteln der einzelnen Beobachtungeu verläuft und daß die schlechteren der in der Tabelle oben verzeichneten Fehler an den Mittelwerten auch die größeren Fehler ergeben, wie unter der Reihe VIII in der Tabelle ersichtlich gemacht wird. Die Summe der Fehler ist dabei noch nicht genau Null geworden, sondern beträgt − 0,0008708, ist also praktisch so gut wie Null. Es wäre durch eine leichte Umrechnung ohne Schwierigkeit der Forderung, daß die Summe der Fehler Null sein solle zu entsprechen, aber damit wäre der gleichberechtigten Forderung, daß die Summe der beobachteten Mittelwerte genau innegehalten werden solle, nicht genügt. Bei einer großen Anzahl guter Mittelwerte werden sich beide Forderungen sehr annähernd decken müssen; je weniger sie das tun, desto ungünstiger kann über die Güte der Beobachtungen geurteilt werden. Es dürfte meistens richtig sein den Fehler an der Summe der beobachteten Mittelwerte und die Abweichung der halben Summe der Fehler von Null zu addiren und die Hälfte dieser Summe als „*R*" zu verrechnen. In dem vorliegenden Fall kann das noch nicht geschehen, weil die Curve der Tabelle I in die große Curve von 22 beobachteten Ordinaten einzufügen ist und erst an dieser die Correctur für alle Werte vorzunehmen wäre.

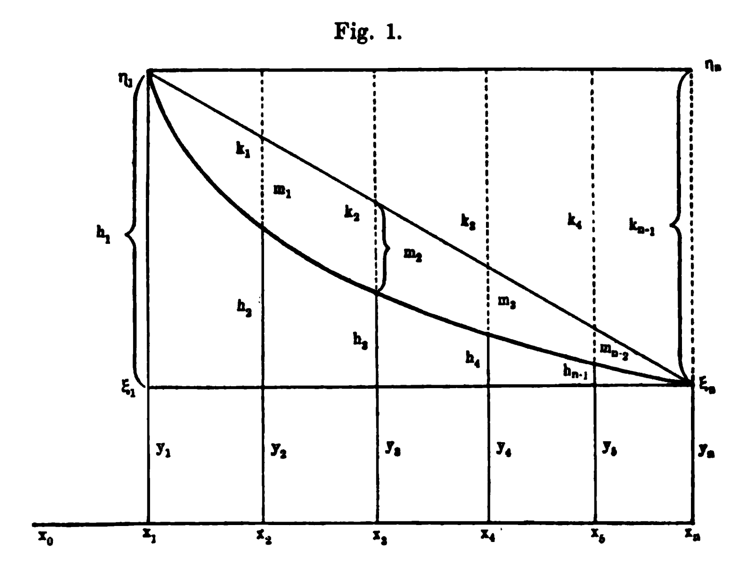
2. Die Behandlung der Differenzreihen.

Nachdem eine Differenzreihe als Curve ausgelegt worden ist, lagert man die Curvenrute unter Festhaltung der Endwerte so, daß sie sich so weit möglich durch die ausgelegten Werte hindurch schmiegt. Die Curve soll 1) wellenfrei verlaufen, 2) die Summe der ausgelegten Ordinaten möglichst wiedergeben. Letztere Anforderung, die weniger wichtig ist, sucht man dadurch zu erfüllen, daß man die + und − Abweichungen der Rute von den ausgelegten Werten möglichst in Summa = 0 macht. Dann erfüllt man die erste Anforderung dadurch, **dass man die beiden folgenden Differenzreihen berechnet.** Zeigen diese noch einen stark welligen Verlauf, was die Regel sein wird, so erkennt man leicht, wo der Fehler in der Biegung der Rute liegt und kann ihn verbessern.

Die dann aufzunehmenden Ordinaten werden die Summe der ausgelegten nicht völlig genau wiedergeben. Es ist nötig diese Summe genau wieder herzustellen, weil die Endordinate der vorangehenden Reihe Leitzahl ist und sonst nicht wiederkommen

kann. Es ist daher die Fehlsumme $\pm R$ zu bestimmen und die Art ihrer Verrechnung festzustellen. Um letzteres zu erfahren ist zu ermitteln, wie groß die Summe der vorangehenden Ordinatenreihe unter Zufügung des Fehlers „R“ wird, wenn man sie aus der neuen Ordinatenreihe berechnet. Diese Summe kann kleiner, nahe gleich oder größer werden, als sie sein soll. Das dementsprechend innezuhaltende Verfahren möge die Figur 1 erläutern.

Fig. 1.



Sei $\eta_1\ \xi_n$ die zu corrigirende Curve der aufgenommenen Ordinaten. Wenn y_n von allen anderen Ordinaten abgezogen wird, erhält man die Längen: $h_1\ h_2 \ldots h_{n-1}$; wenn y_1 von allen anderen Ordinaten abgezogen wird, verlegt man die Abscissenaxe auf $\eta_1\ \eta_n$ und erhält die (negativen) Werte $k_1\ k_2 \ldots k_{n-1}$. Wenn man die Tangente des Winkels $\xi_1\ \xi_n\ \eta_1$ berechnet, so lassen sich die Längen $h_2 + m_1$, $h_3 + m_2 \ldots h_{n-1} + m_{n-2}$ bestimmen und daraus erhält man dann die als künftig m-Werte bezeichneten Größen. Die R-Werte sind so zu verrechnen, daß die Fehlsumme („δ“) an der Summe der vorangehenden Ordinatenreihe verkleinert oder möglichst wenig vergrößert wird. Es können folgende Fälle vorkommen. 1) Jene Summe wurde zu klein gefunden und R soll addirt werden. Sei y_1 die Endordinate, also die Zahl, die bei der Neubildung der vorangehenden Reihe zuletzt addirt wird, dann kommen die Größen k_1 $k_2, \ldots k_{n-1}$ zu Verwendung. Man rechnet:

$$\frac{R}{\Sigma k} = \vartheta . (1\mathrm{a}) \text{ und } \vartheta k_1 + \vartheta k_2 \ldots\ldots \vartheta k_{n-1} = R . (1\mathrm{b})$$

Wenn die Gleichung 1b stimmt, ist richtig gerechnet, doch findet sich meistens ein kleiner Fehlbetrag, weil mit Logarithmen gerechnet wird. Man muß ohnehin die Zahlen kürzen und gleicht dabei diesen Fehlbetrag aus. Die ϑk werden dann zu den zugehörigen Ordinaten addirt. 2) Jene Summe wird zu klein und „R" ist zu subtrahiren. In diesem Fall bleibt die Anfangsordinate y_u unverändert und es werden die h-Werte benutzt. Man bildet:

$$\frac{R}{\Sigma h} = \vartheta \,.\, (2\text{a}) \text{ und } \vartheta h_1 + \vartheta h_2 + \ldots . + \vartheta h_{n-1} = R \,.\, (2\text{b})$$

kürzt die gefundenen ϑh wie oben und subtrahirt diese Werte von den entsprechenden Ordinaten. 3) Die Summe ist nahe richtig gefunden worden oder es dürfen aus anderen Gründen die Anfangs- und End-Ordinaten nicht verändert werden, dann ist die Krümmung der Curve lediglich etwas zu vermehren oder zu vermindern und es kommen die m-Werte in Betracht. Man rechnet:

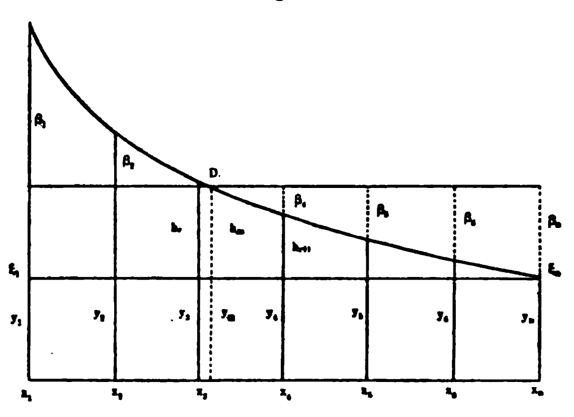
$$\frac{R}{\Sigma m} = \vartheta \,.\, (3\text{a}) \text{ und } \vartheta m_2 + \vartheta m_3 + \ldots + \vartheta m_{n-2} = R \,.\, (3\text{b})$$

und addirt oder subtrahirt, jenachdem R negativ oder positiv. 4) Jene Summe wurde zu groß und „R" ist zu addiren. Man verfährt nach Gl. 2. 5) Jene Summe wurde zu groß und „R" ist zu subtrahiren. Man verfährt nach Gl. 1.

Wenn auf diese Weise die Summe der Ordinaten der Differenzcurve berichtigt worden ist, muß zwar die Endziffer der vorangehenden Reihe genau oder mit großer Annäherung wiederkommen, aber die Summe jener Reihe wird um einen kleinen Wert, der mit „δ" bezeichnet werden möge, zu groß oder zu klein gefunden. Dieser Fehlwert ist — figürlich gesprochen — durch Drehung der Curve oder Schwenkung der berichtigten Reihe um einen im Verlauf der Curve liegenden Drehpunkt zu beseitigen. Wird die neugebildete Summe der vorangehenden Reihe zu klein, so daß „δ" negativ wird, so müssen die Ordinaten desjenigen Endes der berichtigten Differenzcurve erhöht werden, an dem die Addition zur Bildung der vorangehenden Reihe zu beginnen hat. Da die Summe der „berichtigten" Reihe nicht verändert werden darf, müssen die Ordinaten des anderen Endes oder Flügels dieser Reihe um die gleiche Summe vermindert werden. Wurde jene Summe zu groß gefunden, ist also „δ" positiv, so hat natürlich das umgehrte Verfahren einzutreten. Die Biegung der Curve soll bei der Drehung unverändert bleiben, der Zuwachs der Reihe der Ordinatenzahlen ändert sich allerdings bei der durch die Drehung bewirkten Schwenkung dieser Reihe in der Weise, daß die Differenzreihe der

geschwenkten Reihe eine kleine Veränderung erfährt. Diese Veränderung ist kein Fehler, sondern muß so erfolgen, weil die Innehaltung der Leitzahlen sie erfordert. Die Biegung der Curve wird conservirt, wenn man den Drehpunkt in den Kopf der Mittelordinate verlegt. Das Verfahren wird durch die nachfolgende Figur erläutert.

Fig. 2.



Wenn die Abscissenaxe durch Abzug von y_n von allen Ordinaten auf die Linie $\xi_1\ \xi_n$ verlegt wird, erhält man die h-Werte der Fig. 1. Liege der Drehpunkt in D und werde dahin die Abscissenaxe verlegt, so entstehen die Längen „β", die für die Drehung in Betracht kommen. Die Ordinatenabstände müssen gleich sein, was bereits durch die Feststellung der Hauptreihe bewirkt worden ist. Sei n die Anzahl der Ordinaten, so ist:

$$y/n = y_m \quad (4)$$

y_m die Mittelordinate, an deren Kopf bei D der Drehpunkt liegt. $y_m - y_n = h_m$ ergibt das mittlere h und es besteht die Gleichung:

$$h_1 - h_m + h_2 - h_m + \cdots h_r - h_m - (h_m - h_{r+1}) - \cdots - h_m = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = 0 \quad (4a)$$

Dann ist ein Factor „p" zu suchen, der die erforderliche Schwenkung zu bewirken hat. Man findet p aus den Gleichungen:

$$\pm p[\beta_1 \cdot n + \beta_2 \cdot n - 1 + \cdots + \beta_{n-r}(n-r) - \beta_{n-r-1}(n-r-1) - \cdots - \beta_n] = \delta \quad (5a)$$

$$\pm p[\beta_1 + \beta_2 \cdot 2 + \cdots + \beta_{n-r}(n-r) - \beta_{n-r-1}(n-r+1) - \cdots - \beta_n \cdot n] = \delta \quad (5b)$$

Die Gleichung 5a gilt für den Fall, daß die Addition behufs Bildung der vorangehenden Reihe von links her zu beginnen hat, 5b für den Fall, daß sie von rechts her beginnt. Mit dem „p" multiplicirt man die „β" der Gleichung 4a oder 4b einzeln und addirt resp. subtrahirt die erhaltenen Producte sinngemäß zu den entsprechenden Ordinaten. Vorher empfiehlt es sich zur Probe auf die Richtig-

keit der Rechnung die $p\beta$ für sich zu addiren, deren Summe Null sein soll und dann die Werte $p\beta$ mit den ihnen zukommenden Positionszahlen $n, n-1 \ldots 1$ zu multipliciren und zu prüfen, ob der Wert δ richtig herauskommt. Dabei nimmt man dann auch die erforderlichen Kürzungen und die etwa erforderlichen kleinen Versetzungen der letzten Decimale vor. Bei einer großen Zahl der Ordinaten sind die Kürzungen am Anfang der Reihe von viel größerer Bedeutung als diejenigen, die das Ende der Reihe treffen, daher kann die genannte Versetzung der letzten Decimalen unvermeidlich werden, weil das „δ" genau kommen muß.

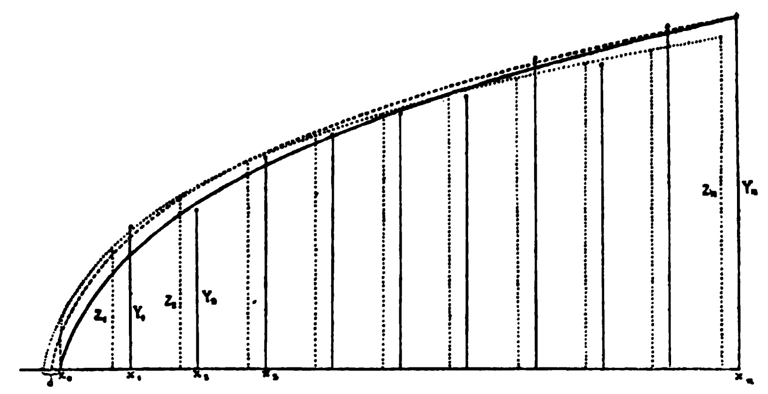
Man könnte geneigt sein zu glauben, daß bei der Schwenkung eine Verschiebung der Ordinatenabstände eintreten müsse, aber die Rechnung ist rein arithmetisch und die neu gebildete Curve kommt mit den richtigen Abscissenabschnitten.

Für die Herstellung der in der Tabelle I gegebenen Zahlenreihen habe ich den Schwerpunkt der betreffenden Curve als Drehpunkt genommen und die mit Hilfe der in den Schwerpunkt verschobenen Abscissenaxe gefundenen Werte mit ihren Abständen vom Drehpunkt multiplicirt. Dies Verfahren hat den Vorteil, daß die Summe der Veränderungen, die die Zahlenreihe zur Beseitigung des „δ" zu erfahren hat, um 10 bis 20 % kleiner ausfällt, als es bei dem soeben formulirten Verfahren der Fall ist, aber da die Werte dabei durch Multiplication mit einem entsprechenden Factor zunächst in Summa auf Null gebracht werden müssen, findet eine Biegung der Curve statt, die sich zwar in jeder neuen Differenzreihe wieder ausgleicht, aber doch besser vermieden wird.

3. Die Behandlung und Herstellung der Hauptreihe.

Insofern die Hauptreihe als Differenzreihe der Summenreihe angesehen werden kann, geschieht ihre Befreiung von Fehlern durch die für die Differenzreihe gegebenen Regeln. Ein wesentlicher Unterschied besteht darin, daß die Endordinaten, also eventuell der Nullpunkt der Abscisse nicht fehlerfrei sein werden, daher erst nach den Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung graphisch festgelegt werden müssen. Häufig wird es auch nötig sein, Ordinaten graphisch zu interpoliren, um gleiche Ordinatenabstände zu gewinnen. Die Art des Vorgehens möge durch das in der Tabelle II gegebene Beispiel einer schwierigen Beobachtungsreihe aus der Praxis und durch die Fig. 3 bequem verständlich gemacht werden.

Fig. 3.



Die beobachteten Werte seien in der Figur durch die mit Knöpfchen versehenen Ordinaten graphisch dargestellt, ihnen entspricht die Zahlenreihe 1 in der Tabelle II, aber Figur und Tabelle beruhen auf ganz verschiedenen Beobachtungsresultaten. In der Fig. 3 ist von der Auslage der mittleren Fehler am Mittel abgesehen, ebenso von der Interpolation neuer Ordinaten, da beides der bildlichen Darstellung nicht bedarf. Die ausgezogene Curvenlinie soll das Ergebniß der einfachen graphischen Correctur darstellen, wie solche unter Festhaltung der beobachteten Endwerte stattzufinden hat. Die Summe der Ordinaten der corrigirten und durch einige Differenzreihen geglätteten Curve wird nicht gleich groß wie die Summe der Beobachtungen sein können. Die Berichtigung des Fehlers „R“ ist etwas umständlicher als bei den Differenzreihen. Bei diesen bestimmte sich die Berechnung des Factors „ϑ“ danach, ob die Summe der vorangehenden Reihe durch die erfolgte Correction größer oder kleiner geworden war, als sie sein sollte. In dem vorliegenden Fall könnte man zwar ohne erheblichen Fehler die Formel 3 benutzen, also die Ausgleichung durch die m-Werte bewirken, aber ganz strenge richtig wäre das nicht. Weil die Endordinaten der Hauptreihe noch unsicher sind, muß die Summe der Summenreihe und die Summe der invers entwickelten Summenreihe berücksichtigt werden. Wenn die Summenreihe gebildet wird, treten nämlich in deren Summe die Fehler der Anfangsglieder stark hervor, weil der Fehler mit der entsprechenden Positionszahl multiplicirt wird, die Summe der Fehler wird daher nicht Null. Wenn die Summenreihe invers, d. h. mit der höchsten Ordinate beginnend gebildet wird, so treten deren Fehler und die Fehler in deren Seite in der entsprechenden Summe der Reihe am stärksten hervor. Wenn die Reihe der Beobachtungen groß genug

ist, und soweit die Fehler nach dem Gesetz des Zufalls verteilt sind, werden diese Fehler mit Hilfe der beiden Summen zu Null werden. Wenn die genannten beiden Summen auch aus den graphisch corrigirten Werten entwickelt werden, so erhält man zwei Werte von „δ“. Die Vereinigung dieser beiden „δ“ ergibt dann die Entscheidung, ob das „R“ nach Formel 1 oder nach Formel 2 verrechnet werden muß. In der Tabelle 2 ist „R“ mit den h-Werten, in der Figur 3 mit den k-Werten verrechnet, wodurch dort die gestrichelte Curve entstanden ist. Wie man sieht, ist dadurch bereits der Nullpunkt etwas verlagert worden, während in der Tabelle die Endordinate verändert worden ist.

Die so berichtigte Hauptreihe gibt die Endordinaten der Summenreihe richtig wieder, aber die Summen der Summenreihen kommen nicht genau, sondern sind je mit einem Fehler behaftet, der ausgeglichen werden muß. Dieser Fehler kann nur daher kommen, daß die Flügel der Hauptreihe graphisch nicht direct corrigirt werden können, denn die Summe der Hauptreihe stimmt genau mit der Summe der Beobachtungen und die Werte in dem mittleren Teil der Hauptreihe sind richtig, weil die Curve hier mit Hilfe der Differenzreihen genügend frei von Fehlerwellen geworden ist. Wenn in der graphisch berichtigten Hauptreihe die Anfangswerte zu groß sind, müssen die Endwerte zu klein sein, weil die Summe der Hauptreihe genau ist, und umgekehrt. Daher müssen die Fehlsumme an der Summe der Summenreihe und die Fehlsumme an der Summe der invers gebildeten Summenreihe entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Die Summen solcher Summenreihen, wie sie hier in Frage kommen, bestehen aus den summirten Summenreihen der richtigen Werte „y“ und aus der summirten Summenreihe der Fehler. Die Fehler an den richtigen Beobachtungswerten mögen mit „f“, die Fehler an den berichtigten Werten „y“, der graphisch gewonnenen Zahlen mögen mit „φ“ bezeichnet werden. Das Verfahren zur Ermittelung der für die Schwenkung maßgebenden Werte δ_1 und δ_2 ergibt sich, algebraisch betrachtet, wenn A und B die Summen der Summenreihen der Beobachtungsresultate, a und b die der berichtigten entsprechenden graphischen Werte sind, wie folgt:

$$A = \sum_{ny_1=s}^{y_n=s} s + nf_1 + (n-1) f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n.$$

$$a = \sum_{ny_1=s}^{y_n=s} s + n\varphi_1 + (n-1) \varphi_2 + \cdots + 2\varphi_{n-1} + \varphi_n.$$

$$A - a = \pm \delta_1 = \pm [n(f_1 - \varphi_1) + (n-1)(f_2 - \varphi_2) + \cdots + 2(f_{n-1} - \varphi_{n-1}) + f_n - \varphi_n]$$

$$B = \sum_{n y_n = s}^{y_1 = s} s + f_1 + 2 f_2 + \cdots + (n-1) f_{n-1} + n f_n.$$

$$b = \sum_{n y_n = s}^{y_1 = s} s + \varphi_1 + 2 \varphi_2 + \cdots + (n-1) \varphi_{n-1} + n \varphi_n.$$

$$B - b = \mp \delta_2 = \mp [(f_1 - \varphi_1) + 2(f_2 - \varphi_2) + \cdots + (n-1)(f_{n-1} - \varphi_{n-1}) + n(f_n - \varphi_n)]$$

$$\delta = \pm \frac{\delta_1 - \mp \delta_2}{2} = {}^1/_2 \begin{cases} n. \text{ ungerade.} \\ (n-1)(f_n - \varphi_n) + (n-3)(f_{n-1} - \varphi_{n-1}) + \cdots \\ \quad + 2(f_{n-r+1} - \varphi_{n-r+1}) - 2(f_{n-r-1} - \varphi_{n-r-1}) - \cdots \\ \quad - (n-3)(f_2 - \varphi_2) - (n-1)(f_1 - \varphi_1) \\ n. \text{ gerade.} \\ (n-1)(f_n - \varphi_n) + (n-3)(f_{n-1} - \varphi_{n-1}) + \cdots \\ \quad + (f_{n-r+1} - \varphi_{n-r+1}) - (f_{n-r} - \varphi_{n-r}) - \cdots \\ \quad - (n-3)(f_2 - \varphi_2) - (n-1)(f_1 - \varphi_1) \end{cases}$$

Vorstehende Rechnung zeigt, daß für das „δ“, also die halbe Differenz zwischen δ_1 und δ_2 die Seiten oder genauer gesagt die Flügel der Reihe in gleichmäßiger Weise zur Geltung kommen und daß die Arbeit der Rute in richtiger Weise durch die Schwenkung ergänzt wird. Wenn die Fehler nicht ganz nach dem Gesetz des Zufalls verteilt sind, wird die Ausgleichung unvollkommen, was an dem Zahlenbeispiel der Tabelle II ersichtlich gemacht werden möge. Es sind in der Tabelle

$A = 40228{,}95$ $B = 68363{,}75$
$a = 40116{,}6259$ $b = 68462{,}0157$

$\delta_1 = 112{,}3241$ $\delta_2 = -98{,}2657 . (\delta_1 - \delta_2) = 210{,}5898 . \delta = 105{,}2949$
$a + \delta = 40221{,}9208$ $b - \delta = 68356{,}7208$
$A = 40228{,}95$ $B = 68363{,}75$

$-7{,}0292$ $-7{,}0292$ Fehler an der Ausgleichung.

Die Deutung solcher überschießenden Summen, wie im vorliegenden Fall der Summe $-7{,}0292$ wird nicht durch die Formeln klar ersichtlich gemacht, weil die Vorzeichen der Werte von der Beschaffenheit des besonderen Falls abhängig sind. $\delta_1 + \delta_2 = 7{,}0292$ wird $= 0{,}032$, also nahe $= 0$, wenn man von dem zweiten Glied der Beobachtungsreihe $0{,}5022$ abzieht und dies symmetrisch dem anderen Flügel, also dem vorletzten Glied der Reihe hinzufügt,

wobei die Summe der Hauptreihe unverändert bleibt und die Summe der Summenreihe ebensoviel verliert, wie die Summe der invers addirten Summenreihe gewinnt. Dabei bleibt der Wert δ unverändert, weil δ_1 und δ_2 entgegengesetzte Vorzeichen haben, daher ihre Summe innerhalb der durch den Gegensatz gegebenen Bedingung sich symmetrisch ändern kann, ohne daß ihre Differenz sich ändert. Da stets durch derartige Vertauschungen $\delta_1 + \delta_2$ zu Null gemacht werden kann, ohne den Wert von δ zu ändern, folgt, daß eine unvollständige Compensation der Fehler in den beiden Flügeln der Beobachtungsreihe die Correction der Endordination der „berichtigten" Reihe durch Schwenkung nicht beeinträchtigt. Das Verhalten gestattet es die Präcision des Zufalls in dem speciellen Fall etwa so festzustellen, als wenn man dies mit einer genau zutreffenden rationellen Formel daraufhin prüfte, nur daß in letzterem Fall die Rechnungen nur diesen einen Zweck haben würden. Die Methode der kleinsten Fehlerquadrate würde dazu nicht dienen können. Je weiter sich $\delta_1 + \delta_2$ von Null entfernt, desto ungleichmäßiger ist die Verteilung der Fehler auf die beiden Flügel der Reihe und in der Regel wird sich desto weniger vollständig der Fehler in der Summe der Reihe compensiren. In dem vorliegenden Fall war die Summe der Fehler = 1,32, und muß durch die *m*-Werte beglichen werden.

Bei dieser Reihe von etwa 200 Beobachtungen, bei denen ich mich der wesentlichen Hilfe des Docenten der Psychologie in Leipzig, Herrn Dr. Fr. Krüger zu erfreuen hatte, war die kleinste Maßeinheit zwei Tonschwingungen. Da die Versetzung einer halben Schwingung ausreicht, um $\delta_1 + \delta_2$ auf Null zu bringen, haben sich wohl keine merklichen, einseitig wirkenden Fehler eingeschlichen. Es überrascht mich und es ist überraschend, daß die Compensation so leicht zu erreichen ist, denn ich hatte absichtlich die mit so erheblichen Fehlern belastete Beobachtungsreihe für die Demonstration der Correction mittelst des graphischen Verfahrens ausgesucht. Der Befund beweist: daß die Anzahl der Beobachtungsresultate eben genügte, daß die Fehler zufällige waren und daß die graphische Correctur, obgleich sie groß ausfällt, sich rechtfertigt, so daß die Curve ein richtiges Bild des physikalischen Verhaltens darstellt, da dieses seiner Natur nach den eingangs gestellten Bedingungen für eine graphisch corrigirbare Curve entsprach.

Die Annäherung an die Summen der Summenreihen weiter zu treiben, als es die Berichtigung des Fehlers verlangt, würde nicht berechtigt erscheinen, weil man sich dadurch von der Berichtigung

der gleichwertigen Fehler $\delta_1 + \delta_2$ zu ungunsten des einen dieser Fehlerberichtigungen weiter entfernen würde.

Die Drehung nach Gl. 4 und 5 gibt einen anderen Nullpunkt als die Beobachtungsreihe, aber dieser Nullpunkt ist der für alle Beobachtungswerte zusammengenommen richtigere. Ehe man seine Lage graphisch bestimmt, kann noch eine Correctur der Hauptreihe vorgenommen werden, die dahin zu gehen hätte, daß die Summe ihrer Fehler zu Null gemacht wird, oder daß die Summe der Beobachtungen genau wieder hergestellt wird, oder endlich, was ich für richtig halte, daß Beides in möglichster Annäherung bewirkt wird. Diese Verbesserung hat mit Hilfe der m-Werte zu geschehen. Um die tg α zu finden, muß ungefähr die Lage des wahren Nullpunkts bekannt sein. Sie war und blieb in dem Fall der Tab. II $= -0{,}0138$. Die Summe der Fehler war in dem vorliegenden Fall — 1,3185, daher würde die Summe der Fehler Null werden, wenn die Summe der Hauptreihe um die Hälfte der Fehlersumme niedriger gemacht worden wäre. Der Unterschied zwischen der Summe der Hauptreihe und der Summe der beobachteten Werte war Null. Um also der obigen Forderung möglichster Annäherung an beide Werte gerecht zu werden, muß die Summe der Fehler durch 4 geteilt werden. Es ist tg $\alpha =$ 663,2605/35,0138. Daraus berechnet sich die Summe der m-Werte zu 1818,0139 und $0{,}3296/1818{,}0139 = \vartheta$. Die einzelnen m-Werte mit ϑ multiplicirt und von den betreffenden Ordinaten abgezogen geben dann die in Tab. II in Reihe V verzeichneten Ziffern. Diese können schon genügen, wenn man prüfen will, wie weit bestimmte Formeln für die corrigirte Beobachtungsreihe zutreffen. Die Bestimmung der Endordinaten ist allerdings nur in Annäherung geschehen, soll sie sehr genau werden, so müßte von den äquidistanten Ordinaten der jetzt gewonnenen Curve aus die Arbeit noch einmal gemacht werden, doch dürfte, soweit ich übersehe, die auf diese Weise zu bewirkende weitere Verbesserung der Endordinaten eine minimale, graphisch kaum ausnutzbare sein.

Wird eine Tabelle für bequemen Gebrauch gewünscht, so sind äquidistante auf den wahren Nullpunkt bezogene Ordinaten zu interpoliren[1]). Damit verliert man die exacte Grundlage und ist auf möglichste Genauigkeit der Arbeit angewiesen. Diese interpolirte Curve muß jedenfalls durch einige Differenzreihen ausgeglättet werden. Das ist in Tab. II ausgeführt worden. Nennenswerte Fehler werden dabei nicht gemacht worden sein, aber immerhin ist der Boden der Beobachtungsreihe verlassen.

1) Dies gilt nur für das übliche graphische Interpolarisationsverfahren.

Die graphische Bestimmung des wahren Nullpunkts ergibt sich von selbst, wenn er zwischen x_0 und x_1 liegt. Liegt er jenseits x_0 so wird eine kleine Verlängerung der Curve über die Ordinate von x_0 hinaus erforderlich. Man legt die Ordinaten y_0, y_1, y_0, y_2, aus, lagert über deren Endpunkten die Curvenrute, zieht die Curve zwischen y_1 und y_0 und lagert die Rute mit schweren Gewichten auf die Köpfe von y_1, y_2, y_3. Das freie Ende der Rute verschiebt und biegt man durch Vorsetzung und Schiebung eines Gewichts in der Weise, daß die Rute die Curve zwischen y_1 und y_0 genau wiedergibt, dann ist der Punkt, den sie auf der Abscissenaxe durchschneidet der wahre Nullpunkt. Dabei nimmt man die Abscissenabschnitte recht groß, etwa 50 bis 200 mm. Wird eine Extrapolarisation an der größten Ordinate erforderlich, so sind meistens die letzten Ordinaten dabei stark zu vergrößern und die Abscissenabstände klein zu nehmen, dann wird auch diese Ergänzung recht genau ausfallen.

Wenn äquidistante Ordinaten verlangt werden, wird die Entfernung des wahren Nullpunktes von x_0 zwischen Zirkelspitzen genommen und also das „d" der Figur 3 an den einzelnen Abscissenpunkten abgestochen. Dann werden an der entsprechend ausgezogenen Curve die zugehörigen Ordinatenlängen abgemessen. Auf diese Weise erhält man die z-Ordinaten der Fig. 3 und die Reihe VI der Tab. II. Obgleich die Zahlen mit möglichster Genauigkeit gemessen wurden, waren sie doch unbefriedigend, weil die Curve nach Feststellung des Nullpunkts nicht entsprechend durch Differenzreihen ausgeglättet worden ist. Das konnte unterlassen werden, weil es nur auf Gewinn einer Tabelle ankam, aber jetzt mußte die neue Curve durch zwei Differenzreihen berichtigt werden. Das ist geschehen und hat die definitiv berichtigte Reihe VII der Tabelle ergeben.

Wenn die Gewichte der Beobachtungsresultate in vorschriftsmäßiger Weise verrechnet werden, bekommt man unbequeme Intervalle für die graphische Arbeit. Legt man die Beobachtungen einfach mit den beiden Längen aus, die sich durch die mittleren Fehler am Mittel ergeben, so kann man den Gewichten gerecht werden, wenn man bei den guten Gewichten den Mitteln näher zu bleiben sucht als bei den schlechten Gewichten. Kann die Curve nicht entsprechend geführt werden, so sind constante Fehler vorhanden und dann war es richtig, die Ordinatenzahlen nicht stärker als geschehen, mit ihren Gewichten zu belasten.

Den Fall, wenn die Beobachtungen so ungünstig postirt sind, daß alle Ordinaten, um äquidistant zu sein, interpolirt werden

müssen, habe ich nicht geprüft. Ich glaube aber Folgendes sagen zu können. Nach Ausglättung der äquidistanten Ordinatenreihe werden an der Curve die den Beobachtungen entsprechenden Ordinaten interpolirt. Mit ihren Summenreihen wird das für die Drehung bestimmende δ ermittelt. Der Drehpunkt kann sehr annähernd mit den äquidistanten Ordinaten bestimmt werden. Die zur Bestimmung des „p" erforderlichen β-Werte der zum Berechnen des δ verwendeten Ordinaten werden dann aber in Summa nicht Null werden. Man braucht einen Factor q, der diese $\Sigma\beta$ zu Null macht und mit dem dann auch das „p" nach folgenden Gleichungen berechnet wird

$$\beta_1 + \cdots + \beta_r = q(\beta_{r+1} + \cdots \beta_n)$$

$$p[q(\beta_n \cdot n + \beta_{n-1} \cdot (n-1) + \cdots \beta_{r+1} \cdot (r+1)) - (\beta_r \cdot r + \cdots + \beta_1)] = \delta,$$

wenn die Addition bei y_n zu beginnen hätte. Mit dem „p" können dann sämmtliche β-Werte multiplicirt werden, ohne einen Fehler in die Rechnung hinein zu tragen. Da δ bei guter Arbeit nur klein sein wird, wird jedenfalls der bei diesem Verfahren eintretende Fehler sehr klein sein.

Ich bedaure durch Worte das Verfahren nicht bequemer verständlich machen zu können. Wenn die Betrachtung der Tabellen das Verständniß des Gesagten nicht genügend erleichtern sollte, so wird doch die praktische Ausführung des Verfahrens dessen Richtigkeit und Notwendigkeit klar machen. In dem Vorstehenden wurde das übliche Verfahren der graphischen Interpolation angenommen. Dies Verfahren ist jedoch wegen der Fehler des Curvenlineals wenig genau. Ein völlig genaues Verfahren wird in Folgendem für den besonderen Bedarfsfall angegeben.

4. Die graphische Interpolation.

Ich habe mich bemüht mit Hilfe der Differenzcurve zu interpoliren, weil man dabei relativ sehr bedeutende Vergrößerungen verwenden kann. Das Verfahren wird am besten durch eine praktische Aufgabe erläutert, Es wird die folgende Reihe äquidistanter Ordinaten für die Abscisseneinheit = 1 gegeben:

Y_0

0. 39,73487; 66,28472; 85,76278; 101,03055; 113,73620; 124,84728;

Y_7

135,01536;

es sollen die Ordinaten für die Abscissen: 0,5; 1,5; 2,5; .. 5,5 interpolirt werden. Die Differenzcurve obiger Zahlenreihe wird ausgelegt und es werden darin in den Abständen 0,5; 1,5; ... der Differenzabscissen die Ordinaten graphisch interpolirt und deren

Werte durch ihre Δ^2 verschärft. Dabei bindet die Bedingung, daß $\nabla_0 = \Delta_0 + \Delta_1$ sein muß. Diese interpolirten Ordinaten sind also $y_{1,5} - y_{0,5}$; $y_{2,5} - y_{1,5} \cdots y_{6,5} - y_{5,5}$. Die gefundenen Zahlen sind:

32,02476; 22,53523; 17,10996; 13,83223; 11,81303; 10,56818.

Um diese Zahlen gebrauchen zu können, muß irgend eine der zu interpolirenden Ordinaten bekannt sein. Diese Ordinate möge im Nachfolgenden mit Y_0, die in der ganzen Reihe vorhergehende mit Y_{-1} die auf Y_0 folgende mit Y_1 bezeichnet werden. Es wird am zweckmäßigsten die Ordinate $y_{4,5}$ als Y_0 genommen; die Ordinate $y_4 = 101{,}03055$ ist also Y_{-1}. Ferner möge die immer ein Glied überspringende Differenzreihe mit dem Zeichen: ∇ signirt werden.

∇: 39,73487; 32,02476; 22,53523; 19,47786; 17,10996; 15,32647;
∇ 13,83223; 12,70565; 11,81303; 11,11108; 10,56818; 10,16808;
Δ^2 1,12658; 0,89262; 0,70195; 0,54290; 0,40010;
Δ^3 0,23396; 0,19067; 0,15905; 0,14280;
Δ^4 0,04329; 0,03162; 0,01625;
Δ^5 0,01167; 0,01537;

Durch Halbirung einer der ∇ kann man nicht die gesuchte Ordinate gewinnen, denn bei einer Curve, die concav gegen die Abscissenaxe verläuft, fallen die halbirten Werte notwendig zu groß aus. Es ist $\frac{y_{1,5} - y_{0,5}}{2}$ größer als $y_{1,5} - y_1$. Wenn mit + die zu großen und mit − die zu kleinen Δ signirt werden, sö ergiebt sich für die concav verlaufenden Curven folgendes Schema:

$$\overset{+}{\nabla_0}\ \nabla_1\ \overset{+}{\nabla_2}$$
$$\overset{+}{\Delta^2_0}\ \overset{-}{\Delta^2_1}$$
$$\overset{+}{\Delta^3_0}$$

Die Δ_0 fallen steigend zu groß aus. Da sich an Δ^2_0 zwei ∇ beteiligen, müssen diese mit 2.2, die Δ^3_0 aus demselben Grunde mit 2.2.2 dividirt werden. Daraus ergeben sich folgende „graphische" Interpolationsformeln:

$$Y'_0 = Y_{-1} + \tfrac{1}{2}\nabla_0 - \tfrac{1}{4}\Delta^2_0 - \tfrac{1}{8}\Delta^3_0 - \tfrac{1}{16}\Delta^4_0 - \cdots \quad (6\,a)$$
$$Y''_0 = Y_{-1} + \tfrac{1}{2}\nabla_1 + \tfrac{1}{4}\Delta^2_1 + \tfrac{1}{8}\Delta^3_1 + \tfrac{1}{16}\Delta^4_1 + \cdots$$
$$\tfrac{1}{2}(Y'_0 + Y''_0) = Y_0.$$

Wenn die Originalcurve convex gegen die Abscissenaxe verläuft, so werden die Werte Δ_0 zu klein und Δ_1 wird jetzt wachsend zu groß. Es empfiehlt sich für diesen Fall die folgende Formel:

$$Y''_0 = Y_{-1} + \tfrac{1}{2}\Delta_1 - \tfrac{1}{4}\Delta^2_1 - \tfrac{1}{8}\Delta^3_1 - \tfrac{1}{16}\Delta^4_1 - \cdots \quad (6\,b)$$

Man findet Formel 6b bestätigt, wenn man eine Potenzreihe

z. B. n^5 darauf prüft, für 6 a steht die Tabelle I zur Verfügung. Wenn die letzte Differenz nicht Null ist, wird der Wert von Y_0 natürlich etwas zu groß; man kann dem Rechnung tragen. Uebrigens ergiebt sich die Richtigkeit der Formel 6 a. wohl genügend durch die Verfolgung unserer Aufgabe. Es ist nach der soeben vorgeführten Differenzenbildung

$$Y_0' = 101{,}03055 + 1/2 \,.\, 13{,}83223 - 1/4 \,.\, 1{,}12658 - 1/8 \,.\, 0{,}23375 \\ - 1/16 \,.\, 0{,}04329 - 1/32 \,.\, 0{,}01167 = 107{,}632715.$$

Es wird $Y_0'' = 107{,}6328821$, (also: $Y_0 = 107{,}6327680$). Man kann diese Formeln schließen, wenn man von der letzten, noch brauchbaren Differenz, hier Δ^4, ausgehend, eine Mittelcurve bis zu derjenigen Δ^n führt, die auf die letzte Decimalstelle keinen Einfluß mehr hat. Hier ist dies die Δ^9. Der Abscissenpunkt dieser Δ^n wird als Nullpunkt genommen, von da aus geht die Curvenrute in der Abscissenaxe weiter. Es kommt auf die Genauigkeit dieser Mittelcurve, so weit ich sehe, wenig an, denn ihre Fehler compensiren sich. Ihre Werte werden von Y_0' subtrahirt und Y_0'' zugelegt, nachdem sie durch die ihren Positionen entsprechenden Potenzen von 2 dividirt worden sind. In dem vorliegenden Fall wurde der Schlußwert von Y_0 gefunden = 107,632780.

Wenn man dann von Y_0 ausgehend die Ordinaten für $x = 3{,}5$ 2,5 1,5 0,5 und ferner für 5,5 und 6,5 entwickelt, so erhält man die Zahlenreihe:

22,13060. 54,15536. 76,69059. 93,80055. 107,63278. 119,44581. 130,01399.

Fügt man diese Reihe in die oben gegebene Hauptreihe ein und entwickelt dann die Differenzreihen, so ist Δ^4 noch gut (in y_3 scheint sich in den letzten Decimalen ein nicht mehr aufzufindender Schreibfehler eingeschlichen zu haben), die Δ^5 ist ungenügend.

Für die Ordinatenverschiebung bei Berichtigung des Nullpunktes empfiehlt es sich, die Verschiebung in der leicht zu vergrößernden Differenzcurve vorzunehmen. Das erforderliche y wird man genau genug durch Proportion aus den beiden größten Ordinaten berechnen können.

5. Anweisung für das mechanische Verfahren.

In der mir näher liegenden Litteratur habe ich keine irgend eingehende Anweisung für das mechanische Verfahren gefunden. In den mathematischen Hilfsbüchern wird meistens die graphische

Interpolation lobend erwähnt; es wird auch wohl vorgeschrieben die Längeneinheiten der Axen so zu wählen, daß die Curve ganz innerhalb eines Quadrats liege. Kohlrausch[1]) äußert sich etwas eingehender wie folgt: Man trägt in Coordinatenpapier die beobachteten x und y ein, verbindet die entstehenden Punkte (Kreuze) durch eine Curve und entnimmt aus der letzteren den Wert y_0, welcher der Abscisse x_0 entspricht. Beobachtungsfehler machen sich, wenn viele Beobachtungen vorliegen, als Unregelmäßigkeiten der Curve geltend. Man kann diese Darstellung zur Ausgleichung der Fehler verwenden, muß aber umsichtig verfahren." Eine etwas eingehendere Anweisung dürfte das Verfahren erleichtern und Zeit ersparen.

Zur ausgiebigen Benutzung des Coordinatenpapiers, z. B. des Papier quadrillé von L. Guiget, das in Breite von 0,7 m und in beliebiger Länge zu haben ist, pflegt man das Papier auf einen ebenen Tisch zu bringen, den Rand umzulegen, die Fläche anzufeuchten und dann das Papier unter allseitigem Zug mit diesem Rand festzukleben. Bei diesem Aufziehen treten Verzerrungen der sonst recht genauen Linienführung ein. So war in einem Fall recht sorgfältigen Aufziehens die Breite 703 mm geworden, und in der Länge war eine Verkürzung von 4 mm auf 1000 eingetreten. Außerdem verlaufen die Linien ein wenig gebogen. Diese Fehler sind für mein Verfahren gleichgültig, nur ist es bequem, die Abscissenintervalle fertig vorliegend auf dem Papier zu haben. Diese Intervalle variiren um $\pm 0{,}25\,\%$, ein Fehler, den man vernachlässigen kann. Die Teilungen auf dem Papier gestatten außerdem die Abweichungen von den Ordinatenlängen, die bei der Correction entstehen, sofort abzulesen und deren Summe möglichst auf Null zu bringen. Man kann denselben Bogen für hundert Curven verwenden, da man jeden Strich des Papiers für die Abscissen verwenden kann, nur darf man die Curven nicht jedesmal ausziehen, sondern es genügt die Markirung der Ordinatenenden durch einen Strich mit scharfer Bleifeder.

Die hölzernen Curvenruten, die man jetzt in Längen von 1 m und in mehreren Stufen der Steifigkeit in besseren Papierhandlungen erhalten kann, sind von großer Vollkommenheit. Man kann die Ruten mit einander vertauschen, ohne daß die Ausmessungen der von ihnen gebildeten Curven nennenswerte Verschiedenheiten ergeben. Die Ruten sollen nur die Fehlerwellen abgleichen, also lediglich eine gut regelmäßig gekrümmte Curve ergeben, man darf

1) Leitfaden der praktischen Physik. Leipzig 1892. S. 26.

ihnen nicht Gewalt antun, sonst bekommt die Curve Knickungen. In zwei Brettchen von etwa 5 cm Seite und 1 cm Dicke wird eine Rinne von etwa 1 cm Tiefe und Breite eingefeilt, so daß sich die Rute in diesen Rinnen bequem verschieben kann. Mit diesen Brettchen wird die Rute so gelagert, daß sie über die Köpfe der beiden Endordinaten hinläuft. Dann wird die Mitte der Rute durch zwei viereckige, etwa aus Cigarrenkistenholz geschnittenen Brettchen festgeklemmt, indem man die Ecken der Brettchen, die mit einem Gewicht beschwert werden, gegen die gehörig gelagerte Rute anpreßt. Von hier aus bringt man, von Ordinate zu Ordinate nach beiden Seiten hin fortschreitend, die Rute in Lage, indem man sie an jeder Ordinate mit etwa 700 g schwerem Bleigewicht belastet. Endlich fixirt man die Rute an beiden Endpunkten. Wenn man dann alles Andere wieder fortnimmt, soll die Rute nahezu ihre Lagerung behalten; tut sie das nicht, so dürfte die Krümmung der Curve noch verbesserungsfähig sein. Bedingung ist, daß die Rute stark genug gekrümmt sein muß, um losgelassen sich entschieden zu strecken. Verläuft die Curve zu gerade, so kann dieser Bedingung nicht genügt werden, es muß dann dieser Teil der Curve mit vergrößerten Ordinaten und mit kleineren Abscissenabständen für sich ausgelegt werden. Verläuft die Curve zu steil, so können einige Hülfsordinaten oder deren Differenzen interpolirt werden.

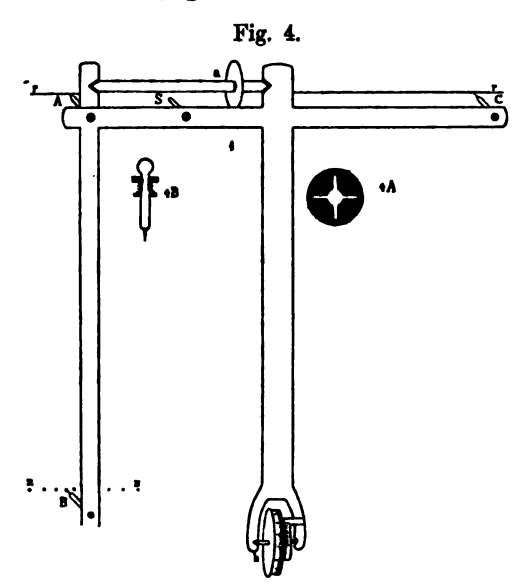
Für die Auslage, Interpolation und Aufnahme der Curven gestehe ich, ein besonderes und sehr bequemes Instrument benutzt zu haben, das ich unter dem Namen „Graphometer“ beschrieb[1]. Es handelt sich darum, einen genau und rasch arbeitenden Apparat zu haben, der die Fehler des quadrillirten Papiers umgeht und der bei Anpassung an die Dimensionen des Papiers so gut arbeitet, wie rationell verlangt werden kann. Die zu verlangende und bequeme Grenze der Genauigkeit ist 0,1 mm. Sie läßt sich mit bloßem Auge oder schwacher Lupenvergrößerung erreichen und die Temperaturschwankungen im Zimmer haben noch auf die Teile des Apparates und die Dimensionen, die bei diesen Arbeiten vorkommen keinerlei störenden Einfluß. Wollte man über die Grenze von 0,1 mm hinausgehen, so würde das Verfahren mühevoll und corrigirender Rechnungen bedürftig werden können. Unter diese Grenze hinunter zu gehen, hat keinen Zweck und wäre unbequem, denn bei 0,1 mm Grenzwert arbeitet man mit vierstelligen

1) Zeitschrift für Instrumentenkunde. December 1900. Das dort beschriebene Instrument konnte zugleich als Polarplanimeter benutzt werden. Es ist zweckmäßiger und billiger, es lediglich für die Curvencorrectur einzurichten.

Zahlen, über die man meistens bei den Untersuchungen nicht hinausgeht, noch auch darunter bleibt.

Um das Verfahren zur Umgehung der Fehler des Coordinatenpapiers zu demonstriren, gebe ich eine rein schematische Figur

Fig. 4.



des Graphometers, in der die Schrauben zur genauen Einstellung und die 5 Lupen des Apparates fortgelassen sind.

Die Nadelführungen, in die die drei durch Federn getragenen Nadeln, *A*, *B*, *C*, und Fig. 4 B., eingeschliffen sind, stehen genau im rechten Winkel zu einander. Die Abstände der Nadelspitzen von einander sind genau so groß, wie zwei Drehungen der Meßrolle *b*, d. h. annähernd genau 200 mm von einander entfernt, da die Meßrolle möglichst genau 100 mm Umfang hat. Diese Abmessungen sind bequem, äußerste Genauigkeit ist nicht durchaus erforderlich. An die Nadelführung *A* ist unten das Diaphragma Fig. 4 A. angeschroben. Dieses, über dem eine Lupe anzubringen ist, gestattet eine genaue Einstellung des Punktes, den die Nadel treffen soll. Das Diaphragma steht allerdings etwa 4 mm über dem Papier, damit die Nadelspitze auch von der Seite her mittelst entsprechend drehbar angebrachter Lupe beobachtet werden kann, jede Parallaxe wird aber dadurch vermieden, daß die Linien des Diaphragmas an der polirten Innenwand der Nadelführung spiegeln und verbogen erscheinen, wenn die Sehaxe nicht genau durch die Mitte der Führung verläuft. Der Apparat läuft auf den Rollen *a* und *b*, deren richtiger Vertikalstand durch den

mit polirtem kugeligen Ende versehenen Stift *S* gesichert ist. Es erschien zweckmäßig, die Rolle *a* durch zwei gleiche, nebeneinander stehende Rollen zu ersetzen und den Stift *S* dadurch entbehrlich zu machen, aber entsprechende Versuche haben erwiesen, daß der Apparat dann nicht mehr brauchbar ist. Der sehr leicht aufstehende Stift steuert nicht. Vielleicht könnte die Stellung der Rollen vertauscht werden, so daß *a* rechts von *b* stände, aber ich habe diesen Umtausch nicht versucht und stehe daher nicht dafür ein, daß der Umtausch den guten Lauf des Apparats unverändert lassen würde. Die Rollen *a* und *b* sind möglichst gleich groß, ihre Axen sollen genau parallel und genau senkrecht gegen die Linie *A*, *B* stehen, was durch Einstellung mittelst feiner Schraubbebewegung erreicht wird. Der Apparat soll in ganz gerader Linie vor- und rückwärts laufen. Obgleich der Mechaniker[1]) ihn mit entsprechender Einstellung absenden kann, ist nicht zu garantiren, daß er gut ankommen würde, daher gebe ich kurz das Verfahren für die Einstellung. Man zieht eine über 1 m lange rote Linie, legt das Lineal um und zieht mit derselben Seite desselben eine gleiche Linie so, daß der Rand beider Linien etwa 0,5 m von einander absteht. In der Mitte dieses Zwischenraums soll der Apparat laufen. Sobald er von der Mitte abweicht, stellt man die jedesmalige vordere Axe richtiger und erzielt so den geraden Vor- und Rücklauf. Allerdings wird der Apparat immer noch in einem großen Kreis verlaufen müssen, aber da die Nadeln sich wie der Cosinus dieses Kreises seitlich verstellen, ist im Beginn des Laufs die Krümmung durchaus unmerklich. Auf dem Papier quadrillé verliert die Meßrolle im Lauf von 2 m etwa 0,1 mm, aber sie läuft constant, da sie sich bei dem Rücklauf immer wieder auf Null einstellt, übrigens ist ein proportionaler Verlust gleichgültig, da die Messungen nur relative sind. Die Meßrolle wird durch einen Stift immer wieder auf Null eingestellt, so daß Vezählungen durchaus vermeidbar sind. Die Strecken bis 200 mm werden durch die hintere Nadel, darüber hinaus durch die vordere Nadel abgestochen, so daß der Apparat in der Regel nicht über 500 mm zu laufen hat.

Die bereits erwähnten Fehler des Coordinatenpapiers werden in folgender Weise umgangen. Man zieht in einer Entfernung von etwa 220 mm vom Rande des Coordinatenpapiers mit dem Lineal eine rote (leuchtende) Linie möglichst parallel mit einer Linie des Papiers. (*r*, *r* der Fig. 4). In die Mitte dieser Linie wird die

1) Zwickert, Kiel, Dänischestr.

Nadel A eingestochen, da wo sich mit ihr eine senkrechte Linie des Papiers kreuzt, dann wird der Apparat um den Stich als Centrum so gedreht, daß mit der Nadel C die Mitte der Linie r eingestellt wird. Ist dies geschehen, so sticht man die Nadel B in das Papier ein. Dadurch ist die Laufrichtung des Apparates senkrecht zur roten Linie gesichert. Die von der Nadel B gemachten Stiche x, x sind die Abscissenlinie. Die genügend richtigen Abscissenabstände sind durch die Linien des Papiers gegeben, wie sie die rote Linie kreuzen. In dieser Entfernung vom Rande pflegen die Abstände nur unmerklich unrichtig zu sein, so daß eine Berichtigung durch das Graphometer nicht lohnt. Die Aufnahme der Curvenlinie erfolgt unter Beihilfe von Lupen, die um die Nadelführung drehbar befestigt sind. Man beobachtet die Nadelspitze, nachdem die Lupe in Richtung der Curvenlinie eingestellt ist. Wenn man die Hand auf das Papier stützt, kann man den Apparat so bewegen, daß die Nadel sehr genau, sei es auf die Mitte der feinen Bleistiftlinie, sei es auf ihren Rand trifft. Bei mit neuem Papier und anderer Curvenrute ausgeführter Interpolation langer Ordinaten ergab sich ein Unterschied von $\pm 0{,}05$ mm, ich glaube daher, daß ein Fehler größer als 0,1 mm vermeidlich ist, wenngleich bei rascher Arbeit ein solcher doch manchmal eintreten wird, aber als zufällig sich compensirt und jedenfalls nicht viel schaden wird.

Bei Auslage einer Ordinate macht man sofort 5 mm oberhalb oder unterhalb des Endes einen Strich, damit man weiß, wo das Ende liegt, wenn die Rute dasselbe verdecken sollte. Die Auslegung einer Ordinate erfordert 1 Minute, die Einnahme etwas weniger. Die richtige Lagerung der Rute erfordert zuweilen mehr Zeit, als die Auslegung sämmtlicher Ordinaten. Am meisten Zeit verlangen die Rechnungen, so einfach sie auch sind. Ich rechne für 20 Ordinaten eine Arbeitszeit von 24 bis 30 Stunden, bis zur Gewinnung der durch Δ^{s} definitiv berichtigten und für eine Tabelle umgeformten Curve.

Selbstverständlich kann man auch einfach mit der Hand, also ohne Graphometer, die Arbeit ausführen, sie erfordert dann einige Differenzreihen mehr und die Interpolation und die Ordinatenverschiebungen werden viel ungenauer werden.

Schlußbemerkungen.

Die graphische Aufgabe: Reihen von Beobachtungsresultaten, sofern sie sich in eine Curve einfügen lassen, deren beide Coordinaten wachsen und die die Art ihrer Krümmung nicht ändert, be-

liebig vollkommen von ihren zufälligen Fehlern zu befreien, erfüllt sich wie folgt. 1) Es werden die Beobachtungsresultate als rechtwinklige Abscissen und Ordinaten einer Curve ausgelegt, indem die mittleren Fehler an den Mittelwerten auf Koordinatenpapier eingetragen werden. 2) Unter Festhaltung der Mittelwerte der beiden Endordinaten, deren eine Null sein kann, werden die „Fehlerwellen“ durch eine Curvenrute, die sich an die ausgelegten Werte anzuschmiegen hat, möglichst beseitigt und es werden die Längen der corrigirten Ordinaten ermittelt. 3) Die Summe der graphisch corrigirten Ordinaten wird berechnet. Weicht sie viel über 0,1 % von der Summe der Beobachtungsresultate ab, so wird die Rute wieder an die Curve angelegt, dem Befund möglichst entsprechend genau stärker oder schwächer gebogen und die neue Curve wieder aufgenommen. 4) Es werden die fehlenden äquidistanten Ordinaten in der neuen Curve interpolirt. Falls die beobachteten Werte nicht in die Reihe der äquidistanten Ordinaten hineinfallen, muß eine genügende Anzahl äquidistanter Ordinaten aufgenommen werden. 5) Die erste Differenzreihe dieser Curve wird berechnet. Probe: $\Sigma\Delta = y_n - y_0$. Die Δ-Reihe wird als Curve ausgelegt und unter Festhaltung der beiden Endwerte und möglichster Erhaltung der Summe der Reihe wird sie durch die Rute von Fehlerwellen unter Berücksichtigung der höheren Δ befreit und dann aufgenommen. 6) Der Fehlwert „R“ muß beseitigt, die Reihe also nach Formel 1 oder 2 berichtigt werden. Welche der beiden Formeln anzuwenden ist, ergibt sich aus Vergleichung der Summe der graphisch entwickelten Hauptreihe mit der aus den Δ neu zu bildenden Summe der Hauptreihe plus des „R“. Probe: die h-Werte (oder die k-Werte) sind richtig, wenn $\Sigma\Delta - n\Delta_n = h$. Ferner muß $\Sigma\vartheta h = R$ sein. Die einzelnen ϑh dienen zur Berichtigung der entsprechenden Δ-Werte. 7) Mit der berichtigten Δ-Reihe wird die Hauptsumme neu berechnet. Probe: Das Endglied der Reihe der Beobachtungen muß genau wiederkommen. Die Summe dieser Hauptreihe wird mit der schon festgestellten Summe der graphisch entwickelten Hauptreihe verglichen. Es ergibt sich ein Fehlwert $\pm\,\delta$. Um diesen Fehlwert zu begleichen, muß die Δ-Reihe entsprechend geschwenkt werden. 8) Es ist dafür die Ordinate des Drehpunkts zu suchen. Wenn die Summe aller Ordinaten der Δ-Reihe durch deren Anzahl dividirt wird, ergibt sich die Länge der Mittelordinate, an deren Kopf der Drehpunkt liegt. Die Mittelordinate von allen anderen abgezogen ergibt die β-Werte. Probe: $\Sigma\beta = 0$. 9) Die β-Werte werden mit ihren Positionszahlen multiplicirt und summirt.

10) Die Summe in δ dividirt ergibt den Factor „p", mit dem die β-Werte der „berichtigten" Δ-Reihe zu multipliciren sind. Probe: $\Sigma\beta p = 0, \sum_{n=m}^{1=m} p m \beta = \delta$. Die einzelnen $p\beta$ werden den entsprechenden Gliedern der Δ-Reihe sinngemäß zugelegt und dann wird die Hauptreihe neu gebildet. Man kann allerdings noch die Reihe Δ^2 bilden, berichtigen, schwenken und nach Schwenkung der Δ-Reihe die Hauptreihe genauer erhalten. Das richtet sich danach, wie weit man die Genauigkeit treiben will. 12) Mit einerseits den Beobachtungsresultaten, andererseits den entsprechenden Ordinaten der durch die Differenzreihe neu gebildeten Hauptreihe werden die Summenreihe und die invers addirte Summenreihe gebildet. Die Summen dieser vier Reihen werden berechnet. Die Vergleichung der beiden auf gleiche Art entwickelten Summenpaare ergibt die Fehlwerte $\pm \delta_1$ und $\mp \delta_2$. 13) Die halbe Differenz dieser beiden Werte ist das δ, das durch Drehung der Hauptreihe beseitigt werden muß. Man sucht mit Hilfe der schon vorhandenen äquidistanten Ordinaten den Drehpunkt auf und entwickelt die β-Werte. Sie werden nicht alle für die Bestimmung des „p" verwendet, sondern es werden nur diejenigen Ordinaten, die den Beobachtungswerten entsprechen, mit ihren Positionszahlen multiplicirt, addirt und zur Gewinnung des „p" in δ dividirt. 14) Mit dem p können alle β multiplicirt werden, die oben angegebene Probe ist aber nur für die den Beobachtungen entsprechenden β-Werte gültig. 15) Die $p\beta$ werden den entsprechenden Ordinaten der neuen Hauptreihe sinnentsprechend hinzugefügt. Damit ist die Schwenkung vollendet und es sind die beiden Endwerte der Ordinatenreihe richtig gestellt worden. 16) Mit der Curvenrute bestimmt man die Lage des wahren Nullpunktes oder, wenn erwünscht der wahren Endordinate. Wenn alle Ordinaten interpolirt werden mußten, ist das Verfahren etwas anders, dafür wird auf S. 16 verwiesen. 17) Man ermittelt die halbe oder viertel Summe der Fehler der Hauptreihe gegenüber der Reihe der Beobachtungsresultate, und beseitigt den Unterschied durch die m-Werte nach Gl. 3. Die Bestimmung des Nullpunktes ist nur annähernd, weil sie mit nicht ganz richtigen Endwerten ausgeführt werden mußte. Wird obige Rechnung so weit erforderlich wiederholt, kommt der Nullpunkt sehr genau, man hat sich aber zu fragen, ob diese weitere Verschiebung des Nullpunktes sich noch wird messen lassen. 18) Soll eine Tabelle gewonnen werden, so sind die Ordinaten entsprechend der Lage des wahren Nullpunkts

am besten in der ΔReihe zu verschieben. Dann ist die Curve durch einige Differenzreihen auszuglätten.

Wenn man eine Beobachtungsreihe graphisch corrigiren will, wird es richtig sein, die Abscisse des Endwerts paarig zu nehmen und im Uebrigen die Beobachtungen womöglich so einzurichten, daß die Abscissenabstände nicht allzu verschieden sind.

Leider erscheint die Schilderung der Arbeit verwickelter, als das die Ausführung derselben in der Praxis ist, wenn nur Rechenfehler vermieden werden. Es handelt sich um wenige sich meistens wiederholende Operationen, deren Modificationen ganz selbstverständlich erscheinen werden. Das Rechnen ist höchst einfach und wird durch die Proben gesichert. Einzig die Kürzungen der $p\beta$ erfordern einiges Nachdenken, weil diese Kürzungen je nach der Position der Zahl verschiedenes Gewicht haben.

Der entwickelte Gang verhindert unnütze Arbeit, läßt sich aber nur auf Kosten der Zuverlässigkeit kürzen. Die Stärke des Verfahrens liegt neben der Vermeidung einer Curvenformel, die wohl besser erst versucht wird, wenn die Curve fehlerfrei vorliegt, in der bedeutend verschärften Messung, wie sie durch die Differenzreihen erreichbar wird.

Ein Versuch zur Deutung der Agglutinierungsvorgänge.

Von

Wilhelm Biltz.

[Mit einer Curventafel im Text.]

[Mitteilung aus dem chem. Institut der Universität Göttingen.]

Vorgelegt in der Sitzung vom 5. März 1904 durch O. Wallach.

Im Folgenden beabsichtige ich zu zeigen, zu welchem Bilde man gelangt, wenn man die Einwirkung von Agglutinin auf Bakterien mit der Einwirkung zweier gelöster Colloide in Parallele setzt. Ich bemerke dazu, daß mir auf dem Gebiete der Serumforschung leider keinerlei praktische Erfahrung zur Seite steht, glaube aber, daß eine Beleuchtung der von Eisenberg und Volk[1]) auf dem Gebiete der Agglutination gefundenen Thatsachen vom Standpunkte der Colloidchemie wünschenswert ist[2]). Die gleichen Versuchsresultate sind vor kurzem von Arrhenius[3]) auf Grund des Massenwirkungsgesetzes und des Verteilungssatzes diskutirt worden. Es scheint mir indessen, daß die hier vertretene, von jener fundamental verschiedene Anschauung den Thatsachen ungezwungner und in weiteren Maße gerecht wird. Es sollte mich freuen, wenn die folgenden kurzen Hinweise den Kreisen der

1) Z. f. Hygiene 40, 155 (1902).

2) Ein wie lebhaftes Interesse diesem Capitel der Chemie im Zusammenhange mit der vorliegenden Frage auch von Seiten der Mediciner entgegengebracht wird, beweisen die schönen aus dem K. Institut für exp. Therapie zu Frankfurt a/M hervorgehenden Arbeiten von M. Neisser, Friedemann und Bechhold. (Vers. deutsch. Natf. u. Aerzte Cassel 1903; Münch. med. Wochenschrift 1904 Nr. 11).

3) Z. f. phys. Chem. 46, 415 (1903).

Fachmänner Anregung, insbesondere in betreff der weiteren experimentellen Bearbeitung dieses Gebietes liefern könnten.

Die Erscheinung der Agglutination setzt sich aus zwei Vorgängen zusammen: dem der Aufnahme von agglutinirender Substanz (Serum) von Seiten der Bakterien (agglutinirbarer Substanz) und dem der Sedimentirung des gebildeten Complexes.

Es läßt sich zunächst zeigen, daß die Erscheinung der Sedimentation eines, aus zwei, vorher in Lösung befindlichen Componenten gebildeten Körpers häufig beobachtet werden kann, wenn sich beide Komponenten in colloidaler Lösung befinden und daß es nicht nötig, in manchen Fällen sogar ausgeschlossen ist, zur Erklärung dieser Sedimentation die Wirkung einer chemischen Affinität zu Hilfe zu nehmen. Da die agglutinirenden Substanzen ganz unzweifelhaft colloïdale Lösungen sind, die aufgeschwemmten Bakterienmassen als feine Suspensionen dieser Klasse von Stoffen ungemein verwandt sind, so liegt zunächst für den angestrebten Vergleich kein prinzipielles Bedenken vor. Gegenseitige Fällung von colloidalen Stoffen ist bereits von früheren Autoren beobachtet worden, wenngleich den fraglichen Beobachtungen auch nicht von allen Seiten Anerkennung geworden ist. Ich selbst konnte von einer Reihe, in wässriger Lösung befindlicher Colloide zeigen, daß sie ohne Elektrolytzusatz sich aus ihren Lösungen auszufällen vermögen, und die gemischten Hydrogele sedimentirt werden[1]). Die folgenden Hydrosole der ersten Reihe fällen die der zweiten aus:

Platin	Eisenhydroxyd
Gold	Aluminiumhydroxyd
Selen	Chromhydroxyd
Cadmiumsulfid	Thoriumhydroxyd
Antimonsulfid	Zirkonhydroxyd
Arsensulfid	Cerihydroxyd.
Kieselsäure	
Zinnsäure	
Molybdänblau	
Wolframblau	
Vanadinpentoxyd.	

Um die Erscheinung der gegenseitigen Ausfällung hervorzurufen, ist, wie alsbald näher besprochen werden soll, die Innehaltung bestimmter Mengenverhältnisse notwendig. Die ausgefällten Gele sind zu Adsorptionsverbindungen nach der Art des Goldpurpurs zusammengetreten. Colloïde, die in der gegebenen Ta-

1) Vgl. dazu Wilhelm Biltz Ber. 37, 1095 [1904].

belle in der gleichen Vertikalreihe stehen, vermögen sich nicht auszufällen; wir beobachten demgemäß auf diesem Gebiete eine gewisse, wenn auch zunächst nicht so eng begrenzte Spezifität in der Fällbarkeit, wie bei der Agglutination. Wie bekannt, wird die Spezifität mit dem elektrischen Verhalten der Colloïde in Verbindung gebracht.

Ueber die quantitativen Verhältnisse, nach denen die auf solche Weise gebildeten Adsorptionsverbindungen zusammengesetzt sind, ist bisher noch nicht viel bekannt. Insbesondere fehlen Erfahrungen über die von einem Gel adsorbirte Menge eines zweiten, wenn dieses in großem Ueberschusse zugesetzt wird, wenn also die Verhältnisse genau so liegen, wie bei den Versuchen von Eisenberg und Volk, bei denen die Aufnahmefähigkeit von agglutinirbarer Substanz für überschüssige, agglutinirende Substanz gemessen wurde. Indessen liegen recht zahlreiche Erfahrungen über die Adsorption überschüssiger Elektrolyte oder Hydrosole auf bereits ausgefällten Hydrogelen vor. Daß die Adsorption im Wesentlichen in gleicher Weise erfolgt, unabhängig davon, ob sie vor der Sedimentirung des Hydrogels, gleichzeitig mit dieser oder auf bereits ausgefälltem Hydrogel statthat, lehren die Versuche von Küster, über die Bildung der Jodstärke; ebenso solche, die ich über die Bildung des Lanthanblau's angestellt habe[1]). In der Gesetzmäßigkeit, nach der die Adsorption von Elektrolyten oder Colloiden auf Hydrogelen erfolgt, und in der Gesetzmäßigkeit der Agglutination nach Eisenberg und Volk zeigt sich bemerkenswerte Uebereinstimmung. Diese Uebereinstimmung illustrirt die folgende Kurventafel.

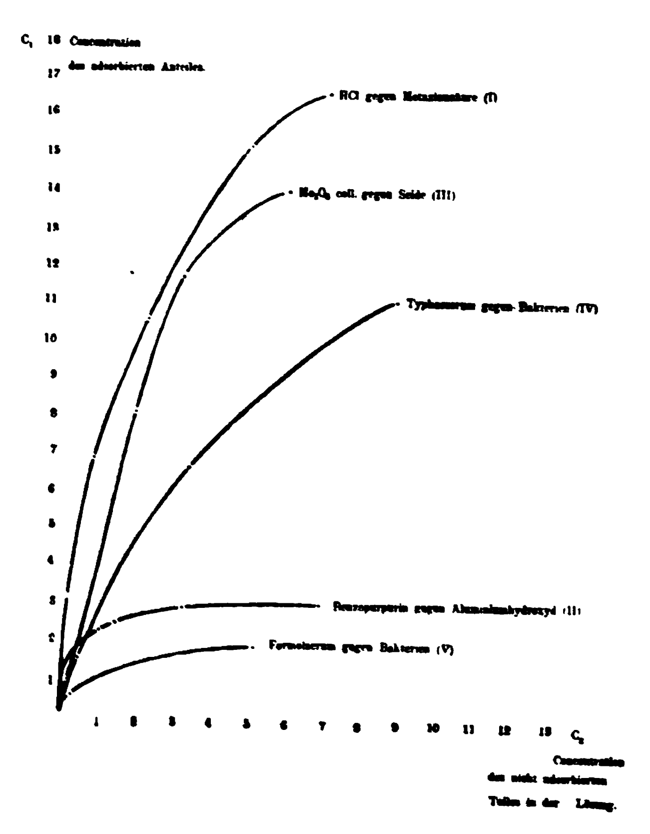
In dieser werden durch Kurve I die Gleichgewichtsverhältnisse veranschaulicht, die bei der Aufnahme von Salzsäure aus wässriger Lösung in das Hydrogel der Zinnsäure eintreten. Durch Kurve II wird die Adsorption von einem organischen Colloïd (Benzopurpurin)[2]) in frisch gefälltem Aluminiumhydroxyd gezeigt. Kurve III gilt für die Adsorption eines anorganischen Colloïds, Molybdänblau (Mo_3O_8) auf Seide, einem den Hydrogelen nahestehenden Substrat. Kurve IV zeigt die Verteilung von Agglutinin zwischen Bakterien und Lösung. Kurve V die entsprechende eines geschwächten Agglutinins. Kurve I ist nach den Messungen von van Bemmelen[3]) gezeichnet, Kurve II und III von Herrn

1) Ber. 37, 719 [1904].

2) Einen Vergleich von „Färbung“ mit organischen Farbstoffen und „Agglutination“ hat bereits Bordet angestellt.

3) Ztsch. anorg. Ch. 23. 111 (1900).

Utescher im hiesigen Institut gemessen[1]). Kurve IV und V wurden nach Eisenberg und Volk gezeichnet. Es entspricht Kurve IV deren Tabelle I auf Seite 157; Kurve V deren Tab. XXV auf Seite 182.



Anmerkung zur Curventafel: Die Maßeinheiten haben auf der Curventafel die folgende Bedeutung: Für Curve I auf der Abscisse: Milligr. Mol in 1 Gr. Mol. Wasser der Lösung; auf der Ordinate: Milligr. Mol. in 1 Gr. Mol SnO_2 dividiert durch 10.

Für Curve II auf der Abscisse: Procente Benzopurpurin in der Lösung; auf der Ordinate: Adsorbierte Procente Benzopurpurin; beide Größen sind mit 100 multipliciert.

Für Curve III die gleiche, wie für Curve II; die Werte sind mit 5 multipliciert.

Für Curve IV auf der Abscisse und Ordinate: „Agglutinierungs Einheiten", dividiert durch 1000.

Für Curve V auf der Abscisse und Ordinate: Agglutinierungs Einheiten, dividiert durch 100.

---

1) Die Einzelheiten der Versuche werden demnächst an anderer Stelle publizirt werden. Die Zahlen, nach denen die Kurven gezeichnet sind, sind die folgenden:

Sämtliche Kurven zeigen die gleiche Gestalt: sie sind konkav gegen die Abscisse. Dem entspricht, daß sie mit mehr oder weniger Glück durch eine Interpolationsformel $\frac{C_1^n}{C_2} = K$ dargestellt werden können, worin $n > 1$ ist, und C_1 die Concentration der adsorbirten, C_2 die der nicht adsorbirten Stoffmenge bedeutet. Will man diese Kurven nach dem Verteilungssatze interpretiren, so stößt man zunächst auf die prinzipielle Schwierigkeit, daß dessen Anwendbarkeit für colloïdale Lösungen noch niemals mit Sicherheit gezeigt worden ist, und es auch nicht wahrscheinlich ist, daß diese unter Zugrundelegung der Gasgesetze abgeleitete Gesetzmäßigkeit für die physikalisch durchaus eigenartigen Pseudolösungen ohne weiteres gilt. Wenn man dagegen die Verteilung der gelösten Stoffe als veranlaßt durch die Adsorptionsfähigkeit der aufnehmenden betrachtet, so kann man all' die Erfahrungen, die van Bemmelen in seinen Arbeiten über Adsorption gesammelt hat, auf die Verteilung der Agglutinine übertragen. Das Adsorptionsvermögen der agglutinirbaren Substanz ist zunächst beträchtlich und nimmt, je weiter es durch Aufnahme von Agglutinin beansprucht ist, dergestalt ab, daß die in höheren Conzentrationen aufgenommene relative Menge des gesamten Agglutinins sinkt, jedoch ohne sich einem Sättigungwerte anzunähern. Es wäre hiernach also nicht nötig, wie Arrhenius schließen wollte, verschiedene Molekulargrößen des Agglutinins in der Lösung und in den Bakterien zu vermuten.

Unter diesen Umständen kann es nicht auffallen, daß der Exponent n in der erwähnten Interpolationsformel mit der Beschaffenheit der adsorbirenden und der adsorbirten Substanz stark variirt. Van Bemmelen hat gezeigt, daß erhitzte Hydrogele in ihrem Adsorptionsvermögen beträchtlich geschwächt sind, da durch Erwärmung das Hydrogel in seiner charakteristischen gequollenen Beschaffenheit erhebliche Einbuße erleidet. Eisenberg und Volk fanden, daß unter gewissen Umständen erhitzte Bak-

---

Benzopurpurin auf $Al(OH)_3$
Jeweils angew. Menge Hydrogel = 0.0744 gr Al_2O_3; Farbstoff-Lösung je 500 ccm

°/₀ Farbst. auf Lösung Zurückgebl.	Adsorbiert
0.0021	0.0154
0.0094	0.0206
0.0158	0.0242
0.0329	0.027
0.071	0.029

Molybdänblau auf Seide
Je 1 gr Seide; 4.5 gr Ammoniummolybdat; 150 ccm Lösung.

°/₀ Farbst. auf Lösung Zurückgebl.	Adsorbiert
0.057	0.143
0.124	0.376
0.40	1.60
0.65	2.35
1.215	2.785

terien nur die Hälfte von der durch normale Bakterien aufgenommenen Agglutininmenge adsorbiren. Ueber die Vergrößerung der Beständigkeit colloïdaler Lösungen durch gewisse Zusätze sind einige Erfahrungen schon von Graham gesammelt. Gewisse ausgefällte Colloïde werden sogar durch bestimmte Zusätze wieder in Lösung geführt: „peptonisirt“; über die vergrößerte Beständigkeit von Colloïden durch Zusatz von „Schutzcolloïden“ finden wir bei Zsigmondy ausführliche Angaben. Daß demgemäß bestimmte Zusätze auch die Agglutinine gegen das Adsorbiertwerden schützen, erscheint verständlich, wenn auch gerade dieses Kapitel im Sinne meiner Anschauungen noch eingehende Bearbeitung erfordert. Wie merklich eine derartige Einwirkung ist, zeigt die Adsorptionskurve des durch Formol geschwächten Serums (Kurve V).

Für geschwächte Sera beobachteten Eisenberg und Volk höchst auffällige Erscheinungen, die bis jetzt ohne Analogie auf dem Gebiet der Colloïde dastanden. Es zeigte sich nämlich, daß bei steigender Concentrirung der Agglutininlösung die Sedimentirung der in konstanter Menge vorhandenen agglutinirbaren Substanz nicht etwa bis zu einer maximalen Sedimentirung zunahm, sondern, daß ganz unerwartet bei weitgehender Concentrationssteigerung überhaupt keine Sedimentation bewirkt werden konnte. Es existirt also bei der Einwirkung derartig stark wechselnder Agglutininconcentrationen ein Optimum der Sedimentirung. Wie bereits erwähnt, bemerkte ich, daß bei der gegenseitigen Fällung von Colloïden aus ihrer Lösung ebenfalls das Einhalten gewisser Mengenverhältnisse notwendig ist. Diese Erscheinung ist von mir für die Einwirkung von colloïdalem Gold, Arsensulfid und Antimonsulfid auf colloïdale Lösungen der Hydroxyde von Eisen, Aluminium, Chrom, Zirkon, Thorium, Cer., quantitativ untersucht worden.

Eisenberg und Volk geben die Einwirkung von je 1 ccm. Zoroasterserum[1]) III + 1 ccm $\frac{1}{4}n$ HCl folgende Tabelle (pg. 176):

1) Typhusserum vom Pferde „Zoroaster“.

Geschwächtes Serum gegen Bakterien.

Verdünnung d. Serums	Fällungserscheinung n. 2 Std.	nach 24 Stdn.
$^1/_{10}$	keine Agglutination	keine Agglut.
$^1/_{100}$	"	geringe Spuren.
$^1/_{1000}$	fast vollk. Agglut.	vollk. Agglut.
$^1/_{5000}$	"	fast vollk. Aggl.
$^1/_{10000}$	unvollk. Agglut.	unvollk. Aggl.
$^1/_{15000}$	"	" "
$^1/_{20000}$	starke Spuren	" (?)
$^1/_{25000}$	Spur Agglut.	" (?)
$^1/_{30000}$	starke Flocken	starke Spuren
$^1/_{35000}$	feinste "	" "
$^1/_{40000}$	feinste "	Spuren Aggl.
$^1/_{45000}$	keine Agglut.	Spuren Aggl.

Nichts scheint mir überraschender, als mit diesem Befunde die Resultate zu vergleichen, die ich von dem vorstehenden vollkommen unabhängig bei den ursprünglich zu ganz andern Zwecken ausgeführten Versuchen über die Ausfällung von Colloïden gewonnen habe.

Zirkonhydroxyd gegen Goldlösung.

Je 10 ccm Goldlösung = 1.4 mg Au wurden mit je 5.0 ccm Zirkonhydroxydlösung variabler Konzentration gemischt.

mg ZrO_2	nach Mischung	nach 1 Stde.
32.5	kein Ausfall	kein Ausfall
16.25	" "	kein Ausfall
6.5	" "	kein Ausfall
3.25	" "	kein Ausfall
1.95	Flockung	großflockige Fällung
1.62	völlige Fällung	völlige Fällung
0.65	feine Flocken	feine Flocken
0.325	äußerst feine Flocken	äußerst feine Flocken und geringe Sedimentirung
0.065	kein Ausfall	kein Ausfall

Thoriumhydroxyd gegen Antimonsulfidlösung.

Je 2.00 ccm Antimonsulfidlösung = 5.5 mg Sb_2S_3 wurden mit je 13.0 ccm Thoriumhydroxydlösung variabler Concentration gemischt.

mg ThO_2	nach Mischung	nach 4 Stunden
13 mg	keine Fällung	unverändert
8 „	„ „	unverändert
4 „	starke, großflock. Fällung	unverändert
2 „	keine Fällung	unverändert

Diese bemerkenswerten Resultate zeigen, daß es nicht unbedingt notwendig ist, zur Erklärung der gleichen Erscheinung bei der Agglutination verschiedene hemmende und fällende Agglutininteilchen anzunehmen. Nichts scheint mir ferner für die Verwandschaft beider Naturvorgänge mehr zu sprechen, als diese in beiden Fällen beobachteten Optima. Für die Erklärung des Optimums bei den anorganischen Colloïden, kann man im Anschlusse an Anschauungen von Bredig u. A. annehmen, daß die Colloïde in Lösung ihre verhältnismäßige Beständigkeit ihrer Potentialdifferenz gegen das Medium verdanken. Diese Beständigkeit wird vernichtet durch Hinzufügung einer elektrochemisch äquivalenten, entgegengesetzt geladenen Colloïdmenge. Durch einen Ueberschuß derselben wird indessen infolge einer Potentialdifferenz entgegengesetzter Natur wiederum ein beständiges Gebilde erzeugt. Inwieweit diese einfache Anschauung zutreffend ist, inwieweit sie insbesondere auf die Agglutinine übertragen werden darf, ist noch gänzlich unbekannt. Man könnte ferner versuchen, die Einwirkung von Toxin und Antitoxin mit der zweier, sich nicht ausfällender Colloïde zu vergleichen. Geeignete quantitative Messungen über Reaktionen zwischen solchen Colloïden liegen indessen zur Zeit nicht vor, so daß sich ein Eingehen auf diesen Punkt vorläufig erübrigt.

Zum Schlusse möchte ich nicht verfehlen auf eine interessante Umkehr der besprochenen Vorgänge hinzuweisen. Wenn spezifische Colloide (Agglutinine) befähigt sind, bestimmte Bakterien, zu sedimentiren, muß man umgekehrt zur Entfernung unerwünschter Colloïde aus Lösungen sich gewisser Bakterien bedienen können. Dieser letzte Vorgang findet ausgedehnte Anwendung bei der biologischen Abwasserreinigung. Durch eine von mir in Gemeinschaft mit Herrn Dr. O. Kröhnke vorgenommene Untersuchung wurde gezeigt, daß die fäulnisfähigen, schädlichen Abwassersubstanzen colloïdal gelöst sind, und daß sie demgemäß nach den

Regeln der Colloïdchemie entfernt werden müssen. Nach dem biologischen Verfahren trägt man bekanntlich in sehr einfacher Weise durch Schaffung passender Bedingungen für die Ansiedlung von Bakterien Sorge, wodurch die Abscheidung der Fäulnissubstanz erzielt wird.

Die Schlußfolgerungen, die sich aus dem hier dargelegten ergeben, sind sehr einfach und eröffnen ein weites Arbeitsgebiet. Man wird Mischungen von anorganischen, einfach zusammengesetzten Colloïden einerseits mit Agglutininen (Serum), andererseits mit agglutinierbaren Substanzen (Bakterien) bereiten müssen und zu entscheiden haben, ob sich bei der Einwirkung dieser Stoffe ähnliche Gesetzmäßigkeiteiten zeigen, wie sie Eisenberg und Volk fanden. Ferner wird man zu prüfen haben, ob sich nicht unter den zahlreichen verfügbaren anorganischen Colloïden solche von specifischer Wirksamkeit auf Bakterien ausfindig machen lassen, die ihrem Verhalten entsprechend als anorganische Antitoxine bezeichnet werden müssen.

Ueber die Verwendung des elektrolytischen Detektors in der Brückenkombination.

(Mit 1 Figur).

Von

W. Nernst und F. von Lerch.

Vorgelegt in der Sitzung am 19. März 1904.

Im Folgenden sind einige Messungen beschrieben, bei denen in einer von sehr schnellen Schwingungen gespeisten Brückenkombination als Nullinstrument ein leicht zu improvisierender einfacher Apparat diente, der zugleich die so überaus bequeme Verwendung des Telephons gestattete [1]).

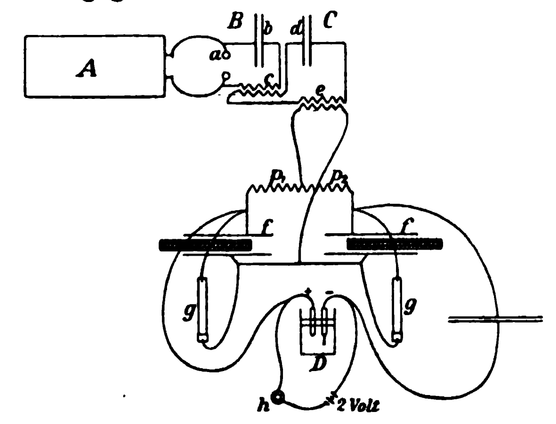
In ein Becherglas mit verdünnter H_2SO_4 oder K OH tauchen 2 Platinelektroden, die mit ca 2 Volt polarisiert werden. Die Anode ist möglichst klein und besteht aus einem in Glas eingeschmolzenen 0.02 mm dicken Platindraht, der ganz nahe am Glasrohr abgeschnitten ist. (Ist die Platinspitze Kathode, so ist die Wirkung schwächer). Wird nun über diese Zelle ein schneller Wechselstrom übergelagert, so beobachtet man einen Anstieg des Stromes im polarisierenden Kreis, den man leicht mit dem Telephon oder Galvanometer beobachten kann. Der Detektor stellt sich momentan wieder auf die Nulllage ein, so daß man für jeden überspringenden Funken ein Knacken und so direkt den Gang des Unterbrechers im Telephon hört.

1) In einer früheren Arbeit (Wied. Ann. 60 p. 600, 1897) konnte ich zeigen, daß man mit sehr schnellen Schwingungen relativ genaue Messungen ausführen kann, wenn man in der Brückenkombination eine mikrometisch verstellbare Funkenstrecke oder eine kleine Vakuumröhre verwendet. Frühere Versuche, einen gewöhnlichen Kohärer dafür zu verwenden, verliefen resultatlos, weil die Empfindlichkeit dieses Apparats für Meßzwecke zu veränderlich ist; schließlich glaube ich in dem elektrolytischen Kohärer einen Nullindikator für schnelle Schwingungen gefunden zu haben, der allen Anforderungen genügt. W. Nernst.

Als die weiter unten beschriebenen Versuche schon im Gange waren, erschien eine Arbeit von Herrn Schloemilch[1]), in der er einen Wellenindikator beschreibt, der auf genau gleichem Prinzip beruht und sich schon in der Praxis bewährt haben soll. Da die Versuche des Herrn Schloemilch schon einige Zeit zurückdatieren, so gebührt ihm unstreitig die Priorität. Der neue Detektor wird überall da mit bestem Erfolg angewendet werden, wo es sich um den Nachweis schwacher schneller Schwingungen handelt. Er besitzt nämlich den großen nicht zu unterschätzenden Vorteil, daß er mit abnehmender Stärke der darüber gelagerten Schwingungen ganz allmählich schwächer anspricht, also keine Reizschwelle besitzt, wie z. B. der gewöhnliche Kohärer, der entweder voll anspricht oder versagt. Zum Aufsuchen eines Minimums ist diese Eigenschaft besonders günstig.

Seine Wirkungsweise beruht wahrscheinlich auf einem Durchschlagen von dünnen Uebergangsschichten, die sich bei Polarisation bilden. Anläßlich von Messungen von Zersetzungsspannungen hat Bose[2]) ein Umbiegen der Kurven vor dem eigentlichen Zersetzungspunkt beobachtet, in einer Oxalsäurelösung bei anodischer Polarisation sogar ein rapides Sinken der Stromstärke nach Passieren des Zersetzungspunktes. Garrard[3]) hat dann direkt in einigen Fällen ein Wachsen des Widerstandes auf den 100 bis 200 fachen Wert nachweisen können.

Nach dem Durchschlagen stellt sich der feine Ueberzug elektrolytisch momentan wieder her. Die Handlichkeit und das leichte Improvisieren des kleinen Apparates wird es ermöglichen, daß man mit schnellen Schwingungen ebenso bequem wird arbeiten können, wie mit den gewöhnlichen Induktionsströmen. In Fig. I ist die Versuchanordnung gezeichnet.



1) W. Schloemilch, Elektrotechnische Zeitschrift 1903 Heft 47.
2) Bose, Z. f. Elch. V. 153. 1898.
3) Garrard, Z. f. Elch. VI. 214. 1899.

A ein Induktorium, das zuerst mit einem Deprez Unterbrecher, später mit einem Simon'schen elektrolytischen Lochunterbrecher betrieben wurde.

B System aus Selbstinduktion und Capacität, das sich durch die Funkenstrecke *a* entläd. Capacität *b* besteht aus 2 Leydnerflaschen (ca 0.005 MF), die Selbstinduktion *c* aus 6 Windungen auf einem Becherglas, zwischen die wieder 6 Windungen gewickelt sind, durch die das System *C* erregt wird.

Capacität *d* (Leydnerflaschen) ca. 0.0038 MF. *e* Selbstinduktion wie bei *c*, speist die eigentliche Brücke.

$p_1 = p_2$ ca. 15200 cm, 16 Windungen auf einem Glas von 7·5 cm Durchmesser.

ff Meßkondensator mit dicken Glasplatten (Turner[1]).

gg Compensationsgefäße.

D elektrolytischer Detektor.

h Telephon oder Galvanometer.

k Condensator ca. 4 MF.

Es hatte sich gezeigt, daß es von Vorteil für das Minimum war, die Schwingungen durch das zwischengeschaltete System zu filtrieren. Störende Nebengeräusche blieben dann aus.

B u. *C* standen nahe in Resonanz n_B ca. $1{\cdot}7.10^6$
n_c ca. $1{\cdot}4.10^6$.

Relativ große Capacität und kleine Selbstinduktion für die schwingenden Kreise wurden genommen, weil dann das Minimum schärfer war. Weitere Details sind aus der Zeichnung ersichtlich, im Uebrigen sei auf die eingangs Arbeit verwiesen.

Die Güte des Minimums bei dieser Anordnung steht dem gewöhnlichen Telephonminimum kaum nach.

Das Arbeiten mit dem Apparat geschieht in genau der gleichen Weise, wie früher beschrieben; die Dielektricitätskonstanten sind nach der Formel

$$D_x = (D_0 - 1)\frac{c_x - c}{c_0 - c} - 1$$

berechnet.

Benzol als Aichflüssigkeit mit 2.288 genommen ergab folgende Werte, die mehr als vorläufige zu betrachten sind und nur die Brauchbarkeit der Methode zeigen sollen.

---

1) Zeitschr. f. ph. Ch. 35, 385. 1900.

Für gewöhnliches destilliertes Wasser mußte Widerstandskompensation genommen werden; die Einstellung war dann ebenso scharf wie für die andern Substanzen ($t = 18$).

	Verfasser	Drude [1]	Turner [2]
Chloroform	5·1	4·95	5·2
Aethyläther	4·37	4·36	4·37
Aethylalkohol	25·9	—	26·8
Wasser	81·7	81·7	81·1

Um die Brauchbarkeit des Apparats für Widerstandsmessungen zu prüfen, wurde auf folgende Weise verfahren. An Stelle der Compensationsgefäße trat eine mit Magnanini'scher Lösung gefüllte cylindrische Röhre von ca 1·5 cm Lumen, die mit einer mittels Mikrometerschraube verstellbaren Elektrode versehen war, und ein Widerstandsgefäß mit kreisrunden blanken *Pt*-elektroden von 0·8 cm Durchmesser, ungefähr 2 cm entfernt, in das der zu untersuchende Elektrolyt gebracht wurde. Blankes *Pt* konnte genommen werden, weil für die hohen Wechselzahlen die Polarisationskapacität genügend groß ist [3]). Für Widerstandsmessungen von Substanzen, die durch platiniertes Platin katalytisch zersetzt werden, wird diese Methode mit Erfolg angewandt werden können, da sich jedes Metall als Elektrodenmaterial wird benutzen lassen. War das Widerstandsgefäß mit Magnanini-Lösung eingestellt, bis das Telephon schwieg, so wurde sein Widerstand W_1 nach Kohlrausch gemessen. W_2 bedeutet den Widerstand der betreffenden Lösung, gemessen in einem gewöhnlichen Widerstandsgefäß nach Kohlrausch's Methode; C die ungefähre Concentration in gr-Aequivalenten.

Lösung	C	W_1	W_2	$\frac{W_1}{W_2}$
KOH	0·0719	87·40	3·819	22·89
KCl	0·0992	122·0	5·315	22·95
H_2SO_4	0·00846	495·0	21·83	22·68
				22·84.

Die proc. Fehler gegen den Mittelwert betragen:

0·22 % 0·47 % 0·7 %

1) Zeitschr. f. ph. Ch. 23, 267. 1897.
2) Zeitschr. f. ph. Ch. 35, 385. 1900.
3) W. Nernst, l. c. p. 613.

Lösung	C	W_1	W_2	$\frac{W_1}{W_2}$
KCl	0·0464	256·9	11·00	23·35
H_2SO_4	0·0146	313·1	13·47	23·25
KOH	0·0116	518·7	22·33	23·23
				23·28.

Die Fehler gegen den Mittelwert betragen:
0·3 %   0·13 %   0·21 %.

Die Einstellungsgenauigkeit wurde auch noch auf folgende Weise geprüft. 2 Gefäße mit Magnanini-Lösung wurden aufeinander eingestellt bis das Telephon schwieg, dann konnten sie durch Umlegen eines Schlüssels nach Kohlrausch mit einander verglichen werden. Hätte man immer auf das absolut gleiche Verhältnis eingestellt, so hätte sich immer die gleiche Stellung der Walzenbrücke ergeben. Da wegen der ungefähren Gleichheit von p_1 u. p_2 die Einstellung in der Nähe von 500 der Walze lag, entspricht einer Abweichung um 2·5 Teilstriche ein Prozent.

Widerstand ca 120 Ω	Stellung der Walzenbrücke
1. Einstellung mit schnellen Schwingungen	496·0
2. „ „ „ „	496·5
3. „ „ „ „	496·5
4. „ „ „ „	497·0
5. „ „ „ „	497·5
6. „ „ „ „	496·5
7. „ „ „ „	496·7
8. „ „ „ „	497·0
9. „ „ „ „	496·0
10. „ „ „ „	496·3

mittl. Fehler der einzelnen Messung
0·35 ca 0·14 %

Widerstand ca 520 Ω

1. Einstellung mit schnellen Schwingungen	498·5
2. „ „ „ „	497·0
3. „ „ „ „	498·3
4. „ „ „ „	497·1
5. „ „ „ „	497·6

mittl. Fehler der einzelnen Messung
0·66 ca 0·27 %

Widerstände von ca 40 bis 1100 Ω lassen sich also bis auf einige per Mille bestimmen.

Die Widerstände erwärmen sich etwas während der Messung, daher ist schnelles Arbeiten und eine genaue Temperaturablesung nötig, da sonst leicht bei nicht besonders sorgfältigem Arbeiten Fehler von ca 2 % auftreten können.

Die Einführung eines elektrolytischen Detektors in die Brücke hat also die Wiederverwendung des Telephons (das ev. durch ein Galvanometer ersetzt werden kann) als Nullinstrument gestattet. Für viele Messungen mit schnellen Schwingungen scheint der kleine äußerst zuverlässige Apparat (er hatte während obiger Untersuchungen kein einziges Mal versagt) eine große Bequemlichkeit zu besitzen.

Göttingen, phys. chem. Institut. März 1904.

18,
18,
18,
18,

30

0,

14

0,

84

0,

Tat

65	70	
	0,91	
	434,11	
Y_4	Y_5	
419,1	434,17	
418,911	433,918	

15,007 14,567
15,174 14,843

15,17392 14,842869

15,18463 14,84346

18,75563	433,94026	44
18,748473	433,952456	44
18,7512915	433,9524568	44
18,75127926	433,95245990	44

3020 15,20118064 14,851331

0,41954956 | 0,34984909 |

1440 0,06970047 0,048144

0,03241393 | 0,02155568 |

845 0,01085825 0,0061751

0,01311020 | 0,00468306 |

Δ^7 0,00842714 0,002271

Δ^8 | 0,00615541 |

Δ^9 0,005136

Δ.. |

Die Konstruktion des Klassenkörpers für beliebige algebraische Zahlkörper.

Von

Ph. Furtwängler.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 14. Mai 1904.

Einleitung.

Die folgenden Zeilen haben den Zweck, für einen beliebigen gegebenen algebraischen Zahlkörper k den zugehörigen Klassenkörper zu konstruieren, d. h. es soll der Nachweis geführt werden, daß in bezug auf k, dessen Klassenzahl gleich h gesetzt wird, ein unverzweigter relativ Abel'scher Körper vom Relativgrad h existiert, dessen Relativgruppe zu der Gruppe der Idealklassen in k holoedrisch isomorph ist. Der Gang des Beweises ist kurz der folgende.

In zwei Mitteilungen, die in dem vorigen Jahrgange dieser Nachrichten veröffentlicht sind, habe ich zunächst gezeigt, daß in bezug auf k stets e unabhängige unverzweigte Körper vom Relativgrad l existieren, wenn die Untergruppe der Klassengruppe von k vom Grade $l^{h'}$ e Basisklassen besitzt. Die Zahl l bedeutet dabei eine ungerade Primzahl und die Klassenzahl von k ist gleich $ql^{h'}$ angenommen, wo q zu l prim ist. Bei diesem Nachweise war vorausgesetzt, daß der Körper k eine $l$te Einheitswurzel ζ enthält. Es war daher zunächst zu zeigen, daß der Satz auch gültig ist, wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt ist. Dies geschieht im ersten Paragraphen dieser Mitteilung durch Betrachtung des Körpers $k' = (k, \zeta)$. Mit Hülfe des gewonnenen Resultates ist es dann nicht schwer nachzuweisen, daß in bezug auf einen beliebigen Körper k, dessen Klassenzahl wieder gleich ql^{h} mit der-

selben Bedeutung wie oben sei, ein unverzweigter relativAbel'scher Körper vom Relativgrad l^{ν} existiert, dessen Relativgruppe mit der Untergruppe der Klassengruppe von k vom Grade l^{ν} holoedrisch isomorph ist. Der genannte Nachweis wird im zweiten Paragraphen geführt.

Die im Vorstehenden geschilderten Entwickelungen bezogen sich auf den Fall, daß l eine ungerade Primzahl ist. Ist $l = 2$, so ist die Richtigkeit der angegebenen Sätze in dem Falle, daß der Grundkörper k mit allen seinen conjugierten imaginär ist, in genau derselben Weise wie für ungerades l nachzuweisen. Besondere Betrachtungen, die im dritten Paragraphen gegeben werden, sind dagegen erforderlich, wenn der Körper k oder eine Anzahl der mit ihm conjugierten reell sind. Man muß in diesem Falle den von D. Hilbert eingeführten schärferen Aequivalenzbegriff heranziehen, nach dem zwei Ideale nur dann äquivalent heißen, wenn ihr Quotient eine total positive Zahl ist. Ist die Klassenzahl in diesem engeren Sinne $q2^{h'}$, wo q eine ungerade Zahl bedeutet, und enthält die Untergruppe der Klassengruppe vom Grade $2^{\lambda'}$ wieder e Basisklassen, so zeigt sich, daß genau e unabhängige unverzweigte relativquadratische Körper in bezug auf den Grundkörper k existieren. Mit Hülfe dieser Thatsache lässt sich dann in derselben Weise wie für ungerades l der unverzweigte Relativkörper vom Relativgrad 2^{ν} in bezug auf k konstruieren. Vereinigt man jetzt alle unverzweigten Relativkörper, die zu den in der Klassenzahl h aufgehenden Primzahlpotenzen gehören, so entsteht der vollständige Klassenkörper.

Von besonderem Interesse sind die imaginären quadratischen Grundkörper und die zugehörigen Klassenkörper, weil sie in engster Beziehung zur Theorie der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen stehen. Es wird nämlich im letzten Paragraphen gezeigt, daß die durch die singulären Werte des Moduls $\mathfrak{j}$ [1]) definierten Körper, die zu den imaginären quadratischen Grundkörpern gehören, identisch sind mit den zu den genannten Grundkörpern arithmetisch konstruierten Klassenkörpern. Der springende Punkt des Beweises ist die gleichartige Zerlegung, welche die Primideale des Grundkörpers in den funktionentheoretisch und arithmetisch definierten Oberkörpern erfahren.

Ich habe endlich noch eine Berichtigung zu dem letzten Paragraphen meiner vorigen Mitteilung zu geben. Der dort für den

---

1) Vergl. H. Weber, Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen. Braunschweig 1891, p. 380.

Satz 9 versuchte Beweis ist infolge eines leicht erkennbaren Versehens nicht vollständig. Es läßt sich mit den dort benutzten Hülfsmitteln nur nachweisen, daß in bezug auf den betrachteten Grundkörper k keine anderen unverzweigten relativ Abel'schen Oberkörper existieren können als diejenigen, die in dem konstruierten Klassenkörper enthalten sind; zum vollständigen Beweise des Satzes wäre aber zu zeigen, daß überhaupt keine anderen unverzweigten Oberkörper, deren Relativgrad eine Potenz von l ist, in bezug auf k existieren können. Da indessen der letzte Paragraph jener Mitteilung nur anhangsweise beigegeben war und mit dem wesentlichen Inhalt derselben, nämlich dem Nachweis der Existenz der unverzweigten Körper vom Relativgrad l, keine weiteren Beziehungen hat, werde ich auf diesen Punkt erst später zurückkommen.

§ 1.

Es soll zunächst der folgende Satz bewiesen werden, der die Verallgemeinerung des Satzes 1 der vorigen Mitteilung bildet:

Satz 1. Es sei k ein beliebiger algebraischer Zahlkörper mit der Klassenzahl $ql^{h'}$, wo l eine ungerade Primzahl bedeutet und q zu l prim ist. Ist dann das System der $q$ten Potenzen der Idealklassen aus k in der Gestalt darstellbar:

$$(1)\quad (c)_h = c_1^{x_1} \dots c_e^{x_e} \; (x_i = 0, 1, \dots l^{h_i}-1),\; h_1 + \dots h_e = h',$$

so existieren in bezug auf k genau e unabhängige unverzweigte relativcyclische Körper vom Relativgrad l.

Beweis. Ich bemerke vorweg, daß im Folgenden immer nur die Untergruppe der Klassengruppe vom Grade $l^{h'}$ benutzt wird und daß deshalb das System aller $l^{h'}$ten Potenzen von Idealklassen mit 1 bezeichnet werden soll, so daß also die Aequivalenz $\mathfrak{a} \sim 1$ in k die Bedeutung hat, daß das Ideal $\mathfrak{a}$ der $l^{h'}$ten Potenz eines Ideals äquivalent ist. Ist l^{h_i} der kleinste Exponent, für den die Aequivalenz

$$\mathfrak{b}^{l^{h_i}} \sim 1$$

gilt, so soll l^{h_i} der zum Ideal $\mathfrak{b}$ oder zu der betreffenden Idealklasse gehörige Exponent heißen. Ferner sei noch auf die folgende Bezeichnungsweise hingewiesen, die im Folgenden benutzt wird. Ist K ein beliebiger Oberkörper von k und fallen die Re-

lativnormen der Ideale aus einer Klasse C in K in die Klasse c in k, so werde ich kurz c die Relativnorm von C nennen und schreiben:

$$C = N_k^K(c).$$

Wenn die Deutlichkeit nicht darunter leidet, kann bei N der obere oder der untere Index fortbleiben.

Ich adjungiere jetzt zu dem Körper k die $l$te Einheitswurzel ζ und bezeichne den Körper (k, ζ) mit k', dessen Relativgrad l' in bezug auf k als Faktor von $l-1$ zu l prim ist. Aus dieser Thatsache folgt leicht, daß jede Idealklasse aus k' in der Form $c\,C$ darstellbar ist, wo c eine Klasse aus k bedeutet und C eine solche Klasse aus k', die der Bedingung:

$$N_k^{k'}(C) = 1 \tag{2}$$

genügt. Das gesamte Klassensystem von k' ist also in der Gestalt:

$$(c)_k\, C \tag{3}$$

darstellbar, wo C eine beliebige Klasse mit der Eigenschaft (2) bedeutet.

Die Klassen $c_1 \ldots c_e$ definieren in k e unabhängige Klassenverbände. Daß sie dieselbe Eigenschaft in k' haben, folgt aus dem Umstande, daß keine Aequivalenz:

$$c_1^{a_1} \ldots c_e^{a_e} \sim C_i B^l \tag{4}$$

in k' bestehen kann, wo C_i eine beliebige Klasse aus dem System C und B eine beliebige Klasse aus k' bedeutet, außer wenn sämtliche a_i durch l teilbar sind. Die Unmöglichkeit von (4) erkennt man, wenn man auf beiden Seiten die Relativnorm in bezug auf k bildet. Es folgt daher aus dem Satz 1 meiner vorigen Mitteilung, daß e unabhängige primäre Zahlen $\omega_1, \ldots \omega_e$ in k' existieren, welche unverzweigte relativcyclische Körper vom Relativgrad l in bezug auf k' definieren und respektive zu den durch die Kongruenzen:

$$x_i \equiv 0\ (l)$$

definierten Untergruppen der Klassengruppe von k' gehören. Ich betrachte jetzt den Körper $(k', \sqrt[l]{\omega_1})$ und will zunächst zeigen, daß er in bezug auf k relativ Abel'sch ist. Bezeichnet man die erzeugende Substitution der Relativgruppe von k' in bezug auf k mit

(4a) $$s = \zeta \mid \zeta^r,$$

so gilt:

(5) $$s^l = 1, \quad r^{l'} \equiv 1\ (l).$$

Da nun die Untergruppe der Klassengruppe von k', zu der ω_1 gehört, gegenüber s invariant ist, so muß dasselbe von dem Körper $(k', \sqrt[l]{\omega_1})$ gelten, d. h. es muß eine Beziehung:

(6) $$s\omega_1 = \omega_1^a \beta^l$$

bestehen, wo a eine rationale ganze Zahl und β eine Zahl aus k' bedeutet. Um zu zeigen, daß $(k', \sqrt[l]{\omega_1})$ inbezug auf k relativ Abel'sch ist, hat man nachzuweisen, daß die Kongruenz:

(7) $$a \equiv r\,(l)$$

gilt. Wir setzen zu diesem Zweck:

(8) $$l' = p_1^{q_1} r_1 = p_2^{q_2} r_2 = \cdots,$$

wo $p_1^{q_1}, p_2^{q_2}, \ldots$ die verschiedenen in l' aufgehenden Primzahlpotenzen bedeuten, und beweisen, daß es in einer Klasse in k', die der Bedingung $x_1 \not\equiv 0\,(l)$ genügt, ein Primideal $\mathfrak{P}_1$ mit der Eigenschaft: $s'\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_1$ giebt, wo $s' = s^{r_1}$ ist. Es sei nämlich k_1 derjenige Oberkörper von k, der zur Gruppe $s^{p_1^{q_1} x}$ $(x = 0, 1, \ldots r_1 - 1)$ gehört. Derselbe ist relativcyclisch in bezug auf k vom Relativgrad $p_1^{q_1}$ und enthält einen Unterkörper Uk_1 vom Relativgrad p_1 in bezug auf k. Ich behaupte, daß es in einer Klasse von k, die der genannten Bedingung genügt, ein Primideal giebt, das in Uk_1 Primideal bleibt. Bezeichnet nämlich $\mathfrak{P}_i$ ein beliebiges Primideal aus Uk_1, so gilt:

(9) $$\sum \frac{1}{n(\mathfrak{P}_i)^s} = \log \frac{1}{s-1} + f_1(s) \qquad (s > 1)$$

und daher

(10) $$\sum \frac{1}{n(\mathfrak{p}_i)^s} = \frac{1}{p_1} \cdot \log \frac{1}{s-1} + f_2(s) \qquad (s > 1)$$

wenn

$$\mathfrak{p}_i = N_k^{Uk_1}(\mathfrak{P}_i)$$

gesetzt wird.

Bezeichne ich nun alle Primideale, die in einer der ge-

genannten Klassen liegen, mit $\mathfrak{q}_\iota$, so folgt aus Satz 2 meiner zweiten Mitteilung:

$$\Sigma \frac{1}{n(\mathfrak{q}_\iota)^s} \geqq \frac{l-1}{l} \log \frac{1}{s-1} + f_3(s) \qquad (s > 1). \tag{11}$$

Die Funktionen $f(s)$ in den Gleichungen (9), (10), (11) bleiben endlich, wenn sich s der Grenze 1 nähert. Da $\frac{l-1}{l} > \frac{1}{p_1}$ ist, so ergiebt sich somit, daß es in k unendlichviele Primideale in einer Klasse, die der Bedingung $x_1 \not\equiv 0(l)$ genügt, giebt, die in Uk_1 Primideale bleiben. Daraus folgt sofort, daß es auch Primideale in k' mit der Eigenschaft $s'\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_1$ giebt, die in einer der genannten Klassen liegen. Ist $\mathfrak{P}_1$ ein derartiges Primideal, so gilt:

$$\left(\frac{\omega_1}{\mathfrak{P}_1}\right) = \zeta^* \neq 1 \tag{12}$$

und folglich, wenn wir die Substitution s' auf die letzte Gleichung anwenden:

$$\left(\frac{\omega_1^{a^{r_1}}}{\mathfrak{P}_1}\right) = \zeta^{*r^{r_1}}. \tag{13}$$

Es gilt also

$$a^{r_1} \equiv r^{r_1} (l). \tag{14}$$

In analoger Weise leitet man die Kongruenzen:

$$a^{r_2} \equiv r^{r_2} (l) \tag{15}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

ab. Da die Zahlen $r_1, r_2, \ldots$ nicht sämtlich einen gemeinsamen Teiler haben, so läßt sich die Gleichung:

$$y_1 r_1 + y_2 r_2 + \cdots = 1$$

durch ganze rationale y erfüllen und es folgt dann aus (14) und (15)

$$a \equiv r (l),$$

womit bewiesen ist, daß der Körper $(k', \sqrt[l]{\omega_1})$ in bezug auf k relativ Abel'sch ist; sein Relativgrad ist $l' l$. Die Relativgruppe von $(k', \sqrt[l]{\omega_1})$ in bezug auf k besitzt deshalb eine ausgezeichnete Untergruppe vom Grade l', zu der der Körper K_1 gehören möge.

K_1 ist dann relativcyclisch vom Relativgrad l in bezug auf k und unverzweigt, wie sich leicht zeigen läßt. Ginge nämlich das Primideal $\mathfrak{p}$ aus k in der Relativdiscriminante von K_1 in bezug auf k auf, so müßte $\mathfrak{p}$ in K_1 in l gleiche Primfaktoren zerfallen. Wenn man dann $\mathfrak{p}$ in $(k', \sqrt[l]{\omega_1})$ zerlegt, so müßten sich die Primfaktoren in Systeme von je l gleichen anordnen lassen. Daraus würde folgen, daß es ein Primideal $\mathfrak{P}$ in k' geben müßte, das in $(k', \sqrt[l]{\omega_1})$ in l gleiche Primfaktoren zerfällt, was unmöglich ist. Es ist also K_1 in bezug auf k unverzweigt.

Verfährt man jetzt in derselben Weise mit $(k', \sqrt[l]{\omega_2})$, $(k', \sqrt[l]{\omega_3})$, ..., wie wir es eben mit $(k', \sqrt[l]{\omega_1})$ gethan haben, so erhält man die Körper K_2, K_3, ... Das System der Körper

$$K_1, K_2, \dots K_e$$

liefert dann e unverzweigte unabhängige relativcyclische Körper vom Relativgrad l in bezug auf k, womit unser Satz bewiesen ist.

§ 2.

Satz 2. Es sei k ein beliebiger Zahlkörper mit der Klassenzahl $ql^{h'}$, wo l eine ungerade Primzahl bedeutet und q zu l prim ist. Es existiert dann in bezug auf k ein unverzweigter relativ Abel'scher Körper vom Relativgrad $l^{h'}$, dessen Relativgruppe zu derjenigen Untergruppe der Klassengruppe von k, die alle $q$ten Potenzen von Idealklassen enthält, holoedrisch isomorph ist.

Beweis: Es sei wieder das System der $q$ten Potenzen der Idealklassen von k in der Gestalt darstellbar:

$$(16) \qquad (c)_k = c_1^{x_1} \dots c_e^{x_e} \; (x_i = 0, 1, \dots l^{h_i} - 1), \; h_1 + \dots h_e = h',$$

und es möge $K_1^{(1)}$ derjenige unverzweigte Körper vom Relativgrad l in bezug auf k sein, der zu der durch die Kongruenz $x_1 \equiv 0(l)$ definierten Untergruppe der Klassengruppe von k gehört. Ist jetzt $h_1 > 1$, also $c_1^l \not\sim 1$ in k, so ist in $K_1^{(1)}$ die Aequivalenz $c_1 \sim C^l$ unmöglich, wo C eine beliebige Klasse aus $K_1^{(1)}$ bedeutet. Denn aus der Annahme, daß $K_1^{(1)}$ zu der genannten Untergruppe gehört, folgt, daß

$$N_k(C) \sim c^l c_2^{a_2} \dots c_e^{a_e} \text{ in } k,$$

wo c eine Klasse aus k und $a_2, \ldots a_e$ ganze rationale Zahlen bedeuten. Es müßte also auch gelten:

$$c_1^l \sim N_k(C^l) \sim c^{l} c_2^{a_2 l} \ldots c_e^{a_e l} \text{ in } k$$

und hieraus würde folgen:

$$c_1^{b_1 l} c_2^{b_2 l} \ldots c_e^{b_e l} \sim 1 \text{ in } k,$$

wo $b_1, \ldots b_e$ wieder ganze rationale Zahlen bedeuten, von denen die erste nicht durch l teilbar ist. Da die letzte Aequivalenz unmöglich ist, wenn $c_1^l \nsim 1$ in k ist, so ist also auch die Aequivalenz $c_1 \sim C^l$ in $K_1^{(1)}$ unmöglich und es definiert daher c_1 auch in $K_1^{(1)}$ einen vom Hauptverbande verschiedenen Klassenverband. Es existiert also in bezug auf $K_1^{(1)}$ ein unverzweigter relativcyclischer Körper $K_1^{(2)}$ vom Relativgrad l, der zu der durch die Bedingung „Exponent von c_1 durch l teilbar" definierten Untergruppe der Klassengruppe von $K_1^{(1)}$ gehört. Bezeichnet man jetzt die erzeugende Substitution der Relativgruppe von $K_1^{(1)}$ in bezug auf k mit S_1, so folgt aus dem Umstande, daß die genannte Bedingung gegenüber S_1 invariant ist, daß $K_1^{(2)}$ ein relativ Galois'scher Körper vom Relativgrad l^2 in bezug auf k ist. Ist h_1 auch größer als 2, so kann man das Verfahren noch fortsetzen und es gelingt auf dem angegebenen Wege, einen relativ Galois'schen unverzweigten Körper $K_1^{(h_1)}$ vom Relativgrad l^{h_1} in bezug auf k zu konstruieren. In analoger Weise konstruiert man die unverzweigten relativ Galois'schen Körper $K_2^{(h_2)}, \ldots K_e^{(h_e)}$ in bezug auf k, die respektive die Relativgrade $l^{h_2}, \ldots l^{h_e}$ besitzen, indem man mit den Klassen $c_2, \ldots c_e$ ebenso operiert wie oben mit c_1. Durch Zusammensetzung der e Körper $K_1^{(h_1)}, \ldots K_e^{(h_e)}$ entsteht ein unverzweigter relativ Galois'scher Körper K vom Relativgrad l^{h} in bezug auf k. Es ist noch nachzuweisen, daß die Relativgruppe von K in bezug auf k mit der Klassengruppe $(c)_k$ in k isomorph ist. Wir adjungieren zu diesem Zweck zu k und K eine $l$te Einheitswurzel ζ und setzen

$$(k, \zeta) = k', \; (K, \zeta) = \bar{K} \quad \text{und} \quad (K_i^{(j)}, \zeta) = \bar{K}_i^{(j)}.$$

Das Klassensystem von k' ist dann in der Gestalt darstellbar:

$$(c)_k C, \tag{17}$$

wo C eine Klasse aus k' bedeutet mit der Eigenschaft:

$$N_k^{k'}(C) = 1.$$

Wir haben jetzt nur nachzuweisen, daß die Relativgruppe von $\bar{K}$ in bezug auf k', die auch vom Grade l^{κ} ist, mit der Klassengruppe $(c)_{\kappa}$ isomorph ist. Zunächst ist der Körper $\bar{K}_1^{(1)}$ relativcyclisch vom Relativgrad l in bezug auf k'; er möge durch Adjunktion von $\sqrt[l]{\omega_1^{(1)}}$ zu k' entstehen. Der Körper $\bar{K}_1^{(2)}$ ist wieder relativcyclisch vom Relativgrad l in bezug auf $\bar{K}_1^{(1)}$; er möge durch Adjunktion von $\sqrt[l]{\omega_1^{(2)}}$ zu $\bar{K}_1^{(1)}$ entstehen. Er ist, weil $K_1^{(2)}$ relativ Galois'sch in bezug auf k ist, ebenfalls relativ Galois'sch in bezug auf k' und es gilt deshalb eine Gleichung [1]):

$$S_1\omega_1^{(2)} = A''\omega_1^{(2)},$$

wo S_1 die erzeugende Substitution der Relativgruppe von $\bar{K}_1^{(1)}$ in bezug auf k' und A' eine Zahl aus $\bar{K}_1^{(1)}$ bedeutet. Um zu zeigen, daß er relativ Abel'sch ist, beachte man, daß die Zahlen von $\bar{K}_1^{(2)}$ in der Gestalt:

$$(18) \qquad B = A_0 + A_1\sqrt[l]{\omega_1^{(2)}} + \cdots A_{l-1}\sqrt[l]{(\omega_1^{(2)})^{l-1}}$$

darstellbar sind, wo $A_0, \ldots A_{l-1}$ Zahlen aus $\bar{K}_1^{(1)}$ bedeuten. Setzt man jetzt:

$$(19) \qquad B' = S_1A_0 + S_1A_1\cdot A'\cdot\sqrt[l]{\omega_1^{(2)}} + \cdots S_1A_{l-1}\cdot(A')^{l-1}\cdot(\sqrt[l]{\omega_1^{(2)}})^{l-1}$$

$$(20) \qquad B'' = A_0 + A_1\zeta\sqrt[l]{\omega_1^{(2)}} + \cdots A_{l-1}\zeta^{l-1}(\sqrt[l]{\omega_1^{(2)}})^{l-1},$$

so erkennt man, daß die Uebergänge von B zu B' und B'' vertauschbar sind. Deshalb ist $\bar{K}_1^{(2)}$ relativ Abel'sch in bezug auf k'; daß er auch relativcyclisch ist, folgt aus dem Umstande, daß er nur einen Unterkörper vom Relativgrad l in bezug auf k' enthält. Denn würden zwei solche Körper existieren, so ließe sich $\bar{K}_1^{(2)}$ auch erzeugen durch Adjunktion von $\sqrt[l]{\omega'}$ zu $\bar{K}_1^{(1)}$, wo ω' eine Zahl aus k' bedeutet. Bezeichnet man dann mit $\mathfrak{p}_1$ ein Primideal aus k', das in einer Klasse liegt, für die x_1, der Exponent von c_1 in der Klassengruppe, nicht durch l teilbar ist, so müßte

$$\left(\frac{\omega'}{\mathfrak{p}_1}\right)_{\bar{K}_1^{(1)}} \neq 1$$

sein, wo das Restsymbol im Körper $\bar{K}_1^{(1)}$ zu nehmen ist. Das ist

1) Daß der Exponent von $\omega_1^{(2)}$ auf der rechten Seite gleich 1 sein muß, folgt, wenn man auf die Gleichung $\left(\frac{\omega_1^{(2)}}{\mathfrak{p}_1}\right)_{\bar{K}_1^{(1)}} = \zeta^{*} \neq 1$ die Substitution S_1 anwendet. $\mathfrak{p}_1$ hat dieselbe Bedeutung wie später im Text.

aber unmöglich, weil ω' und $\mathfrak{p}_1$ in k' liegen; es ist deshalb $\bar{K}_1^{(2)}$ relativcyclisch vom Relativgrad l^2 in bezug auf k'.

Ist $h_1 > 2$, so ist weiter nachzuweisen, daß $\bar{K}_1^{(3)}$ relativcyclisch vom Relativgrad l^3 in bezug auf k' ist. Es zeigt sich zunächst wieder wie oben, daß $\bar{K}_1^{(3)}$ relativ Galois'sch und relativ Abel'sch in bezug auf k' ist. Daß er auch relativcyclisch ist, folgt wieder aus dem Umstande, daß nur ein Relativkörper l ten Grades und nur einer l^2 ten Grades in bezug auf k' in $\bar{K}_1^{(3)}$ enthalten ist. Wäre nämlich die Relativgruppe von $\bar{K}_1^{(3)}$ in bezug auf k' nicht relativcyclisch, so zeigt man leicht, daß sie mindestens 2 Untergruppen vom Grade l^2 enthalten müßte, zu denen zwei verschiedene Körper vom Relativgrad l in bezug auf k' gehören würden. Da es zwei solche in $\bar{K}_1^{(3)}$ enthaltene Körper nicht giebt, muß $\bar{K}_1^{(3)}$ relativcyclisch vom Relativgrad l^3 in bezug auf k' sein. Durch Fortsetzung des Verfahrens zeigt man, daß $\bar{K}_1^{(h_1)}$ relativcyclisch vom Relativgrad l^{h_1} in bezug auf k' ist, und in analoger Weise, daß $K_2^{(h_2)}, \ldots \bar{K}_e^{(h_e)}$ relativcyclisch vom Relativgrad $l^{h_2}, \ldots l^{h_e}$ in bezug auf k' sind. Damit ist aber der Satz 2 vollständig bewiesen.

§ 3.

Im Vorigen ist stets vorausgesetzt, daß l eine ungerade Primzahl sei. Genau dieselben Betrachtungen wie für ungerades l lassen sich aber auch für den Fall $l = 2$ durchführen, wenn der Grundkörper k nebst allen seinen conjugierten imaginär ist. Finden sich dagegen unter den conjugierten Körpern reelle, so sind noch besondere Entwickelungen nötig, die in diesem Paragraphen gegeben werden sollen. Es ist in diesem Falle der von D. Hilbert eingeführte schärfere Aequivalenzbegriff zu Grunde zu legen, nach dem zwei Ideale nur dann äquivalent heißen, wenn ihr Quotient eine total positive Körperzahl ist[1]).

Wir nehmen an, daß der Grad des Körpers k gleich m sei und daß sich unter den conjugierten Körpern s reelle befinden. Wir haber dann zunächst noch eine für k charakteristische Zahl p zu definieren, wobei wir festsetzen, daß die zu einer Zahl α aus k conjugierte Zahl, die in dem mit k conjugierten Körper $k^{(i)}$ liegt, mit $\alpha^{(i)}$ bezeichnet werden soll.

Es sei ε_1^* eine Einheit aus k, unter deren conjugierten sich wenigstens eine negative befindet und zwar sei dies $\varepsilon_1^{*(s_1)}$ in $k^{(s_1)}$; es sei dann ε_2^* eine solche Einheit, daß $\varepsilon_2^{*(s_1)}$ positiv und $\varepsilon_2^{*(s_2)}$ ne-

1) Nachrichten von der Königl. Gesellschaft d. Wiss. zu Göttingen. Math.-phys. Klasse. 1898, p. 375.

gativ ist; weiter sei ε_3^* eine solche Einheit, daß $\varepsilon_3^{*(s_1)}$ und $\varepsilon_3^{*(s_2)}$ positiv sind und $\varepsilon_3^{*(s_3)}$ negativ u. s. w. Die letzte auf solche Weise zu wählende Einheit sei ε_p^*; es folgt dann, daß jede Einheit ε in k, deren conjugierte in $k^{(s_1)}, \ldots k^{(s_p)}$ positiv sind, auch in den noch übrigen reellen Körpern $k^{(s_{p+1})}, \ldots k^{(s_s)}$ positive conjugierte Einheiten hat. Die Zahl p läßt sich auch in folgender Weise charakterisieren. Die Anzahl der Grundeinheiten von k ist $m'-1$, wo $m' = \dfrac{m+s}{2}$ ist. Nimmt man zu diesen noch eine Einheitswurzel aus k hinzu, deren Quadratwurzel nicht in k liegt, so erhält man $2^{m'}$ Einheitenverbände in k, unter denen sich mindestens $2^{m'-s}$ Verbände von total positiven Einheiten finden. Ist $s-p = p' > 0$, so wird diese Minimalzahl überschritten und es giebt in k genau $2^{m'-p}$ Verbände von total positiven Einheiten.

Aus den im Vorstehenden für den Körper k gemachten Annahmen, die keine Beschränkung enthalten, folgt, daß man zu jeder Zahl α in k eine Einheit ε so bestimmen kann, daß die Zahlen $(\varepsilon\alpha)^{(s_1)}, \ldots (\varepsilon\alpha)^{(s_p)}$ positiv werden. Daraus folgt, daß zwischen den Klassenzahlen 2^h und $2^{h'}$ von k, von denen die erste im engeren, die zweite im weiteren Sinne verstanden sei, die Beziehung besteht:

$$(21) \qquad 2^h = 2^{h'} \cdot 2^{p'}, \; p' = s - p.$$

Es möge nun das Klassensystem von k, wenn der engere Aequivalenzbegriff zu Grunde gelegt wird, in der Gestalt:

$$(22) \; c_1^{x_1} \ldots c_e^{x_e} d_1^{y_1} \ldots d_{e'}^{y_{e'}} \; (x_i = 0, 1, \ldots 2^{h_i}-1;\; y_i = 0, 1);\; h_1 + \cdots h_e + e' = h,$$

darstellbar sein, wo $d_1, \ldots d_{e'}$ solche Klassen bedeuten, die bei Zugrundelegung des weiteren Aequivalenzbegriffs in die Hauptklasse fallen. Die Erhöhung der Klassenzahl in k bei der schärferen Fassung des Aequivalenzbegriffs kommt also dadurch zu Stande, daß erstens e' neue Basisklassen zur Klassengruppe hinzutreten und daß zweitens $e'' = p' - e'$ Basisklassen in k eine Verdoppelung ihres Exponenten erfahren. Die Bezeichnung der Klassen möge so gewählt sein, daß dies die Klassen $c_1, \ldots c_{e''}$ sind.

Wir behaupten jetzt, daß genau $e+e'$ unabhängige unverzweigte relativquadratische Körper in bezug auf k existieren.

Zum Beweise bezeichnen wir die Grundeinheiten in k, zu denen noch eine Einheitswurzel, deren Quadratwurzel nicht in k liegt, hinzugenommen ist, mit $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_{m'}$, wo $m' = \dfrac{m+s}{2}$ ist.

Die Gesamtheit der Einheitenverbände ist dann in der Gestalt:

$$(23)\qquad \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_{m'}^{u_{m'}} \xi^2$$

darstellbar, wo ξ alle Einheiten aus k durchläuft; wir wollen uns dabei die Bezeichnung so gewählt denken, daß $\varepsilon_{p+1}, \ldots \varepsilon_{m'}$ total positive Einheiten sind. Wir bezeichnen ferner mit $\mathfrak{r}_1, \ldots \mathfrak{r}_e$ Ideale aus den Klassen $c_1, \ldots c_e$ und setzen

$$(24)\quad \mathfrak{r}_1^{2^{h_1-1}} = \varrho_1, \ldots \mathfrak{r}_{e''}^{2^{h_{e''}-1}} = \varrho_{e''}, \mathfrak{r}_{e''+1}^{2^{h_{e''+1}}} = \varrho_{e''+1}, \ldots \mathfrak{r}_e^{2^{h_e}} = \varrho_e,$$

wo die Größen $\varrho_1, \ldots \varrho_e$ Zahlen aus k bedeuten, die nicht Quadrate von Zahlen sind. Wir schreiben nun:

$$(25)\qquad \varrho_1 = \varepsilon_{m'+1}, \ldots \varrho_e = \varepsilon_{m'+e}$$

und bestimmen $m' + e - p$ Primideale $\mathfrak{q}_i$ derart, daß:

$$(26)\quad \left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}_i}\right) = -1, \quad \left(\frac{\varepsilon_j}{\mathfrak{q}_i}\right) = 1 \quad \begin{pmatrix} i = p+1, \ldots m'+e; \\ j = 1, 2, \ldots m'+e; \end{pmatrix} i \neq j \Big).$$

Man wähle darauf die Exponenten w so, daß

$$(27)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{q}_{p+1}\mathfrak{r}_1^{w_{p+1}^{(1)}} \ldots \mathfrak{r}_e^{w_{p+1}^{(e)}} &= (\varkappa_{p+1}) \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \mathfrak{q}_{m'+e}\mathfrak{r}_1^{w_{m'+e}^{(1)}} \ldots \mathfrak{r}_e^{w_{m'+e}^{(e)}} &= (\varkappa_{m'+e}) \end{aligned}$$

wird, wo $\varkappa_{p+1}, \ldots \varkappa_{m'+e}$ Zahlen aus k bedeuten. Bildet man jetzt das System von Zahlen

$$(28)\qquad \omega = \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_{m'+e}^{u_{m'+e}} \varkappa_{p+1}^{v_{p+1}} \ldots \varkappa_{m'+e}^{v_{m'+e}},$$

indem man die v den bekannten e Bedingungen unterwirft, damit kein Faktor der Ideale $\mathfrak{r}_1, \ldots \mathfrak{r}_e$ in der Relativdiscriminante von $(k, \sqrt{\omega})$ in bezug auf k aufgeht, so enthält dasselbe im ganzen $2^{2m'+e-p}$ Zahlen. Da nun im ganzen nur $2^{2m'-e}$ Arten von Zahlen in k existieren, so giebt es $e + p'$ unabhängige primäre Zahlen von der Gestalt (28). Wir bezeichnen mit:

$$(29)\qquad \omega_1 = \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_{m'+e}^{u_{m'+e}} \varkappa_{p+1}^{v_{p+1}} \ldots \varkappa_{m'+e}^{v_{m'+e}}$$

eine solche und untersuchen jetzt den Körper $K_1 = (k, \sqrt{\omega_1})$. Es mögen die Exponenten $v_{i_1}, \ldots v_{i_t}$ von Null verschieden sein, ferner möge ω_1 in n der reellen Körper $k^{(s_1)}, \ldots k^{(s_n)}$ negativ werden und es mögen l^{e_1} Idealklassen aus k in weiterem Sinne in K in

die Hauptklasse (im weiteren Sinne) übergehen. Haben dann a^*, a, v^*, v dieselbe Bedeutung wie in den früheren Mitteilungen, so gilt die Ungleichung:

$$(30) \qquad a^* \leqq t - m' + v^* + n + e_1 - 1.$$

Man erhält dieselbe, wenn man zunächst in der von D. Hilbert[1]) angegebenen Weise ein System von $\frac{m+s}{2} - n$ relativen Grundeinheiten von K_1 in bezug auf k konstruiert und dann ebenso wie in § 4 meiner zweiten Mitteilung verfährt.

Um eine Ungleichung für a, die Anzahl der unabhängigen ambigen Komplexe in K_1, zu gewinnen, (bei ihrer Definition werde der weitere Aequivalenzbegriff zu Grunde gelegt), bezeichnen wir die Anzahl negativer unter den Zahlen:

$$(31) \qquad \omega_1^{(s_1)},\ \omega_1^{(s_2)},\ \ldots\ \omega_1^{(s_r)}$$

mit n_1; die Anzahl negativer unter den Zahlen:

$$(32) \qquad \omega_1^{(s_r+1)},\ \ldots\ \omega_1^{(s_s)}$$

ist dann $n - n_1$. Sind ferner unter den Indices $i_1, \ldots i_t$ f aus der Reihe $m'+1, \ldots m'+e$ vorhanden, so gilt:

$$(33) \qquad a \leqq a^* + v - v^* + e - f - e_1.$$

Die Ueberlegungen zur Ableitung dieser Ungleichung sind völlig analog denen in § 4 meiner zweiten Mitteilung.

Jede Zahl α nun, die Relativnorm einer Zahl aus K_1 ist, muß die Bedingungen[2]):

$$(34) \qquad \left(\frac{\alpha,\ \omega_1}{1^{(s_i)}}\right) = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots s)$$

erfüllen. Denn ist $\omega_1^{(s_i)}$ positiv, so ist das Vorzeichensymbol selbstverständlich positiv; ist aber $\omega_1^{(s_i)}$ negativ, so folgt aus:

$$(35) \qquad \alpha^{(s_i)} = (\alpha_1 + \alpha_2 \sqrt{\omega_1^{(s_i)}})(\alpha_1 - \alpha_2 \sqrt{\omega_1^{(s_i)}}) = \alpha_1^2 - \alpha_2^2\, \omega_1^{(s_i)},$$

daß $\alpha^{(s_i)}$ positiv ist; es ist also auch in diesem Falle das Vorzeichensymbol gleich $+1$. Beachtet man dies, so ergiebt sich:

1) Vergl. Hilbert, Algebr. Zahlk. § 55, p. 572.

2) Vergl. Hilbert, Rel. Abel'sche Zahlk. § 6, p. 376, wo das in (34) auftretende Vorzeichensymbol erklärt ist.

(36) $$v \leqq m' - t + f - n_1.$$

Addiert man jetzt die Ungleichungen (30), (33) und (36), so folgt:

(37) $$a \leqq e - 1 + n - n_1.$$

Um jetzt sämtliche Ideale aus K_1 darzustellen, definiert man in analoger Weise wie in § 5 meiner zweiten Mitteilung die Ideale $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots \mathfrak{Q}_a$ in K_1 und zeigt wie dort, daß für jedes Ideal $\mathfrak{J}$ in K_1 eine Relation gilt:

(38) $$\mathfrak{J}^q = A \mathfrak{j} \mathfrak{Q}_1^{F_1(S_1)} \ldots \mathfrak{Q}_a^{F_a(S_1)},$$

wo A eine Zahl aus K_1, $\mathfrak{j}$ ein Ideal aus k, q einen ungeraden Exponenten und S_1 die Substitution $\sqrt{\omega_1} \mid -\sqrt{\omega_1}$ bedeutet.

Ist nun $e > 0$, so kann man offenbar, da $e + p'$ unabhängige primäre Zahlen ω zur Verfügung stehen, ω_1 so wählen, daß die sämtlichen Zahlen (32) positiv werden. Es ist dann $n = n_1$ und folglich:

(39) $$a \leqq e - 1.$$

Aus der letzten Ungleichung schließt man mit Hülfe von (38), daß alle Primideal $\mathfrak{p}$ in k mit der Eigenschaft $\left(\frac{\omega_1}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ in einer Untergruppe vom Grade $2^{\lambda-1}$ (oder $2^{\lambda'-1}$ bei Zugrundelegung des weiteren Aequivalenzbegriffes) der Klassengruppe von k liegen, die durch eine Kongruenz:

(40) $$a_1 x_1 + \ldots a_e x_e \equiv 0 (2)$$

definiert wird. Daraus schließt man in bekannter Weise die Unverzweigtheit von K_1. In gleicher Weise wie K_1 kann man noch $e - 1$ unabhängige unverzweigte relativquadratische Körper $K_2, \ldots K_e$ konstruieren durch Benutzung der primären Zahlen $\omega_2, \ldots \omega_e$, die ebenso wie ω_1 die Eigenschaft haben, daß ihre konjugierten in den Körpern $k^{(s_p+1)}, \ldots k^{(s_e)}$ sämtlich positiv sind.

Wir haben jetzt noch p' unabhängige primäre Zahlen aus (28) zur Verfügung und wollen zeigen, daß man mit ihrer Hülfe noch genau e' unabhängige unverzweigte relativquadratische Körper in bezug auf k konstruieren kann. Ich wähle zu diesem Zweck eine Zahl δ_1 aus der Klasse d_1' des Klassensystems $d_1^{y_1} \ldots d_e^{y_e}$, die nicht Hauptklasse im engeren Sinne ist, und normiere δ_1 so, daß

die zu δ_1 konjugierten Zahlen in den Körpern $k^{(s_1)}, \dots k^{(s_p)}$ positiv sind. Es muß dann unter den Zahlen:

(41) $$\delta_1^{(s_{p+1})}, \dots \delta_1^{(s_{r_2})}$$

sicher eine negative sein; man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die erste unter ihnen negativ sei. Ferner wollen wir noch voraussetzen, daß die Klasse d_1' so gewählt sei, daß unter den Zahlen (41) möglichst wenige negative vorkommen.

Unter den p' unabhängigen primären Zahlen aus (28), die noch zur Verfügung stehen, giebt es nun keine einzige mehr, deren sämtliche konjugierte in den Körpern $k^{(s_{p+1})}, \dots k^{(s_{r_2})}$ positiv wären. Denn sonst könnte man noch einen unabhängigen Körper von der Art der Körper $K_1, \dots K_e$ konstruieren, was unmöglich ist. Denn es existieren in der Klassengruppe von k im weiteren Sinne nur (2^e-1) Untergruppen vom Grade $2^{h'-1}$, denen die 2^e-1 konstruierten unverzweigten Körper eindeutig zugeordnet sind. Es folgt daraus, daß man stets eine primäre Zahl ω_{e+1} von der Gestalt (28) angeben kann, so daß $\omega_{e+1}^{(s_{p+1})}$ negativ und $\omega_{e+1}^{(s_{p+2})}, \dots$ $\dots \omega_{e+1}^{(s_{r_2})}$ positiv ausfallen. Wir untersuchen jetzt den Körper $K_{e+1} = (k, \sqrt{\omega_{e+1}})$ und behaupten, daß die Anzahl der ambigen Komplexe in ihm größer als $e-1$ ist. Wäre sie nämlich gleich oder kleiner als $e-1$, so würde folgen, daß der Körper K_{e+1} zu einer Untergruppe der Klassengruppe von k gehört, zu der bereits ein unverzweigter Körper konstruiert ist, was unmöglich ist. Es gilt also für K_{e+1}:

(42) $$a \geqq e,$$

andererseits folgt aus (37), da $n - n_1 = 1$ ist,

(43) $$a \leqq e,$$

es ist also die Anzahl der ambigen Komplexe genau gleich e. Daraus schließt man, daß

(44) $$v = m' - t + f - n_1$$

ist; denn nach (33) ist v nicht kleiner und nach (36) nicht größer als die rechte Seite von (44). Die Ideale in K_{e+1} lassen sich nun wieder in der Form darstellen:

(45) $$\mathfrak{J}^q = A j \mathfrak{Q}_1^{r_1(\delta_1)} \dots \mathfrak{Q}_e^{r_e(\delta_1)},$$

wo die Bezeichnungen die analoge Bedeutung wie in (38) haben. Die Ideale $\mathfrak{Q}_1, \ldots \mathfrak{Q}_e$ kann man sich so gewählt denken, daß ihre Relativnormen resp. in die Klassen $c_1, \ldots c_e$ fallen. Ich behaupte jetzt, daß die Relativnormen von Zahlen aus K_{e+1} nicht in die Klasse d_1' fallen können. Ist nämlich α die Relativnorm einer beliebigen Zahl A aus k, so gilt zunächst für jeden Index i:

$$(46) \qquad \left(\frac{\alpha, \omega_{e+1}}{1^{(i)}}\right) = 1.$$

Um unsere Behauptung zu beweisen, normieren wir α, d. h. wir verwandeln α durch Multiplikation mit einer geeignet gewählten Einheit ξ_α aus k in eine Zahl, deren konjugirte in den Körpern $k^{(s_1)}, \ldots k^{(s_p)}$ positiv sind. Wir wollen zeigen, daß wir dies stets mit Hülfe einer Einheit bewerkstelligen können, die selbst Relativnorm einer Zahl aus K_{e+1} ist. Bedeuten nämlich $k^{(y_1)} \ldots k^{(y_{n_1})}$ diejenigen unter den Körpern $k^{(s_1)}, \ldots k^{(s_p)}$, in denen die zu ω_{e+1} konjugierten Zahlen negativ werden, so ist zunächst klar, daß alle Einheiten ξ, welche die Bedingungen:

$$(47) \qquad \left(\frac{\xi}{\mathfrak{q}_{i_1}}\right) = 1, \ \ldots \left(\frac{\xi}{\mathfrak{q}_{i_t}}\right) = 1$$

$$(48) \qquad \left(\frac{\xi, \omega}{1^{(y_1)}}\right) = 1, \ \ldots \left(\frac{\xi, \omega}{1^{(y_{n_1})}}\right) = 1$$

befriedigen, Relativnormen von Zahlen aus K_{e+1} sind. Denn alle Einheiten, welche diese Eigenschaft haben, müssen (47) und (48) erfüllen. Es kann daher höchstens $m' - t + f - n_1$ unabhängige Einheitenverbände geben, deren Einheiten Relativnormen von Zahlen aus K_{e+1} sind; daraus folgt in Verbindung mit (44), daß alle Einheiten, welche die Bedingungen (47) und (48) erfüllen, Relativnormen von Zahlen aus K_{e+1} sind.

Es mögen nun unter den Zahlen $\alpha^{(s_1)}, \ldots \alpha^{(s_p)}$ im ganzen n' negative vorhanden sein, die mit:

$$(49) \qquad \alpha^{(x_1)}, \ \ldots \ \alpha^{(x_{n'})}$$

bezeichnet seien. Die gesuchte Einheit ξ_α hat dann außer den Bedingungen (47) und (48) noch die weiteren:

$$(50) \qquad \xi_\alpha^{(x_1)}, \ \ldots \ \xi_\alpha^{(x_{n'})} \text{ negativ}$$

zu erfüllen. Um die Einheit ξ_α bequemer darstellen zu können, wollen wir noch über die Einheiten $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_p$ in (23) eine be-

sondere Verfügung treffen. Wir wollen uns ε_i so gewählt denken, daß

(51) $$\varepsilon_i^{(s_i)} < 0 \quad \varepsilon_i^{(s_j)} > 0. \quad \begin{pmatrix} i, j = 1, 2, \ldots p \\ j \neq i \end{pmatrix}$$

Daß diese Wahl, durch die die Ideale q_i nicht weiter berührt werden, stets möglich ist, erkennt man leicht, wenn man bedenkt, daß die Vorzeichenanordnungen, die sich durch die Reihen:

(52) $$\varepsilon^{(s_1)}, \ldots \varepsilon^{(s_p)}$$

ergeben, wenn man ε alle Einheiten des Systems:

(53) $$\varepsilon_1^{u_1} . \varepsilon_2^{u_2} \ldots \varepsilon_p^{u_p} \quad (u = 0, 1)$$

durchlaufen läßt, alle überhaupt möglichen sind. Setzt man jetzt:

(54) $$\xi_\alpha = \varepsilon_{x_1} . \varepsilon_{x_2} \ldots \varepsilon_{x_{n'}},$$

so ist ξ_α eine Einheit der gewünschten Art. Denn sie befriedigt die Bedingungen (47) und (50). Daß sie auch (48) befriedigt, folgt daraus, daß alle Indices $x_1, \ldots x_{n'}$ von den Indices $y_1, \ldots \ldots y_{n_1}$ verschieden sind. Denn aus (46) und (49) folgt, daß:

$$\omega^{(x_1)}, \ldots \omega^{(x_{n'})}$$

positiv sind. Damit ist unsere Behauptung bewiesen, daß sich α mit Hülfe einer Einheit normieren läßt, die Relativnorm einer Zahl aus K_{s+1} ist. Ich kann daher direkt annehmen, daß α normiert sei. Fiele nun α in die Klasse d_1', so wäre α mit δ_1 im engeren Sinne äquivalent und folglich $\alpha^{(s_p+1)}$ negativ. Da auch $\omega_{s+1}^{(s_p+1)}$ negativ ist, so widerspricht dies der Relation:

(55) $$\left(\frac{\alpha, \omega_{s+1}}{1^{(s_p+1)}}\right) = 1.$$

Damit ist gezeigt, daß α nicht in der Klasse d_1' liegen kann und deshalb folgt aus (45), daß alle Relativnormen von Idealen aus K_{s+1} in einer Untergruppe der Klassengruppe von k vom Grade 2^{h-1} liegen. Daraus schließt man in bekannter Weise, daß K_{s+1} unverzweigt in bezug auf k ist.

Ist $e' > 1$, so kann man noch einen weiteren unverzweigten relativquadratischen Körper in bezug auf k konstruieren. Wir nehmen zu diesem Zweck an, daß K_{s+1} zu der durch die Kongruenz:

$$(56) \qquad y_1 \equiv 0 \ (2)$$

definierten Untergruppe der Klassengruppe von k gehört, was offenbar durch nachträgliche Abänderung der Bezeichnung der Klassen d stets erreicht werden kann. Es sei nun δ_2 eine Zahl aus einer Klasse d_2' des Systems $d_2^{y_2} \dots d_e^{y_e}$, die nicht Hauptklasse im engeren Sinne ist, und zwar sei δ_2 normiert. Es muß dann unter den Zahlen:

$$(57) \qquad \delta_2^{(s_{\rho+2})}, \dots \delta_2^{(s_\lambda)}$$

eine negative sein. Denn wären alle Zahlen (57) positiv, so müßten auch alle Zahlen $\delta_1^{(s_{\rho+2})}, \dots \delta_1^{(s_\lambda)}$ positiv sein, weil δ_1 so gewählt sein sollte, daß unter den Zahlen (41) möglichst wenige negative vorkommen. Es wäre dann δ_2 mit δ_1 äquivalent, was der Wahl der Klasse d_2' widerspricht. Wir nehmen deshalb an, die erste der Zahlen (57) sei negativ und setzen außerdem voraus, daß die Klasse d_2' so gewählt sei, daß sich unter den Zahlen (57) möglichst wenige negative befinden. Wir wählen dann unter den $p'-1$ noch zur Verfügung stehenden unabhängigen primären Zahlen aus (28) eine solche ω_{e+2} aus, daß $\omega_{e+2}^{(s_{\rho+2})}$ negativ und $\omega_{e+2}^{(s_{\rho+3})}, \dots \omega_{e+2}^{(s_\lambda)}$ positiv ausfallen. Durch Multiplikation mit einer geeigneten Potenz von ω_{e+1} können wir es offenbar auch noch erreichen, daß $\omega_{e+2}^{(s_{\rho+1})}$ positiv wird. Wir wollen also voraussetzen, daß unter den Zahlen:

$$(58) \qquad \omega_{e+2}^{(s_{\rho+1})}, \ \omega_{e+2}^{(s_{\rho+2})}, \dots \omega_{e+2}^{(s_\lambda)}$$

nur die zweite negativ sei. Es lassen sich dann für ω_{e+2} die ganz analogen Ueberlegungen durchführen wie für ω_{e+1}, womit die Existenz eines zweiten unabhängigen unverzweigten relativquadratischen Körpers in bezug auf k bewiesen ist. Den angegebenen Konstruktionsproceß kann man offenbar fortsetzen und zu den Körpern $K_1, \dots K_e$ noch weitere e' Körper $K_{e+1}, \dots K_{e+e'}$ konstruieren, so daß damit im ganzen $e+e'$ unabhängige unverzweigte relativquadratische Körper in bezug auf k gewonnen sind, deren Existenz wir beweisen wollten.

Auf Grund dieses Existenzbeweises können wir jetzt durch dieselben Ueberlegungen wie für ungerades l zeigen, daß in bezug auf k, wenn seine Klassenzahl im engeren Sinne 2^h ist, ein relativ Abel'scher unverzweigter Körper vom Relativgrad 2^h existiert, dessen Relativgruppe zu der Klassengruppe von k holoedrisch isomorph ist.

Wir sind hiermit zu einem gewissen Abschluß gelangt, wie wir jetzt kurz resumieren wollen. Es sei der Körper k vorgelegt, seine Klassenzahl im engeren Sinne sei h und es sei

(59) $$h = l_1^{h_1} \dots l_i^{h_i}$$

die Zerlegung von h in Primzahlpotenzen, so daß also $l_1, \dots l_i$ verschiedene Primzahlen bedeuten. Wir haben dann nachgewiesen, daß in bezug auf k unverzweigte relativ Abel'sche Körper von den Relativgraden $l_1^{h_1}, \dots l_i^{h_i}$ existieren, deren Relativgruppen mit den Untergruppen der Klassengruppe von k von den resp. Graden $l_1^{h_1}, \dots l_i^{h_i}$ holoedrisch isomorph sind. Vereinigt man alle diese Körper, so entsteht ein relativ Abel'scher unverzweigter Körper in bezug auf k vom Relativgrad h. Damit ist zum ersten Male der folgende von D. Hilbert aufgestellte fundamentale Satz vollständig bewiesen:

Satz 3. Es sei k ein beliebiger algebraischer Zahlkörper, dessen Klassenzahl im engeren Sinn gleich h ist. Es existiert dann in bezug auf k ein unverzweigter relativ Abel'scher Körper vom Relativgrad h, dessen Relativgruppe mit der Gruppe der Idealklassen in k holoedrisch isomorph ist. Dieser Körper heisst der Klassenkörper von k.

§ 4.

Ist der Grundkörper k ein imaginärer quadratischer Körper, so liefert die Theorie der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen einen Relativkörper $\bar{K}$ in bezug auf k, dessen Relativgruppe ebenfalls mit der Gruppe der Idealklassen von k holoedrisch isomorph ist [1]). Es soll im Folgenden gezeigt werden, daß dieser Körper $\bar{K}$, den wir als Klassenkörper der komplexen Multiplikation bezeichnen, identisch ist mit dem arithmetisch konstruierten Klassenkörper K in bezug auf k [2]). Die Eigenschaft von $\bar{K}$, auf die wir uns bei dem Identitätsbeweise stützen, ist folgende: Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus k, das nicht in der Relativdiscriminante von $\bar{K}$ aufgeht, und ist g der niedrigste Exponent, für den die Aequivalenz:

---

1) H. Weber, l. c. III. Teil.

2) Man vergl. R. Fueter, Der Klassenkörper der quadratischen Körper und die complexe Multiplikation. Dissertation, Göttingen 1903. Dort ist für specielle Fälle (für die relativquadratischen und relativcubischen Körper) und auf einem anderen Wege als hier diese Identität bewiesen.

(56)

definierten
fenbar du
Klassen d
aus einer
im engere
unter den

(57)

eine negat
müßten au
gewählt s
negative v
der Wahl
die erste d
daß die K
möglichst
$p'-1$ no
Zahlen a
$\omega^{(\dots)}_{\dots}$, ...
geeigneten
reichen,
daß unter

(58)

nur die z
analogen
istenz ei
schen K
Konstruk
Körpern
struieren
relativqu
Existenz
Auf
dieselben
auf k, w
lativ Ab
stiert, d
drisch is

$$\left(\frac{\omega_1}{\mathfrak{p}}\right) = 1$$

erfüllt. Für $\mathfrak{p}$ gilt dann nach unseren früheren Entwickelungen die Aequivalenz $\mathfrak{p}^l \sim 1$ in k' (weil $\mathfrak{p}$ in einer Klasse der durch die Kongruenz $x_1 \equiv 0(l)$ definierten Untergruppe der Klassengruppe von k' liegt) und es zerfällt deshalb $\mathfrak{p}$ in $\overline{K}'$ in mindestens l^2 verschiedene Primfaktoren. Daraus folgt, daß auch $\left(\frac{\overline{\omega}_1}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ sein muß und hieraus schließt man[1]:

$$K_1 = (k', \sqrt[l]{\omega_1}) = (k', \sqrt[l]{\overline{\omega}_1}).$$

Das Klassensystem von K_1 ist nun in der Form darstellbar:

$$C_1^{y_1} C_2^{y_2} D \qquad (y = 0, 1, \ldots l-1),$$

wo C_2 eine Klasse aus K_1 bedeutet, deren Relativnorm in k' in die Klasse c_2 fällt und D alle Klassen in K_1 durchläuft, deren Relativnormen in k' in eine Klasse des Systems d fallen. Der Körper K' möge dann erzeugt werden durch Adjunktion von $\sqrt[l]{\Omega_1}$ und $\sqrt[l]{\omega_2}$ zu K_1, der Körper $\overline{K}'$ durch Adjunktion von $\sqrt[l]{\overline{\Omega}_1}$ und $\sqrt[l]{\overline{\omega}_2}$, wo Ω_1 und $\overline{\Omega}_1$ Zahlen aus K_1 bedeuten. Wählt man dann ein Primideal $\mathfrak{P}$ in K_1, das die Bedingungen:

$$\left(\frac{\Omega_1}{\mathfrak{P}}\right)_{K_1} = 1\,, \quad \left(\frac{\omega_2}{\mathfrak{P}}\right)_{K_1} = 1$$

erfüllt, so liegt die Relativnorm von $\mathfrak{P}$ in k in der Hauptklasse und $\mathfrak{P}$ zerfällt daher in K' in l^2 verschiedene Primfaktoren. Daraus folgt, daß auch die Gleichungen:

$$\left(\frac{\overline{\Omega}_1}{\mathfrak{P}}\right)_{K_1} = 1\,, \quad \left(\frac{\overline{\omega}_2}{\mathfrak{P}}\right)_{K_1} = 1$$

gelten müssen, woraus die Identität von $\overline{K}'$ und K' folgt. Daß dann auch $\overline{K}$ und K identisch sind, ergiebt sich daraus, daß diese Körper zu derselben Untergruppe der Relativgruppe von K' in bezug auf k gehören.

Es sei jetzt die Klassenzahl von k beliebig. Wir können dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die

1) Ph. Furtwängler, Abhandlungen der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Math.-phys. Kl. Neue Folge. Bd. II, Nr. 3, p. 28, Satz 26.

(60) $$\mathfrak{p}^g \sim 1$$

in k gilt, so zerfällt $\mathfrak{p}$ in $\overline{K}$ in $\frac{h}{g}$ verschiedene Primfaktoren, wenn mit h die Klassenzahl von k bezeichnet wird [1]).

Um das Wesentliche des Beweises klar hervortreten zu lassen, gebe ich zunächst einen speciellen Fall. Es sei das Klassensystem von k in der Form darstellbar:

(61) $$c_1^{x_1} c_2^{x_2} \qquad \begin{pmatrix} x_1 = 0, 1, \ldots l^2 - 1 \\ x_2 = 0, 1, \ldots l \end{pmatrix},$$

also die Klassenzahl von k gleich l^3. Die funktionentheoretisch und arithmetisch definierten Klassenkörper $\overline{K}$ und K sind vom Relativgrad l^3 in bezug auf k. Ich adjungiere jetzt eine $l$te Einheitswurzel ζ zu k, $\overline{K}$ und K und setze:

(62) $$(k, \zeta) = k', \quad (\overline{K}, \zeta) = \overline{K}', \quad (K, \zeta) = K'.$$

Das Klassensystem von k' ist dann in der Gestalt:

(63) $$c_1^{x_1} c_2^{x_2} d$$

darstellbar, wo d eine beliebige Klasse aus k' bedeutet, deren Relativnorm in k in die Hauptklasse fällt; jeder der Körper $\overline{K}'$ und K' setzt sich zusammen aus 2 relativcyclischen Körpern in bezug auf k', von denen der eine vom Relativgrad l^2, der andere vom Relativgrad l in bezug auf k' ist. Es existieren also in K' und $\overline{K}'$ je 2 unabhängige relativcyclische Körper vom Relativgrad l in bezug auf k'; die in K' enthaltenen mögen durch Adjunktion von $\sqrt[l]{\omega_1}$ und $\sqrt[l]{\omega_2}$ zu k', die in $\overline{K}'$ durch Adjunktion von $\sqrt[l]{\overline{\omega}_1}$ und $\sqrt[l]{\overline{\omega}_2}$ erzeugt werden, und zwar sollen $\sqrt[l]{\omega_1}$ resp. $\sqrt[l]{\overline{\omega}_1}$ diejenigen Körper definieren, die in den genannten relativcyclischen Körpern vom Relativgrad l^2 in bezug auf k' enthalten sind. Es gehört dann ω_1 zu der durch die Kongruenz $x_1 \equiv 0 (l)$ definierten Untergruppe der Klassengruppe von k'. Ich setze jetzt fest, daß die Aequivalenz $\mathfrak{a} \sim 1$ in k' bedeuten soll, daß $\mathfrak{a}$ in einer Klasse d liegt, deren Relativnorm in k in die Hauptklasse fällt, und schließe von der folgenden Betrachtung alle Primideale aus, die in der Relativdiscriminante von $\overline{K}$ in bezug auf k aufgehen.

Es sei $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Primideal aus k', das die Bedingung:

---

1) H. Weber, l. c. p. 444 und 445.

$$\left(\frac{\omega_1}{\mathfrak{p}}\right) = 1$$

erfüllt. Für $\mathfrak{p}$ gilt dann nach unseren früheren Entwickelungen die Aequivalenz $\mathfrak{p}^l \sim 1$ in k' (weil $\mathfrak{p}$ in einer Klasse der durch die Kongruenz $x_1 \equiv 0\,(l)$ definierten Untergruppe der Klassengruppe von k' liegt) und es zerfällt deshalb $\mathfrak{p}$ in $\overline{K}'$ in mindestens l^2 verschiedene Primfaktoren. Daraus folgt, daß auch $\left(\frac{\overline{\omega}_1}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ sein muß und hieraus schließt man [1]:

$$K_1 = (k', \sqrt[l]{\omega_1}) = (k', \sqrt[l]{\overline{\omega}_1}).$$

Das Klassensystem von K_1 ist nun in der Form darstellbar:

$$C_1^{y_1}\, C_2^{y_2}\, D \qquad (y = 0,\, 1,\, \ldots\, l-1),$$

wo C_2 eine Klasse aus K_1 bedeutet, deren Relativnorm in k' in die Klasse c_2 fällt und D alle Klassen in K_1 durchläuft, deren Relativnormen in k' in eine Klasse des Systems d fallen. Der Körper K' möge dann erzeugt werden durch Adjunktion von $\sqrt[l]{\Omega_1}$ und $\sqrt[l]{\omega_2}$ zu K_1, der Körper $\overline{K}'$ durch Adjunktion von $\sqrt[l]{\overline{\Omega}_1}$ und $\sqrt[l]{\overline{\omega}_2}$, wo Ω_1 und $\overline{\Omega}_1$ Zahlen aus K_1 bedeuten. Wählt man dann ein Primideal $\mathfrak{P}$ in K_1, das die Bedingungen:

$$\left(\frac{\Omega_1}{\mathfrak{P}}\right)_{K_1} = 1\,, \quad \left(\frac{\omega_2}{\mathfrak{P}}\right)_{K_1} = 1$$

erfüllt, so liegt die Relativnorm von $\mathfrak{P}$ in k in der Hauptklasse und $\mathfrak{P}$ zerfällt daher in K' in l^2 verschiedene Primfaktoren. Daraus folgt, daß auch die Gleichungen:

$$\left(\frac{\overline{\Omega}_1}{\mathfrak{P}}\right)_{K_1} = 1\,, \quad \left(\frac{\overline{\omega}_2}{\mathfrak{P}}\right)_{K_1} = 1$$

gelten müssen, woraus die Identität von $\overline{K}'$ und K' folgt. Daß dann auch $\overline{K}$ und K identisch sind, ergiebt sich daraus, daß diese Körper zu derselben Untergruppe der Relativgruppe von K' in bezug auf k gehören.

Es sei jetzt die Klassenzahl von k beliebig. Wir können dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die

1) Ph. Furtwängler, Abhandlungen der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Math.-phys. Kl. Neue Folge. Bd. II, Nr. 3, p. 28, Satz 26.

Klassenzahl gleich l^h sei, wo l eine Primzahl bedeutet; denn man kann, wie auch bei der Konstruktion des Klassenkörpers ausgeführt wurde, die einzelnen Untergruppen der Klassengruppe von k, deren Grade Potenzen verschiedener Primzahlen sind, für sich betrachten. Es sei also das Klassensystem von k in der Gestalt darstellbar:

(64) $$c_1^{x_1} c_2^{x_2} \ldots c_e^{x_e} \quad (x_i = 1, 2, \ldots l^{h_i})$$

und dementsprechend das Klassensystem von $k' = (k, \zeta)$ in der Gestalt:

(65) $$c_1^{x_1} c_2^{x_2} \ldots c_e^{x_e} d,$$

wo d das System von Klassen bedeutet, deren Relativnormen in k in die Hauptklasse fallen. Es bedeute wieder K den arithmetischen Klassenkörper und $\bar{K}$ den Klassenkörper der komplexen Multiplikation und es sei:

(66) $$(K, \zeta) = K', \quad (\bar{K}, \zeta) = \bar{K}'.$$

Die Körper K' und $\bar{K}'$ setzen sich dann jeder aus e relativcyclischen Körpern in bezug auf k' zusammen, deren Relativgrade $l^{h_1}, \ldots l^{h_e}$ sind. Wir nehmen an, daß die Bezeichnung der Klassen c so gewählt sei, daß $h_1 \geqq h_2 \ldots \geqq h_e$ sei. Es giebt dann in K' e unabhängige relativcyclische Körper vom Relativgrad l in bezug auf k', die durch Adjunktion von $\sqrt[l]{\omega_1}, \ldots \sqrt[l]{\omega_e}$ erzeugt werden mögen und zwar möge ω_i zu der durch die Kongruenz $x_i \equiv 0\,(l)$ definierten Untergruppe der Klassengruppe von k' gehören. Ebenso enthält $\bar{K}'$ e unabhängige relativcyclische Körper vom Relativgrad l in bezug auf k', die durch Adjunktion von $\sqrt[l]{\bar{\omega}_1}, \ldots \sqrt[l]{\bar{\omega}_e}$ erzeugt werden mögen, und zwar möge die Bezeichnung so gewählt sein, daß $(\sqrt[l]{\bar{\omega}_i}, k')$ als Unterkörper in einem in $\bar{K}'$ enthaltenen relativcyclischen Körper vom Relativgrad l^{h_i} liegt.

Es möge jetzt $h_1 = h_2 = \ldots h_{e'}$ sein und $h_{e'+1} < h_{e'}$. Ich fasse dann ein Primideal $\mathfrak{p}$ aus k' in's Auge mit den Eigenschaften:

(67) $$\left(\frac{\omega_1}{\mathfrak{p}}\right) = 1, \cdots \left(\frac{\omega_{e'}}{\mathfrak{p}}\right) = 1,$$

wobei die Primideale, die in der Relativdiscriminante von $\bar{K}$ in

bezug auf k aufgehen, ausgeschlossen bleiben. Es gilt dann offenbar:

$$(68) \qquad \mathfrak{p}^{l^{h_1-1}} \sim 1 \text{ in } k',$$

wo diese Aequivalenz wieder die Bedeutung haben soll, daß $\mathfrak{p}^{l^{h_1-1}}$ in einer Klasse des Systems d liegt. Denn $\mathfrak{p}$ liegt nach (67) in einer Klasse, die der durch die Kongruenzen:

$$(69) \qquad x_1 \equiv 0, \dots x_{\varrho'} \equiv 0 (l)$$

definierten Untergruppe der Klassengruppe von k' angehört. Es zerfällt daher $\mathfrak{p}$ in $\overline{K}'$ in mindestens l^{h-h_1+1} verschiedene Primfaktoren; daraus folgt, daß auch:

$$(70) \qquad \left(\frac{\bar{\omega}_1}{\mathfrak{p}}\right) = 1, \cdots \left(\frac{\bar{\omega}_{\varrho'}}{\mathfrak{p}}\right) = 1$$

sein muss. Wenn aber die Gleichungen (67) für alle Primideale aus k' (mit Ausnahme einer endlichen Anzahl) die Gleichungen (70) zur Folge haben, so muß:

$$K_1' = (k', \sqrt[l]{\omega_1}, \dots \sqrt[l]{\omega_{\varrho'}}) = (k', \sqrt[l]{\bar{\omega}_1}, \dots \sqrt[l]{\bar{\omega}_{\varrho'}})$$

sein. Operiert man jetzt mit K_1' so weiter, wie wir eben mit k' operirt haben, so ergiebt sich dadurch die Identität von K' mit $\overline{K}'$. Daß dann auch K und $\overline{K}$ identisch sind, ergiebt sich wieder daraus, daß diese Körper zu derselben Untergruppe der Relativgruppe von K' in bezug auf k gehören. Hiermit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 4. Ist k ein beliebiger imaginärer quadratischer Körper, so ist der auf arithmetischem Wege zu k konstruierte Klassenkörper identisch mit dem zu k gehörigen Klassenkörper aus der Theorie der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen. Der letzte ist daher unverzweigt in bezug auf k.

Ueber die von einem Integrationsweg von vornherein unabhängige Definition des bestimmten Integrals im zweidimensionalen Gebiet.

Von

Lothar Heffter.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 14. Mai 1904.

Der in meiner Note in den Gött. Nachr. (vorgelegt am 31. Okt. 1903) gelieferte Beweis des Cauchy-Goursat'schen Integralsatzes für ein Rechteck, dessen Seiten den Coordinatenaxen einer reellen xy-Ebene parallel sind, operiert lediglich mit dem Begriff des einfachen bestimmten Integrals mit einer reellen Integrationsvariablen. Er setzt also den allgemeinen Begriff des Kurvenintegrals überhaupt noch nicht voraus. Ja, es läßt sich zeigen, daß jener Beweis umgekehrt zu einer Definition des Integrals eines totalen Differentials $f(xy)dx + g(xy)dy$, also auch des Integrals einer Function der complexen Variablen z führt, bei der ein gegebener Integrationsweg von vornherein ausscheidet und außer dem Integranden nur die Integrationsgrenzen in Betracht kommen. Da in der Functionentheorie thatsächlich nur die Integrale eines totalen Differentials, nicht aber die Integrale $\int f(xy)dx$ und $\int g(xy)dy$ für sich eine Rolle spielen, und da andererseits bei dem angedeuteten Weg alle Betrachtungen über die Natur der Curve, die als Integrationsweg dient, fortfallen, so dürfte diesen Ueberlegungen ein gewisses Interesse zukommen.

Definition und Theorie des bestimmten Integrals im zweidimensionalen Gebiet gestalten sich bei diesem Weg folgendermaßen[1]).

1) Diesen Weg habe ich auch in einer Vorlesung über Functionentheorie

I. (Rechtecks-Satz). Sind $f(xy)$ und $g(xy)$ in dem Bereich G überall eindeutig und stetig als Functionen der beiden reellen Variablen x, y, besitzen sie beide überall ein vollständiges erstes Differential und genügen sie der Bedingung $f_2 = g_1$, so ist das über die Peripherie eines vollständig zu G gehörigen Rechteckes, dessen Seiten den Coordinatenaxen parallel und dessen Ecken $x_0|y_0$, $x_1|y_0$, $x_1|y_1$, $x_0|y_1$ sind, erstreckte Integral

$$(1)\quad \int (f(xy)dx + g(xy)dy) \equiv \int_{x_0}^{x_1} f(xy_0)dx + \int_{y_0}^{y_1} g(x_1y)dy + \int_{x_1}^{x_0} f(xy_1)dx + \int_{y_1}^{y_0} g(x_0y)dy = 0,$$

wie in den Gött. Nachr. a. a. O. bewiesen worden ist.

II. (Definition). Ist bei denselben Voraussetzungen wie oben G einfach zusammenhängend, und sind $x_0|y_0$, $x|y$ irgend zwei Punkte dieses Bereiches, so hat das über einen beliebigen, ganz innerhalb G verlaufenden Treppenweg, dessen Strecken abwechselnd der x- und y-Axe parallel sind, von $x_0|y_0$ bis $x|y$ erstreckte Integral, bei dem also die Integrale über die einzelnen Strecken einfache bestimmte Integrale mit einer reellen Integrationsvariablen sind, nach I. stets denselben Wert, wie und in welcher Anzahl auch die Ecken der Treppe gewählt sein mögen. Diesen Wert definieren wir als das von x_0y_0 nach xy in G erstreckte Integral

$$(2)\qquad \int_{x_0y_0}^{xy} (f(xy)dx + g(xy)dy).$$

III. (Eindeutigkeit, Stetigkeit, Differentiation des Integrals). Die Function von xy

$$(3)\qquad F(xy) \equiv \int_{x_0y_0}^{xy} (f(xy)dx + g(xy)dy)$$

ist nach der Definition II. in dem einfach zusammenhängenden

W. S. 1903/4 benutzt und eine vollständige Skizze desselben am 7. Febr. 1904 Herrn A. Pringsheim in München brieflich mitgeteilt. Durch ein Schreiben meines Freundes Schlesinger in Klausenburg vom 31. März 1904 erfuhr ich, daß auch er völlig ohne Kenntnis der von mir aus meiner letzten Note in den Gött. Nachr. inzwischen gezogenen Consequenzen im Wesentlichen dieselben Gedanken aus ihr abgeleitet hatte, wofür auch eine bald erscheinende Abhandlung von ihm über weitergehende Fragen Zeugnis ablegen wird.

Bereich G eindeutig. Unter Benutzung von I. und außerdem lediglich des Satzes vom Mittelwert der Integrandenfunction für gewöhnliche bestimmte Integrale folgt dann in bekannter Weise, daß $F(xy)$ auch stetig als Function der beiden Variablen x, y ist und daß

$$(4) \qquad \frac{\partial F(xy)}{\partial x} = f(xy), \qquad \frac{\partial F(xy)}{\partial y} = g(xy).$$

IV. (Fundamentalsatz der Integralrechnung). Ist $\Phi(xy)$ nebst $\Phi_1(xy)$, $\Phi_2(xy)$ im Bereich G eindeutig und stetig, besitzen Φ_1 und Φ_2 ein vollständiges erstes Differential und ist $\Phi_{12} = \Phi_{21}$, so ist

$$(5) \qquad \int_{x_0y_0}^{xy} d\Phi(xy) \equiv \int_{x_0y_0}^{xy} (\Phi_1(xy)dx + \Phi_2(xy)dy) = \Phi(xy) - \Phi(x_0y_0).$$

Der Beweis ergiebt sich nach der Definition II. unmittelbar aus dem entsprechenden Satz für gewöhnliche bestimmte Integrale.

V. (Das Integral in mehrfach zusammenhängendem Bereich). Ist der Bereich G mehrfach zusammenhängend, so ist das Integral (2) im Allgemeinen durch die Grenzen allein noch nicht eindeutig bestimmt, und erst jetzt ist die Angabe einer von x_0y_0 nach xy ganz im Berich G verlaufenden „Führungscurve der Integration“ C notwendig, über deren Natur sonst aber gar nichts vorausgesetzt zu werden braucht. Wir verstehen dann unter dem von x_0y_0 nach xy längs C in G erstreckten Integral

$$(6) \qquad (C) \int_{x_0y_0}^{xy} (f(xy)dx + g(xy)dy)$$

das Integral über einen beliebigen ganz in G verlaufenden Treppenweg von x_0y_0 nach xy, der der einzigen Bedingung genügen muß, daß die von ihm zusammen mit C begrenzten Teile der xy-Ebene völlig zum Bereich G gehören.

Hiernach kann nun auch von beliebigen geschlossenen Integralen in einem mehrfach zusammenhängenden Bereich G die Rede sein.

VI. (Transformation des Integrals). Dem theoretischen Bedürfnis ist durch die vorstehend skizzierte Theorie der bestimmten Integrale im reellen zweidimensionalen Gebiet

(xy) und folglich (s. Gött. Nachr. a. a. O. I) auch im Gebiet einer complexen Variablen z vollauf Genüge geleistet. Vom praktischen Standpunkt aus ist aber noch die Begründung der Transformation des Integrals durch Einführung anderer Integrationsvariablen erwünscht, weil sie die Wertberechnung des Integrals häufig erleichtert. Geometrisch gesprochen: es ist oft angebracht, zu neuen Coordinaten, z. B. von orthogonalen Parallelcoordinaten x, y zu Polarcoordinaten ϱ, φ überzugehen [1]).

Wir beweisen deshalb noch folgenden Satz:

Sind

$$(7) \qquad x = r(uv), \quad y = s(uv)$$

$$(x_0 = r(u_0 v_0), \quad y_0 = s(u_0 v_0))$$

zwei Functionen der reellen Variablen u, v derart, daß die Gleichungen (7) zwischen dem einfach zusammenhängenden xy-Bereich G und einem einfach zusammenhängenden uv-Bereich Γ eine ein-eindeutige Abbildung bewirken, sind ferner, wie r und s selbst, so auch r_1, r_2, s_1, s_2 in Γ eindeutig, stetig in beiden Variablen u, v, mit vollständigem erstem Differential begabt und ist $r_{12} = r_{21}$, $s_{12} = s_{21}$, so ist

$$(8) \quad \int_{x_0 y_0}^{xy} (f(xy)dx + g(xy)dy) = \int_{u_0 v_0}^{uv} [(f(rs)r_1 + g(rs)s_1)du + (f(rs)r_2 + g(rs)s_2)dv];$$

d. h. wenn die durch das Integral links dargestellte Function von xy wieder mit $F(xy)$, die durch das Integral rechts dargestellte Function von uv mit $\Phi(uv)$ bezeichnet wird, so ist zu beweisen, daß die Gleichung

$$(8^a) \qquad F(xy) = \Phi(uv)$$

durch die Substitution (7) zur Identität wird.

Hierzu führen wir die unschwer zu beweisenden Sätze an:

---

1) Dadurch dürfte zugleich auch dem logischen Bedürfnis, das Herr Pringsheim, Münchener Sitzungsber. 33 (1903) S. 674 geäußert und dann durch den Beweis des Integralsatzes für ein beliebiges Dreieck befriedigt hat, nochmals genügt werden, da man durch Coordinatentransformation eine beliebige Gerade als Coordinatenaxe oder Paralle zu einer solchen wählen kann.

1. Haben $\varphi(uv)$ und $\psi(uv)$ ein vollständiges erstes Differential, so gilt dies auch von den Functionen $\varphi(uv) + \psi(uv)$ und $\varphi(uv) \cdot \psi(uv)$.

2. Haben die Functionen $f(xy)$, $r(uv)$, $s(uv)$ ein vollständiges erstes Differential, so gilt dies auch von der Function $f(r(uv), s(uv))$.

Aus diesen Sätzen und den Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes, zumal aus den Gleichungen $r_{12} = r_{21}$, $s_{12} = s_{21}$, ergiebt sich leicht, daß die Functionen von u, v

$$f(rs)r_1 + g(rs)s_1, \quad f(rs)r_2 + g(rs)s_2$$

im Bereich Γ genau dieselben Eigenschaften besitzen wie $f(xy)$ und $g(xy)$ im Bereich G, daß also das Integral $\Phi(uv)$ nach der Definition II. einen bestimmten Wert hat.

Nun ist nach (4)

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F(r(uv),\ s(uv))}{\partial u} = f(rs)r_1 + g(rs)s_1 = \dfrac{\partial \Phi(uv)}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial F(r(uv),\ s(uv))}{\partial v} = f(rs)r_2 + g(rs)s_2 = \dfrac{\partial \Phi(uv)}{\partial v}, \end{cases}$$

also

$$(10) \qquad F(r(uv),\ s(uv)) \equiv \Phi(uv) + C.$$

Da aber für $u = u_0$, $v = v_0$ sowohl $\Phi(u_0v_0) = 0$ als auch $F(r(u_0v_0), s(u_0v_0)) = F(x_0y_0) = 0$ ist, so ist die Constante $C = 0$ und

$$(11) \qquad F(r(uv),\ s(uv)) \equiv \Phi(uv).$$

Hiermit ist die Richtigkeit der Gleichung (8), die die Transformation des Integrals darstellt, bewiesen.

Bonn, 10. Mai 1904.

Ueber den Begriff der Krümmungslinien.

(Aus einem Briefe an D. Hilbert).

Von

G. Prasad in Allahabad (Indien).

(Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung am 14. Mai 1904).

Vielleicht erinnern Sie sich, daß Sie mir im Juni des letzten Jahres die folgende Aufgabe vorgeschlagen haben:

„Es seien die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes auf einer Fläche x, y, z als Funktionen zweier unabhängiger Variabeln u, v dargestellt und es werde angenommen, daß die zweiten Differentialquotienten, $x_{uu}, x_{uv}, x_{vu}, x_{vv}$, u. s. w., in Bezug auf u, v existiren; genügt diese Annahme, um die Krümmungstheorie zu begründen?" Diese Aufgabe habe ich in einer Weise wenn auch noch nicht zu meiner vollständigen Befriedigung gelöst: die oben aufgeworfene Frage ist zu bejahen. Meine Methode besteht darin, die geometrische Bedeutung der Differentialgleichung

$$(ED' - FD)\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + (ED'' - GD)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + (FD'' - GD')\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0, \quad (1)$$

aufzusuchen. Diese Bedeutung muß natürlich eine Verallgemeinerung der Bedeutung von (1) sein, wenn x, y, z analytische Functionen von u, v sind; ich mache die folgende Aussage:

Sind P, P' zwei Punkte, entsprechend $s, s+s_1$, auf einer Linie, welche durch (1) definirt ist und bedeutet $D(s, s_1)$ den kürzesten Abstand zwischen den Normalen auf der Fläche in P, P', so existirt eine unabzählbare und überall dichte Menge von der Beschaffenheit, daß in jedem Punkte der Menge die Gleichung

$$\lim_{s_1 = +0} \frac{D(s, s_1)}{s_1} = 0$$

gilt, und daß zu jedem Punkte der Menge eine Größe, die gleich

$$\lim_{s_1 = +0} N_s(s, s_1)$$

ist und die ich den Hauptkrümmungsradius entsprechend der Krümmungslinie nenne, gehört; hier bedeutet $N_s(s, s_1)$ die Länge der Normale, in dem Punkte s, zwischen diesem Punkte und dem Punkte, in welchem $D(s, s_1)$ die fragliche Normale schneidet.

Beweis dieser Aussage:

Nach einem bekannten Satze von Baire [1]) bilden die Punkte, für welche der Sprung irgend eines zweiten partiellen Differentialquotient x_{uu}, y_{uu}, z_{uu}, x_{uv} u. s. w. nicht kleiner als oder gleich einem beliebig kleinen positiven σ ist, und, deshalb, auch die Punkte für welche die Sprünge von allen partiellen zweiten Differentialquotienten x_{uu}, y_{uu}, z_{uu}, x_{uv} u. s. w., nicht kleiner als oder gleich einem beliebig kleinen positiven σ sind, eine nirgends dichte und abgeschlossene Menge. Es folgt aus dieser Bemerkung, daß diejenigen Punkte, in denen die zweiten Differentialquotienten x_{uu}, y_{uu}, z_{uu}, x_{uv} u. s. w. alle continuirlich in (u, v) sind, eine unabzählbare und überall dichte Menge bilden. Ich bezeichne diese Menge mit g.

Bezeichnen wir mit $x + x_1$, $y + y_1$, $z + z_1$ die rechtwinkligen Coordinaten von P_1 und mit $X + X_1$, $Y + Y_1$, $Z + Z_1$ die Richtungscosinus der Normale der Fläche in P_1, so ist

$$D(s, s_1) = \frac{x_1(YZ_1 - ZY_1) + y_1(ZX_1 - XZ_1) + z_1(XY_1 - YX_1)}{\{(X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2) - (XX_1 + YY_1 + ZZ_1)^2\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Gehört P zu g, so folgt

$$\lim_{s_1 = +0} \frac{D(s, s_1)}{s_1} = \frac{\frac{dx}{ds}\left(Y\frac{dZ}{ds} - Z\frac{dY}{ds}\right) + \frac{dy}{ds}\left(Z\frac{dX}{ds} - X\frac{dZ}{ds}\right) + \frac{dz}{ds}\left(X\frac{dY}{ds} - Y\frac{dX}{ds}\right)}{\left\{\left(\frac{dX}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dY}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{ds}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Benutzen wir die Thatsache, daß

1) „Sur les fonctions de variables réelles", (Annali di Matematica, Vol. 3, 1899), Kapitel V.

$$x_{uv} = x_{vu},$$
$$y_{uv} = y_{vu},$$
$$z_{uv} = z_{vu},$$

weil die fraglichen Differentialquotienten continuirlich in (u, v) sind [1]), so ist es leicht zu sehen, daß

$$\frac{dx}{ds}\left(Y\frac{dZ}{ds} - Z\frac{dY}{ds}\right) + \frac{dy}{ds}\left(Z\frac{dX}{ds} - X\frac{dZ}{ds}\right) + \frac{dz}{ds}\left(X\frac{dY}{ds} - Y\frac{dX}{ds}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{(ED' - FD)\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + (ED'' - GD)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + (FD'' - GD')\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right\}.$$

Aber die Gleichung (1) gilt in dem Punkte P; also in jedem Punkte von g

$$\lim_{s_1 = +0} \frac{D(s, s_1)}{s_1} = 0.$$

Den zweiten Teil meiner Aussage beweise ich folgendermaßen:
Bezeichnen wir $X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2$ mit $2p$, so ist

$$N_s(s, s_1) = -\frac{(1-p)(X_1x_1 + Y_1y_1 + Z_1z_1) - p(Xx_1 + Yy_1 + Zz_1)}{2p - p^2}.$$

Gehört P zu g, so folgt

$$\lim_{s_1 = +0} N_s(s, s_1) = -\frac{\frac{dx}{ds}\frac{dX}{ds} + \frac{dy}{ds}\frac{dY}{ds} + \frac{dz}{ds}\frac{dZ}{ds}}{\left(\frac{dX}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dY}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{ds}\right)^2}$$
$$= \frac{D\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2D'\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + D''\left(\frac{dv}{ds}\right)^2}{\left\{\Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2\right\}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\left\{\Sigma\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}\right\}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \left\{\Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2\right\}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2}.$$

und ferner folgt leicht durch algebraische Rechnung

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{-2FD' + ED'' + GD}{EG - F^2},$$

---

1) G. Peano, Mathesis, Bd. 10, 1890, S. 153.

$$\frac{1}{r_1 r_2} = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2},$$

wo r_1, r_2 die Hauptkrümmungsradien bedeuten.

Zum Schlusse erlaube ich mir zu bemerken daß ich die Frage nach denjenigen Sätzen, die für analytische Flächen mit Ihren Sätzen [1]) identisch werden, aber die für die allgemeinsten Flächen (d. h. diejenigen zweidimensionalen Continua für welche die Bedingung Ihrer Aufgabe erfüllt wird) gelten, in einer späteren Mitteilung zu diskutieren hoffe.

---

1) „Ueber Flächen von constanter Gaußscher Krümmung", (Trans. Amer. Math. Society, Vol. 2, 1901).

Allahabad, den 14. April 1904.

Versuche über die Entstehung des Banden- und Linienspektrums.

Von

J. Stark.

Mit 4 Textfiguren.

Vorgelegt durch Herrn E. Riecke in der Sitzung vom 11. Juni 1904.

§ 1. **Einleitung.** — In den Annalen der Physik wird von dem Verfasser eine Abhandlung veröffentlicht werden, in der die theoretischen Grundlagen der hier beschriebenen Versuche eingehend dargelegt sind; auch werden dort einige Versuche ausführlicher als hier beschrieben sein. Die vorliegende Mitteilung hat den Zweck, eine kurze Übersicht zu geben über die dort beschriebenen Versuche und über einige weitere.

In der ausführlichen Abhandlung in den Annalen sind in theoretischer Hinsicht folgende Sätze von Wichtigkeit. In den meisten Fällen elektrischen Leuchtens ist der Strahlungserreger der Stoß negativer Elektronionen. Da in elektrisch leuchtenden Gasen die Geschwindigkeitsverteilung in dem Gemisch neutraler Teilchen und elektrisch bewegter Ionen anders ist, als der Voraussetzung des Kirchhoff'schen Gesetzes entspricht, so gilt dieses für das elektrische Leuchten der Gase nicht. Der Träger des Linienspektrums in einem elementaren Gase ist das positive Atomion, der Träger des Bandenspektrums das System positives Restatom-

negatives Elektron, während es in der Umbildung zum neutralen Atom begriffen ist.

§ 2. **Herstellung des Banden- und Linienspektrums beim Quecksilber.** — Aus der obigen Hypothese über das Linien- und Bandenspektrum folgt, daß mit steigender relativer Geschwindigkeit der negativen Elektronionen und der neutralen Gasatome die relative Intensität des Linienspektrums wachsen, diejenige des Bandenspektrums abnehmen muß. Das Bandenspektrum des Quecksilbers erhält man neben dem Linienspektrum in der positiven geschichteten oder ungeschichteten Lichtsäule, wenn man die Stromstärke klein macht, also einen schwachen Glimmstrom anwendet. In dessen negativer Glimmschicht überwiegt aber immer das Linienspektrum, da hier die mittlere Temperatur des Dampfes und auch die Geschwindigkeit der negativen Elektronionen größer ist. Vermehrt man die Stärke des Glimmstromes, so überwiegt auch in seiner positiven Lichtsäule das Linienspektrum mehr und mehr an Intensität, wenigstens in der heißeren Axe der Strombahn. Der Lichtbogen in Quecksilberdampf zeigt entsprechend seiner großen Stromstärke und hohen mittleren Temperatur immer überwiegend das Linienspektrum, sowohl in seiner positiven Lichtsäule als in seinem kathodischen Lichtbüschel.

§ 3. **Überführung leuchtenden Dampfes in ein kräftefreies Ansatzgefäss.** — An die Quecksilberdampfröhre (Fig. 1) war ein 0,5 cm weites, 2 cm langes Röhrchen angesetzt, an diesem war wieder ein 5—6 cm weites, 12 cm langes zylindrisches Rohr angeblasen. Wird die Quecksilberdampfröhre durch den Lichtbogen erwärmt, so wird in ihr der Dampfdruck größer als in dem kälteren Ansatzgefäß; infolge dieses Überdruckes strömt Quecksilberdampf aus der Stromröhre in das kräftefreie Ansatzgefäß. Dieses Überströmen dauert noch eine Zeit lang an, wenn man den Lichtbogen unterbricht und unmittelbar darauf den Glimmstrom von kleiner Stärke in der Quecksilberdampfröhre herstellt; man kann es auch durch sekundäre Erhitzung mittels eines Bunsenbrenners oder einer um die Röhre gelegten Heizspirale dauernd aufrecht erhalten, während der Glimmstrom fließt. Der in das kräftefreie Ansatzgefäß tretende Quecksilberdampfstrahl zeigt nun Leuchten und zwar das Linienspektrum, wenn unter dem Mund des Ansatzgefäßes das

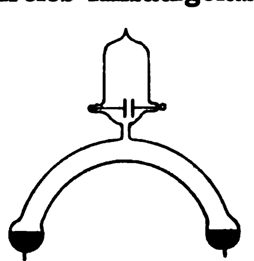


Fig. 1.

Linienspektrum (positive Säule des Lichtbogens, negative Glimmschicht des Glimmstromes) überwiegt, er zeigt auch das Bandenspektrum, wenn unter dem Mund das Bandenspektrum (positive Lichtsäule des schwachen Glimmstromes) in beträchtlicher Stärke vorhanden ist.

In der ausführlichen Abhandlung ist gezeigt, daß das Nachleuchten des Quecksilberdampfstrahles in dem kräftefreien Ansatzgefäß nicht beruht auf einem Abklingen der noch innerhalb der Strombahn erregten Schwingungen emittierender Elektronen, sondern daß im Quecksilberdampfstrahl selbst neue Energie nachgeliefert wird zum Ersatz der ausgestrahlten Energie. Und zwar kommt das Linienspektrum im Quecksilberdampfstrahl dadurch zu stande, daß vorhandene Atomionen infolge der hohen mittleren Temperatur von negativen Elektronionen neu zum Leuchten erregt werden. Das Bandenspektrum im Dampfstrahl bezieht seine Energie aus dem Vorrat potentieller Energie in dem System positives Restatom - negatives Elektron.

§ 4. **Das Linien- und Bandenspektrum im elektrischen Felde.** — Das Linien- und Bandenspektrum des Dampfstrahles im kräftefreien Ansatzgefäß wurden bezüglich der elektrischen Eigenschaften ihrer Träger in folgender Weise untersucht. Im Ansatzgefäß (Fig. 1) waren zwei Plattenelektroden angebracht, mit ihrer Fläche parallel zu einander und parallel zur Richtung des Dampfstrahles. Die eine Elektrode war in den Dampfstrahl selbst hineingestellt. Zwischen die zwei Elektroden wurde elektrische Spannung aus einer wohl isolierten Batterie gelegt. An der Kathode im Ansatzgefäß konnte so ein elektrisches Feld hergestellt werden. Dieses elektrische Feld lenkt das Bandenspektrum des Dampfstrahles oder dessen in seiner Farbe leuchtende Teilchen nicht ab; dagegen wird das Linienspektrum des Dampfstrahles in der Nähe der Kathode durch das elektrische Feld unterdrückt. Zeigt der Dampfstrahl ein Gemisch von Linien- und Bandenspektrum, so wird das letztere von dem ersteren durch das elektrische Feld in der Nähe der Kathode gereinigt.

Nach diesem Versuche ist der Träger und der Erreger des Bandenspektrums elektrisch neutral, dagegen ist der Träger oder der Erreger des Linienspektrums elektrisch geladen. Im Zusammenhalt mit anderen Erscheinungen ist zu schließen, daß das Linienspektrum des Dampfstrahles deswegen beeinflußt wird, weil sein Erreger das negative Elektronion ist; dieses wird von der Kathode weggetrieben.

§ 5. **Abtrennung des Nachleuchtens in Luft.** — In einer zylindrischen 2 cm weiten Röhre (Fig. 2) seien in einem Abstand von 6—10 cm zwei Elektroden einander gegenübergestellt. Innerhalb dieeses Elektrodenabstandes sei, näher der einen Elektrode, zwischen Pumpe und Röhre ein etwa 800 cm³ fassendes Kugelgefäß unter Vermittlung eines 0,5 cm weiten, 1,5 cm langen Röhrchens an die Stromröhre angesetzt. An deren anderem Ende näher der zweiten Elektrode sei ebenfalls ein Röhrchen angesetzt, dieses sei durch einen Hahn gegen eine 0,1 mm weite 5 cm lange Kapillare abzuschließen, die Kapillare erweitere sich an ihrem einen Ende zu einer kleinen Kugel; diese soll durch Vermittlung eines weiteren Hahnes mit verschiedenen Gasen beispielsweise mit atmosphärischer Luft gefüllt werden können. Man kann an dieser Röhre folgenden Versuch ausführen. Man evakuiert die Stromröhre und die mit ihr kommunizierende große Kugel; öffnet man darauf den zur kleinen Kugel führenden Hahn plötzlich, so strömt aus dieser das Gas mit beträchtlicher Geschwindigkeit in die Stromröhre und in die große Kugel, in die letztere strahlartig. Ist während dieser Gasströmung in der Stromröhre die positive Lichtsäule des Glimmstromes in Luft vorhanden, so zeigt der Gasstrahl in der großen Kugel auf 10 cm Länge ein schönes grünlich gelbes Nachleuchten.

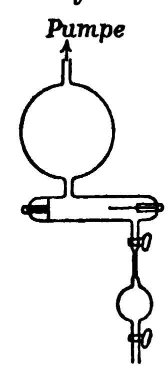


Fig. 2.

§ 6. **Fortführung des Leuchtens in Stickstoff und Wasserstoff.** — In Stickstoff und Wasserstoff und anderen metalloidalen Gasen mag die Umwandlung des Systems positives Restatom-negatives Elektron sehr rasch erfolgen, die Dauer der Emission des Bandenspektrums an dem einzelnen System sehr kurz sein. Um in diesen Fällen ein wahrnehmbares Nachleuchten des Bandenspektrums in einem kräftefreien Ansatzgefäß zu erhalten, hat man nach folgenden Gesichtspunkten vorzugehen. Erstens muß das Leuchten und die Ionisierung in der Strombahn sehr intensiv sein; zweitens muß zwischen dem Gas in der Strombahn und dem Gas in dem Ansatzgefäß momentan ein großer Überdruck hergestellt werden, damit das Gas aus der Strombahn mit Schallgeschwindigkeit in das Ansatzgefäß strömt. Diese Forderungen wurden in folgender Weise erfüllt. Ein 5 cm langes, 5 mm weites Röhrchen (Fig. 3) diente als Strombahn, die eine Elektrode (Alu-

miniumdraht) war an dem einen Ende angebracht, die andere in einem kurzen Ansatzröhrchen so, daß sie eben in das Stromröhrchen hineinragte. Dessen anderes Ende setzte sich in eine 6 cm weite, 25 cm lange Ansatzröhre fort. Der Glimmstrom in der kleinen Stromröhre wurde durch ein großes Induktorium hergestellt, an dessen Pole zwei große Leydener Flaschen geschaltet waren; der Druck des Gases in der Röhre betrug 20—70 mm. Durch

Fig. 3.

diese Versuchsanordnung wurde bewirkt, daß sich in der kleinen Stromröhre ein momentan sehr starker intensiv leuchtender Glimmstrom und infolge der momentanen intensiven Erwärmung ein großer Überdruck gegen das Ansatzgefäß herstellen konnte. War nun das Röhrensystem mit Stickstoff gefüllt, so trat bei jedem Entladungsstoß in das Ansatzgefäß ein diffuser leuchtender Gasstrahl mit der rötlichen Gesamtfarbe des Bandenspektrums von Stickstoff; in der Stromröhre selbst überwog das Linienspektrum. War die Füllung Wasserstoff, so zeigte die Stromröhre die schöne rote Gesamtfarbe des Vierlinienspektrums, der Gassstrahl im Ansatzrohr zeigte die wenig intensive bläuliche Gesamtfarbe des Vielliniensspektrums.

§ 7. **Linienspektrum des Wasserstoffes bei elektrischer Dissoziierung des Wasserdampfes.** — Bei der elektrolytischen Dissoziation des flüssigen Wassers bilden sich positiv geladene Wasserstoffionen und negativ geladene Hydroxylionen. Nach der vom Verfasser vertretenen Theorie der Ionisierung kommt dies dadurch zu stande, daß das Wasserstoffatom dank seiner kleineren Ionenenergie ein negatives Elektron leichter verliert als das Sauerstoffatom. Lassen wir auf dampfförmiges Wasser einen Ionisator beispielsweise schnelle negative Elektronionen wirken, so ist nach der obigen Theorie folgendes zu erwarten. Trifft ein stoßendes Elektronion ein Wassermolekül, so mag es durch direkte Wirkung ein negatives Elektron von einem Wasserstoffatom frei machen und ein Wasserstoffatomion schaffen. Ionisiert es ein Sauerstoffatom, so wird dieses dem benachbarten Wasserstoffatom ein negatives Elektron entreißen zum Ersatz seines eigenen, und so kann bei der Ionisierung durch indirekte Wirkung wiederum ein positives Wasserstoffatomion entstehen. Erstens ist also zu erwarten, daß bei der elektrischen Dissoziierung von Wasserdampf überwiegend positive Wasserstoffatomionen entstehen. Zweitens ist zu erwarten, daß infolge der Gegenwart der neutralen Wassermoleküle die Wiedervereinigung der positiven Wasserstoff-

ionen mit negativen Elektronen geringer ist als in reinem Wasserstoff; die negativen Elektronionen zeigen ja ein intensives Streben sich an Wassermoleküle anzulagern; die große dissoziierende Kraft des Wassers in Lösungen beruht zum Teil auf der großen Kraft zwischen negativem Elektron und neutralem Wassermolekül. In Summa der zwei Momente müssen darum bei der elektrischen Dissoziierung von dampfförmigem Wasser überwiegend positive Wasserstoffionen von längerer Lebensdauer als in reinem Wasserstoff entstehen. Wenn andererseits der Träger des Linienspektrums das positive Atomion ist, so muß bei der elektrischen Dissoziierung von Wasserdampf das Linienspektrum des Wasserstoffes in beträchtlicher Intensität entstehen. Diese Schlußfolgerung veranlaßte folgenden Versuch.

Um die elektrische Dissoziierung durch negative Elektronionen in Wasserdampf allein zu erhalten, darf man den Wasserdampf nicht in ruhendem Zustand der elektrischen Strömung aussetzen; denn sonst bildet sich durch die Wirkung des Stromes aus einem Teil des Wasserdampfes Sauerstoff und Wasserstoff, so daß die Versuchsbedingungen nicht mehr rein sind. Mit Rücksicht hierauf wurde folgende Versuchsanordnung (Fig. 4) getroffen.

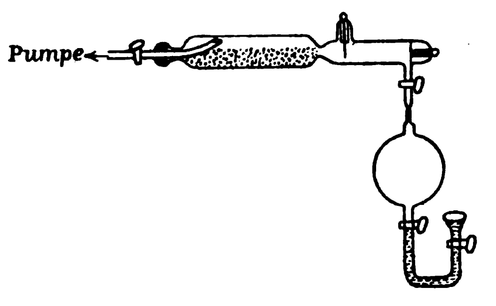


Fig. 4.

In einer 2,5 cm weiten zylindrischen Röhre stand eine Plattenelektrode einer Stiftelektrode in 8 cm Abstand gegenüber; die Röhre setzte sich in eine weitere Röhre fort, die mit Phosphorpentoxyd gefüllt war; letztere konnte durch einen Hahn mit der Luftpumpe in Verbindung gesetzt werden. Unmittelbar an die Stromröhre war ein enges Rohr mit Hahn angekittet. Dieses setzte sich jenseits des Hahnes in eine Kapillare und eine Kugel von 4 cm Durchmesser fort; durch einen zweiten Hahn konnte diese in Verbindung mit dem Wasser zwischen zwei weiteren Hähnen gesetzt werden.

Das Röhrensystem wurde erst durch Auspumpen und Spülen mit Wasserdampf von Luft befreit. Wurde dann ein Glimmstrom

mit der Plattenelektrode als Kathode hergestellt, so zeigte die negative Glimmschicht eine bläuliche Gesamtfarbe und ein ungeheuer linienreiches Spektrum; dieses enthielt in geringer Intensität das Vierlinienspektrum des Wasserstoffes, dessen Viellinienspektrum und in geringer Intensität wahrscheinlich auch Spektren des Sauerstoffes. Wurde aber durch Drehen des obersten Hahnes Wasserdampf eingelassen, so zeigte die negative Glimmschicht die schöne rote Gesamtfarbe des Vierlinienspektrums von Wasserstoff, im Spektroskop war dieses glanzvoll allein entwickelt, andere Linien waren nur als matter Grund wahrnehmbar. Hörte das Einströmen auf, so nahm die negative Glimmschicht schnell wieder die blaue Gesamtfarbe und das linienreiche Spektrum an. Darauf wurde der gebildete Sauerstoff und Wasserstoff fortgepumpt und darnach konnte der Versuch mit dem gleichen Erfolg wiederholt werden. Bemerkt sei, daß bei der angewandten Stärke des Glimmstromes die negative Glimmschicht in reinem Wasserstoff das Viellinienspektrum in beträchtlicher Intensität neben dem Vierlinienspektrum zeigte.

§ 8. **Vorschlag von Versuchen über die relative Leuchtdauer verschiedener Spektrallinien.** — Nach der hier vertretenen Theorie dauert das Leuchten des Systems positives Restatom-negatives Elektron länger an als dasjenige des nach einmaliger Stoßerregung abklingenden positiven Atomions; denn in jenem Fall wird das Leuchten für einige Zeit aus dem Vorrat potentieller Energie des Systems genährt. Nach Unterbrechung des elektrischen Stroms muß darum bei gleicher anfänglicher Intensität das Leuchten des Bandenspektrums länger andauern als das Leuchten des Linienspektrums (vergl. § 6). Außerdem muß auch das Leuchten verschiedener Linien des Bandenspektrums verschieden lange dauern; denn wie in der ausführlichen Abhandlung dargelegt ist, werden die Linien des Bandenspektrums nicht alle gleichzeitig von demselben System positives Restatom-negatives Elektron, sondern zeitlich hinter einander emittiert. Die zuletzt emittierten Linien werden darum eine größere Leuchtdauer besitzen als diejenigen Linien, welche im Anfang der Umbildung des Systems ausgestrahlt werden.

Die relative Leuchtdauer verschiedener Spektrallinien kann auf zweierlei Weise untersucht werden. Erstens kann man das leuchtende Gas aus der Strombahn durch einen Überdruck in ein Ansatzgefäß treiben und die relative Intensität der Linien des leuchtenden Strahles in verschiedenem Abstand von der Strom-

bahn untersuchen. Exakter ist aber folgende Methode. Von der Strombahn wird ein Spektrum auf eine mit großer Geschwindigkeit rotierende photographische Schicht entworfen; in dem Moment, in welchem die photographische Schicht in das Belichtungsfeld des Spektrums tritt, wird die elektrische Strömung unterbrochen, darnach wieder geschlossen u. s. w. Je nach der Lage der Richtung der Spektrallinien zur Rotationsrichtung werden sie verschieden verlängert oder verbreitert erscheinen, verglichen mit der Aufnahme auf der ruhenden photographischen Schicht.

Das Verdienst an dem Zustandekommen der im Vorstehenden beschriebenen Versuche gebührt im Wesentlichen Herrn Geheimrat Riecke, er hat nämlich den Verfasser bei seinen Versuchen von Anfang an bereitwilligst in jeder Weise mit experimentellen Hilfsmitteln unterstützt. Dafür sei ihm auch an dieser Stelle Dank gesagt. Auch Herrn Professor Wiechert ist der Verfasser dafür zu Dank verpflichtet, daß er ihm ein besonders intensitätsstarkes Spektroskop zur Verfügung stellte.

Göttingen, Mai 1904.

Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.

(Zweite Mitteilung).

Von

David Hilbert.

Vorgelegt in der Sitzung vom 25. Juni 1904.

In der ersten Mitteilung habe ich die Theorie der Integralgleichungen zweiter Art, nämlich der Integralgleichungen von der Gestalt

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt$$

behandelt und ich gelangte dabei zu einer Reihe allgemeiner Resultate über die Entwickelung willkürlicher Funktionen nach den zum Kern $K(s, t)$ gehörigen „Eigenfunktionen"; ich behauptete, daß in meinen Resultaten als spezielle Fälle die Entwickelungen nach trigonometrischen, Bessel'schen, nach Kugel-, Lamé'schen und Sturm'schen Funktionen, sowie die Entwickelungen nach denjenigen Funktionen mit mehr Veränderlichen enthalten sind, wie sie zuerst H. Poincaré bei seinen Untersuchungen über gewisse Randwertaufgaben in der Potentialtheorie nachwies. In der vorliegenden zweiten Mitteilung will ich diese Behauptung begründen, indem ich einige Anwendungen meiner Theorie im Gebiete der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen erörtere; dabei werden die schönen und wichtigen Resultate E. Picard's[1]), soweit diese die linearen Differentialgleichungen betreffen, auf das Engste berührt.

1) Vgl. insbesondere Traité d'analyse t. III chap. VI.

VII.

Gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Es sei u eine Funktion der Veränderlichen x, deren zwei erste Ableitungen innerhalb des Intervalles $x = a$ bis $x = b$ sowie an den Grenzen dieses Intervalles stetig sind; ferner sei p irgend eine innerhalb jenes Intervalles nebst der ersten Ableitung stetige Funktion von x, die überdies innerhalb des Intervalles positiv ausfällt; endlich sei q irgend eine innerhalb jenes Intervalles stetige Funktion von x: dann ist der allgemeinste homogene lineare sich selbst adjungirte Differentialausdruck zweiter Ordnung von der Gestalt

$$L(u) \equiv \frac{d\left(p\frac{du}{dx}\right)}{dx} + qu \equiv p\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{dp}{dx}\frac{du}{dx} + qu.$$

Bedeutet v ebenfalls eine Funktion von x mit stetiger erster und zweiter Ableitung, so gilt die sogenannte *Greensche Formel*

$$(1) \qquad \int_a^b \{vL(u) - uL(v)\}\,dx = \left[p\left\{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right\}\right]_a^b.$$

Der Kürze halber benutzen wir folgende Ausdrucksweise: Wenn eine Funktion die erste Ableitung besitzt und diese Ableitung stetig ist, so heiße die Funktion (*einmal*) *stetig differenzirbar* und, wenn auch ihre zweite Ableitung existirt und stetig ist, so heiße sie *zweimal stetig differenzirbar*.

Es sei $\gamma(x, \xi)$ eine Funktion der Variabeln x und des Parameters ξ, die in Bezug auf x zweimal stetig differenzirbar ist und für alle von ξ verschiedenen Werte von x innerhalb des Intervalles a bis b der Differentialgleichung

$$L(u) = 0$$

genügt, die ferner für $x = \xi$ stetig verläuft, während ihre erste Ableitung für $x = \xi$ den Abfall -1 aufweist[1]), so daß

$$\underset{\varepsilon=0}{L}\left[\frac{d\gamma}{dx}\right]_{x=\xi+\varepsilon} - \underset{\varepsilon=0}{L}\left[\frac{d\gamma}{dx}\right]_{x=\xi-\varepsilon} = -1$$

1) Diese Unstetigkeit hat wohl E. Picard (l. c.), den Begriff der Greenschen Funktion einer Veränderlichen dagegen H. Burkhardt zuerst eingeführt, Bull. soc. math. Bd. 22 (1894). Vgl. ferner die Inauguraldissertation von Ch. M. Mason, Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, Göttingen 1903, sowie dessen demnächst in den math. Ann. erscheinede Arbeit „Zur Theorie der Randwertaufgaben."

wird: eine solche Funktion $\gamma(x, \xi)$ werde eine *Grundlösung der Differentialgleichung* $L(u) = 0$ für das Intervall $x = a$ bis $x = b$ genannt.

Sind $u_1(x)$, $u_2(x)$ zwei unabhängige partikuläre Lösungen von $L(u) = 0$, so läßt sich eine Grundlösung offenbar in der Gestalt darstellen

$$\gamma(x, \xi) = -\frac{1}{2}\frac{|x-\xi|}{x-\xi}\,\frac{u_2(\xi)\,u_1(x) - u_1(\xi)\,u_2(x)}{u_2(\xi)\frac{du_1(\xi)}{d\xi} - u_1(\xi)\frac{du_2(\xi)}{d\xi}}.$$

So besitzt beispielsweise die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0$$

die Grundlösung

$$\gamma(x, \xi) = -\tfrac{1}{2}|x-\xi|;$$

ferner besitzen die Differentialgleichungen

$$x\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} = 0,$$

$$(x^2-1)\frac{d^2 u}{dx^2} + 2x\frac{du}{dx} = 0,$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u = 0,$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - u = 0$$

bez. die Grundlösungen

$$\gamma(x, \xi) = -\tfrac{1}{2}\xi\,|lx - l\xi|,$$

$$\gamma(x, \xi) = -\tfrac{1}{2}(1-\xi^2)\left|\,l\left(\frac{1+x}{1-x}\,\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)\right|,$$

$$\gamma(x, \xi) = -\tfrac{1}{2}\sin(|x-\xi|),$$

$$\gamma(x, \xi) = -\tfrac{1}{2}e^{|x-\xi|}.$$

Zu einer vorgelegten Differentialgleichung giebt es offenbar unendlich viele Grundlösungen; diese werden sämtlich aus einer von ihnen erhalten, wenn man derselben ein beliebiges Integral der Differentialgleichung hinzufügt, das an jeder Stelle innerhalb des Intervalles stetig differenzirbar ist. Für unsere weiteren Entwickelungen sind diejenigen Grundlösungen von besonderer Bedeutung, die an den Randpunkten $x = a$ und $x = b$ des Inter-

valles gewisse homogene Bedingungen erfüllen. Die besonders in Betracht kommenden homogenen Randbedingungen sind folgende:

I. $$f(a) = 0, \qquad f(b) = 0;$$

II. $$\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=a} = 0, \qquad \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=b} = 0;$$

III. $$\left[\frac{df(x)}{dx} + hf\right]_{x=a} = 0, \qquad \left[\frac{df(x)}{dx} + kf\right]_{x=b} = 0;$$

IV. $$f(a) = hf(b), \qquad p(a)\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=a} = \frac{p(b)}{h}\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=b};$$

IV*. $$f(a) = hp(b)\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=b}, \qquad p(a)\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=a} = -\frac{1}{h}f(b).$$

Bei der Anwendung dieser Randbedingungen I—IV* ist stets die Annahme zu machen, daß die Funktionen $p(x)$ und $q(x)$ auch in den Randpunkten $x = a$ und $x = b$ stetig sind und ebenda die Funktion $p(x)$ von Null verschieden ausfällt. Ist diese Voraussetzung für einen Randpunkt oder beide Randpunkte nicht erfüllt, so wähle man als Randbedingung eine solche Forderung, durch welche an dem betreffenden Randpunkt ein Integral von $L(u) = 0$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt wird. Die einfachsten in unseren späteren Beispielen zur Anwendung kommenden Randbedingungen dieser Art bestehen für den Randpunkt $x = a$ in einer der Forderungen:

V. $f(x)$ soll bei der Annäherung an den Randpunkt $x = a$ endlich bleiben.

Diese Randbedingung ist zulässig, falls die Differentialgleichung $L(u) = 0$ an der Stelle $x = a$ ein endlich bleibendes Integral besitzt und außerdem die Funktion p in der Nähe von $x = a$ sich in der Gestalt

$$p(x) = (x-a)^s E(x)$$

darstellen läßt, wo s einen Exponenten $\geqq 1$ und $E(x)$ eine für $x = a$ endlich bleibende Funktion bedeutet. In der Tat, bezeichnet u_1 ein endlich bleibendes Integral, so stellen sich die von u_1 unabhängigen Integrale der Differentialgleichung $L(u) = 0$ in der Form

$$u_2 = u_1 \int \frac{dx}{pu_1^2}$$

dar und diese wachsen wegen $s \geqq 1$ gewiß über alle Grenzen; die Bedingung der Endlichkeit bestimmt mithin ein Integral von $L(u) = 0$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig.

V*. *$f(x)$ soll in der Nähe des Randpunktes $x = a$ sich in der Form $(x-a)^r e(x)$ darstellen lassen, wo $e(x)$ eine für $x = a$ endlich bleibende Funktion bedeutet.*

Diese Randbedingung ist zulässig, falls die Differentialgleichung $L(u) = 0$ an der Stelle $x = a$ Integrale von eben jener Form $(x-a)^r e(x)$ besitzt und außerdem die Funktion p in der Nähe von $x = a$ sich in der Gestalt

$$p(x) = (x-a)^s E(x)$$

darstellen läßt, wo s einen Exponenten $\geqq 1-2r$ und $E(x)$ eine für $x = a$ endlich bleibende Funktion bedeutet. Der Beweis dafür, daß unter diesen Umständen die Forderung V* ein Integral von $L(u) = 0$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt, wird leicht, wie im vorigen spezielleren Falle geführt.

Die Randbedingungen I—V (V*) sind stets so zu verstehen, daß $f(x)$ (bez. $e(x)$) in dem betreffenden Randpunkt einmal stetig differenzirbar ist.

Die genannten Randbedingungen können noch in verschiedenster Weise miteinander kombinirt werden.

Eine Grundlösung $g(x, \xi)$ für das Intervall $x = a$ bis $x = b$, die an den Randpunkten zwei homogene Randbedingungen der genannten Art erfüllt, heiße *die zu diesen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion der Differentialgleichung $L(u) = 0$*; ferner heiße der Quotient

$$G(x, \xi) = \frac{g(x, \xi)}{p(\xi)}$$

die zu jenen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(u)$; wir bezeichnen die Greenschen Funktionen je nach den Randbedingungen, zu denen sie gehören, auch als *Greensche Funktionen* G^{I}, G^{II}, G^{III}, G^{IV} oder G^{V}.

Beispielsweise lautet die Greensche Funktion G^{I} für den Differentialausdruck

$$L(u) \equiv \frac{d^2 u}{dx^2},$$

d. h. die zu den Randbedingungen I gehörige Greensche Funktion, für das Intervall 0 bis 1

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= (1-\xi)x, \qquad (x \leqq \xi), \\ &= (1-x)\xi, \qquad (x \geqq \xi). \end{aligned}$$

Noch einfacher wird die Greensche Funktion für jenen Diffe-

rentialausdruck, wenn wir am Randpunkt $x = 0$ die Bedingung I und am Randpunkt $x = 1$ die Bedingung II wählen; sie lautet dann

$$G(x, \xi) = x, \quad (x \leqq \xi),$$
$$= \xi, \quad (x \geqq \xi).$$

Ferner wird die Greensche Funktion G^{I} desselben Differentialausdruckes

$$L(u) \equiv \frac{d^2 u}{dx^2}$$

für das Intervall -1 bis $+1$ durch die Formel

$$G(x, \xi) = -\tfrac{1}{2}\{|x-\xi|+x\xi-1\}$$

dargestellt.

Die Greensche Funktion G^{IV} $(h = -1)$ für denselben Differentialausdruck und das Intervall 0 bis 1, die also den Randbedingungen

$$f(0) = -f(1), \quad \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=0} = -\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=1}$$

genügt, lautet

$$G(x, \xi) = -\tfrac{1}{2}|x-\xi|+\tfrac{1}{4}.$$

Die Greensche Funktion des Differentialausdruckes

$$L(u) \equiv x\frac{d^2 u}{dx^2}+\frac{du}{dx}$$

für das Intervall $x = 0$ bis $x = 1$, die am Randpunkt $x = 0$ der Bedingung V und am Randpunkt $x = 1$ der Bedingung I genügt, lautet:

$$G(x, \xi) = l\xi, \quad (x \leqq \xi),$$
$$= lx, \quad (x \geqq \xi).$$

Ein weiteres sehr interessantes Beispiel liefert der Differentialausdruck:

$$L(u) \equiv \frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{du}{dx}\right\}-\frac{4\alpha^2}{1-x^2}u,$$

wo α irgend eine positive Konstante bedeuten soll; die Greensche Funktion G^{V} für das Intervall $x = -1$ bis $x = +1$ ist:

$$G(x, \xi) = \frac{1}{4\alpha}\left(\frac{1+x}{1-x}\,\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{\alpha}, \quad (x \leqq \xi),$$
$$= \frac{1}{4\alpha}\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\,\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha}, \quad (x \geqq \xi).$$

Für die unendliche Gerade $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ besitzt der Differentialausdruck

$$L(u) \equiv \frac{d^2 u}{dx^2} - u$$

die Greensche Funktion G^{v}

$$G(x, \xi) = \tfrac{1}{2} e^{-|x-\xi|}.$$

Es kann vorkommen, daß für einen Differentialausdruck $L(u)$ bei gewissen Randbedingungen keine Greensche Funktion im eben definirten Sinne vorhanden ist: in diesem Falle existirt, wie später allgemein erkannt wird, eine nicht identisch verschwindende Lösung $\psi^{(0)}(x)$ der Differentialgleichung $L(u) = 0$, die überall innerhalb des Intervalles stetig differenzirbar ist und den betreffenden Randbedingungen genügt; dabei sei der noch willkürliche konstante Faktor so bestimmt, daß

$$\int_a^b (\psi^{(0)}(x))^2 \, dx = 1.$$

wird. Wir construiren dann ein Integral $g(x, \xi)$ der inhomogenen Differentialgleichung

$$L(u) = p(\xi)\, \psi^{(0)}(x)\, \psi^{(0)}(\xi),$$

dessen Ableitung an der Stelle $x = \xi$ den Abfall -1 erfährt, während $g(x, \xi)$ an allen anderen Stellen innerhalb des Intervalles stetig differenzirbar ist, an den Randpunkten die betreffenden Randbedingungen und überdies die Gleichung

$$\int_a^b g(x, \xi)\, \psi^{(0)}(x)\, dx = 0$$

erfüllt; die Funktion

$$G(x, \xi) = \frac{g(x, \xi)}{p(\xi)}$$

genügt der Differentialgleichung

$$L(u) = \psi^{(0)}(x)\, \psi^{(0)}(\xi).$$

Diese Funktionen $g(x, \xi)$ bez. $G(x, \xi)$ leisten die nämlichen Dienste, wie sonst die Greensche Funktion und werden daher in dem vorliegenden besonderen Falle als *Greensche Funktion im erweiterten Sinne* bezeichnet.

Als Beispiel diene der Differentialausdruck

$$L(u) \equiv \frac{d^2 u}{dx^2}$$

mit den Randbedingungen IV ($h = 1$) für das Intervall -1 bis $+1$, so daß die Bedingungen lauten:

$$f(-1) = f(+1), \quad \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=-1} = \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=+1}.$$

In der Tat existiert hier eine von Null verschiedene Lösung der homogenen Differentialgleichung, nämlich $\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, die die Randbedingungen erfüllt, und die Greensche Funktion im eben erklärten erweiterten Sinne wird:

$$G(x, \xi) = -\tfrac{1}{2}|x-\xi| + \tfrac{1}{4}(x-\xi)^2 + \tfrac{1}{6}.$$

Ein ferneres Beispiel für das letztere Vorkommniß liefert der Differentialausdruck

$$L(u) \equiv \frac{d\left\{(1-x^2)\frac{du}{dx}\right\}}{dx}$$

für das Intervall -1 bis $+1$ bei den Randbedingungen V. Auch hier ist $\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und die Greensche Funktion im erweiterten Sinne lautet

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= -\tfrac{1}{2} l \left\{(1-x)(1+\xi)\right\} + c, \qquad (x \leqq \xi), \\ &= -\tfrac{1}{2} l \left\{(1+x)(1-\xi)\right\} + c, \qquad (x \geqq \xi), \end{aligned}$$

wo c den numerischen Wert $l2 - \frac{1}{2}$ bedeutet.

Setzen wir in der Greenschen Formel (1) an Stelle von $u(x)$, $v(x)$ bez. die Funktionen $G(x, \xi)$, $G(x, \xi^*)$ und berücksichtigen die Unstetigkeit der Ableitungen dieser Funktionen an der Stelle $x = \xi$ in gehöriger Weise, indem wir dieselbe in ein kleines Intervall einschließen und dann den Grenzübergang zum verschwindenden Intervall ausführen, so finden wir leicht das *Symmetriegesetz der Greenschen Funktion eines Differentialausdruckes*

$$G(\xi, \xi^*) = G(\xi^*, \xi).$$

In allen oben berechneten Beispielen bestätigt sich dieses Symmetriegesetz.

Bezeichnet $\varphi(x)$ eine gegebene stetige Funktion der Variabeln x und verstehen wir unter f eine überall stetig differenzirbare Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$L(f) = -\varphi(x), \tag{2}$$

die einem Paar unserer Randbedingungen I—V genügt, setzen wir

dann in der Greenschen Formel (1) an Stelle von u diese Lösung f und an Stelle von v die zu jenen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(u)$, so finden wir für jede der fünf Arten von Randbedingungen

$$\int_a^b G(x, \xi)\, L(f(x))\, dx = f(\xi),$$

und hieraus ersehen wir mit Rücksicht auf das Symmetriegesetz der Greenschen Funktion, daß die Lösung $f(x)$ sich folgendermaßen durch ein bestimmtes Integral darstellt:

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi. \tag{3}$$

Daß die so dargestellte Funktion $f(x)$ wirklich den betreffenden Randbedingungen genügt, ist offenbar, weil $G(x, \xi)$ denselben genügt; die durch (3) dargestellte Funktion $f(x)$ genügt aber auch der Differentialgleichung (2), wie durch Rechnung leicht gezeigt wird. Wenn somit eine zweimal stetig differenzirbare und einem Paar unserer Randbedingungen I—V genügende Funktion $f(x)$ und irgend eine stetige Funktion $\varphi(x)$ durch die Relationen (2) miteinander verknüpft sind, so folgt für dieselben notwendig auch die Relation (3) und umgekehrt, wenn für zwei solche Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ die Relation (3) besteht, so folgt für sie notwendig auch die Relation (2). Hieraus entnehmen wir sofort, daß einerseits die Funktion f unter Hinzunahme der betreffenden Randbedingungen durch die Differentialgleichung (2), wobei φ gegeben, und andrerseits die Funktion $\varphi(x)$ durch die Integralgleichung (3), wobei f gegeben, eindeutig bestimmt ist.

Die Gleichung (3) ist eine solche, wie ich sie in meiner ersten Mitteilung als Integralgleichung erster Art bezeichnet habe; $G(x, \xi)$ ist der Kern dieser Integralgleichung und wegen des Symmetriegesetzes eine symmetrische Funktion der Argumente.

Wir fassen die Ergebnisse der vorstehenden Entwickelungen, wie folgt, zusammen:

Satz 11. *Wenn die Greensche Funktion eines Differentialausdruckes $L(u)$ für irgend ein Paar der Randbedingungen* I—V *als Kern einer Integralgleichung erster Art*

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

genommen wird, wo $f(x)$ eine gegebene zweimal stetig differenzirbare Funktion ist, die den betreffenden Randbedingungen genügt, so besitzt diese Integralgleichung eine und nur eine Lösung $\varphi(x)$ und man erhält ihre Lösung durch die Formel

$$\varphi(x) = -L(f(x));$$

umgekehrt, wenn $\varphi(x)$ irgend eine stetige Funktion ist, und eine Lösung $f(x)$ der Differentialgleichung

$$L(f(x)) + \varphi(x) = 0$$

gefunden werden soll, die einem ausgewählten Paar von Randbedingungen I—V *genügt, so ist diese Lösung dadurch eindeutig bestimmt und man erhält sie durch die Formel*

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Aus diesem Satze entnehmen wir leicht, daß die Greensche Funktion $G(x, \xi)$ einen Kern darstellt, der nach der in der ersten Mitteilung eingeführten Ausdrucksweise (S. 73 und S. 75) sowohl abgeschlossen wie auch allgemein ist.

In der Tat, sei $\varphi(x)$ eine solche Funktion, daß

$$\int_a^b G(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

identisch für alle x verschwindet, so müßte die Funktion $f(x) = 0$ der Differentialgleichung $L(f) = -\varphi$ genügen, und hieraus folgt, daß $\varphi(x)$ identisch für alle x verschwindet, d. h. $G(x, \xi)$ ist ein abgeschlossener Kern.

Andrerseits sei $g(x)$ irgend eine stetige Funktion; wir wählen dann eine zweimal stetig differenzirbare und den Randbedingungen genügende Funktion $g^*(x)$ derart, daß

$$\int_a^b (g(x) - g^*(x))^2\,dx$$

kleiner als die beliebig kleine positive Größe ε ausfällt: die stetige Funktion $h(x) = -L(g^*(x))$ erfüllt dann dasjenige Erfordernis, das unserer Definition zufolge einen allgemeinen Kern charakterisirt.

In den vorstehenden Betrachtungen spielte die Integralgleichung erster Art eine wesentliche Rolle; wir werden zu einer Integralgleichung zweiter Art gelangen, wenn wir neben $L(u)$ noch den Differentialausdruck

$$\Delta(u) \equiv L(u) + \lambda u$$

betrachten, wo λ einen Parameter bezeichnet. Es sei wie bisher $G(x, \xi)$ die zu gewissen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion des Ausdruckes $L(u)$, und $\Gamma(x, \xi)$ die zu den nämlichen

Randbedingungen gehörige Greensche Funktion des Ausdruckes $\varDelta(u)$. Sodann wenden wir die Greensche Formel (1) an; nehmen wir

$$u(x) = G(x, \xi), \quad v(x) = \Gamma(x, \xi^*),$$

so erhalten wir

$$(4) \quad \Gamma(\xi, \xi^*) - G(\xi^*, \xi) = \lambda \int_a^b G(x, \xi)\, \Gamma(x, \xi^*)\, dx - \left[p(x) \left\{ \Gamma(x, \xi^*) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} - G(x, \xi) \frac{\partial \Gamma(x, \xi^*)}{\partial x} \right\} \right]_a^b.$$

Wir erörtern zunächst die Randbedingungen I—IV; wenn wir demgemäß die Annahme machen, daß die Funktionen p, q in den Randpunkten sich regulär verhalten und daß überdies p in den Randpunkten von Null verschieden ausfällt, so verhalten sich auch die Integrale der Differentialgleichungen $L(u) = 0$ und $\varDelta(u) = 0$ und somit auch die Funktionen $G(x, \xi)$ und $\Gamma(x, \xi^*)$ in den Randpunkten regulär und wir erkennen hieraus, daß die eckige Klammer auf der rechten Seite der Formel (4) verschwindet.

Nunmehr erörtern wir den Fall, daß für den Randpunkt $x = a$ die Bedingung V bezw. V* gestellt sei; demgemäß nehmen wir an, daß die Differentialgleichungen $L(u) = 0$ und $\varDelta(u) = 0$ je ein partikuläres Integral besitzen, welches in der Nähe des Randpunktes $x = a$ sich in der Form

$$u(x) = (x-a)^r e(x)$$

darstellt, und daß p in der Nähe des Randpunktes $x = a$ von der Form $(x-a)^s E(x)$ sei, wo s einen Exponenten $\geqq 1 - 2r$ bedeutet. Es wird dann

$$\Gamma(x, \xi^*) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} - G(x, \xi) \frac{\partial \Gamma(x, \xi^*)}{\partial x} = (x-a)^{2r} e^*(x)$$

wo e^* wiederum für $x = a$ endlich bleibt und es ist daher gewiß

$$\underset{x=a}{L} \left[p(x) \left\{ \Gamma(x, \xi^*) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} - G(x, \xi) \frac{\partial \Gamma(x, \xi^*)}{\partial x} \right\} \right] = 0.$$

Nehmen wir schließlich, damit das bestimmte Integral in (4) gewiß einen endlichen Wert erhält, den Exponenten $r > -\frac{1}{2}$ an, so erhalten wir in jedem Falle aus (4) die Formel

$$\Gamma(\xi, \xi^*) - G(\xi^*, \xi) = \lambda \int_a^b G(x, \xi)\, \Gamma(x, \xi^*)\, dx$$

oder wenn wir die Buchstaben K, K bez. an Stelle von G, Γ setzen:

$$\mathsf{K}(x, \xi) - K(x, \xi) = \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, \mathsf{K}(x, \xi)\, d\xi.$$

Dabei werde hervorgehoben, daß $K(x, \xi)$ und $\mathsf{K}(x, \xi)$ stetige Funktionen ihrer Argumente sind, außer für die Randbedingung V*; in diesem Falle aber sind wegen unserer Annahme $r > -\frac{1}{2}$ die auftretenden Singularitäten von $K(x, \xi)$ und $\mathsf{K}(x, \xi)$ von niederer als der $\frac{1}{2}^{\text{ten}}$ Ordnung, und daher erscheinen jene Greenschen Funktionen als Kerne von Integralgleichungen zweiter Art unmittelbar zulässig. Die eben erlangte Formel stimmt genau mit derjenigen überein, die wir in der ersten Mitteilung untersucht haben. Wir sprechen somit den Satz aus:

Satz 12. *Wenn die Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(u)$ für irgend ein Paar der Randbedingungen* I—V *als Kern der Integralgleichung zweiter Art*

$$f(x) = \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi \tag{5}$$

genommen wird, so erhält man die lösende Funktion $\mathsf{K}(x, \xi)$ dieser Integralgleichung, indem man die zu den nämlichen Randbedingungen gehörende Greensche Funktion des Differentialausdruckes

$$\varDelta(u) = L(u) + \lambda u$$

bildet.

Da nach Satz 11 die den Randbedingungen genügende Lösung der Differentialgleichung

$$\varDelta(u) + \varphi(x) = 0 \tag{6}$$

unmittelbar aus der Greenschen Funktion des Differentialausdruckes $\varDelta(u)$ gefunden wird, so erweisen sich also im wesentlichen die Integration dieser Differentialgleichung (6) bei gegebenen Randbedingungen und die Lösung jener Integralgleichung (5) zweiter Art als äquivalente Probleme.

Indem wir die in meiner ersten Mitteilung entwickelte Theorie der Integralgleichungen heranziehen, gelangen wir zu einer Reihe bemerkenswerter Resultate über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung und wir erkennen zugleich die Bedeutung, die den Eigenwerten und Eigenfunktionen der Integralgleichung (5) für die lineare Differentialgleichung $\varDelta(u) = 0$ zukommt.

Da die lösende Funktion $\mathsf{K}(x,\xi)$ sich in der Form eines Bruches $\frac{\varDelta(\lambda; x, \xi)}{\delta(\lambda)}$ darstellt, dessen Nenner nur für die Eigenwerte $\lambda = \lambda^{(h)}$ verschwindet, so folgt unter der Voraussetzung, daß der

Differentialausdruck $L(u)$ eine Greensche Funktion für die betreffenden Randbedingungen besitzt, daß es auch stets eine solche für den Differentialausdruck $\Delta(u)$ giebt, es sei denn λ ein Eigenwert $\lambda^{(m)}$ der Integralgleichung (5); in dem letzteren Falle bezeichne $\psi^{(m)}(x)$ eine normirte zum Eigenwert $\lambda^{(m)}$ gehörige Eigenfunktion des Kerns $K(x, \xi)$; dann ist

$$\psi^{(m)}(x) = \lambda^{(m)}\int_a^b K(x, \xi)\,\psi^{(m)}(\xi)\,d\xi,$$

und wegen (S. 223)

$$K(x, \xi) = G(x, \xi)$$

folgt aus Satz 11, daß $\psi^{(m)}(x)$ ein überall innerhalb des Intervalles stetig differenzirbares Integral der homogenen Differentialgleichung

$$L(u) + \lambda^{(m)} u = 0 \tag{7}$$

ist, welches die betreffenden Randbedingungen erfüllt. Umgekehrt, wenn die homogene Differentialgleichung $\Delta(u) = 0$ für den Wert $\lambda = \lambda^{(m)}$ ein Integral besitzt, das die betreffenden Randbedingungen erfüllt, so ist $\lambda^{(m)}$ ein Eigenwert, und das Integral ist eine zugehörige Eigenfunktion für den Kern $K(x, \xi)$; der Differentialausdruck $\Delta(u)$ aber besitzt für diesen Wert $\lambda = \lambda^{(m)}$ keine Greensche Funktion im ursprünglichen engeren Sinne.

Wir bezeichnen den Wert $\lambda^{(m)}$ auch kurz als einen *Eigenwert der Differentialgleichung* $\Delta(u) = 0$ und jene Lösungen $\psi^{(m)}(x)$ auch als *Eigenfunktion dieser Differentialgleichung für die betreffenden Randbedingungen.*

Da die Differentialgleichung (7) überhaupt nur zwei von einander unabhängige Lösungen besitzt, so ist $\lambda^{(m)}$ höchstens ein zweifacher Eigenwert. Ist $\lambda^{(m)}$ ein zweifacher Eigenwert, so müßten sämtliche Integrale der Differentialgleichung (7) die betreffenden Randwertbedingungen erfüllen, und da dies offenbar nur im Falle der Randbedingung IV statthaben kann, so ist in allen anderen Fällen jeder Eigenwert gewiß nur ein einfacher.

Da der Kern $K(x, \xi)$ nach S. 222 ein abgeschlossener ist, so giebt es jedenfalls unendlich viele Eigenwerte der Differentialgleichung $\Delta(u) = 0$. (Vgl. meine erste Mitteilung S. 73—74.) Wegen desselben Umstandes entnehmen wir aus den Sätzen 5 und 6 der ersten Mitteilung die Tatsachen:

Satz 13. *Wenn $h(x)$ eine stetige Funktion von x bezeichnet, so daß für alle Eigenfunktionen $\psi^{(m)}(x)$ der Differentialgleichung $\Delta(u) = 0$ die Gleichung*

$$\int_a^b h(x)\psi^{(m)}(x)\,dx = 0$$

erfüllt ist, so ist $h(x)$ identisch Null.

Satz 14. *Wenn die in Fourierscher Weise gebildete Reihe*

$$c_1\psi^{(1)}(x) + c_2\psi^{(2)}(x) + \cdots,$$

$$c_m = \int_a^b f(x)\psi^{(m)}(x)\,dx$$

gleichmäßig convergirt, so stellt sie die Funktion $f(x)$ dar.

Nach S. 222 ist $K(x, \xi)$ auch ein allgemeiner Kern. Da ferner wegen Satz 11 jede zweimal stetig differenzirbare und den Randbedingungen genügende Funktion $f(x)$ die Darstellung

$$f(x) = \int_a^b K(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi$$

gestattet, sobald man

$$\varphi(x) = -L(f(x))$$

wählt, so folgt aus Satz 7 der ersten Mitteilung das folgende wichtige Resultat:

Satz 15. *Jede zweimal stetig differenzirbare und den betreffenden Randbedingungen genügende Funktion $f(x)$ ist auf die Fouriersche Weise in eine Reihe entwickelbar, die nach den Eigenfunktionen $\psi^{(m)}(x)$ der Differentialgleichung $\Delta(u) = 0$ fortschreitet; diese Reihe convergirt absolut und gleichmäßig.*

Die Sätze 13, 14, 15 schließen einen wesentlichen Teil der in neuerer Zeit insbesondere von W. Stekloff[1]) und A. Kneser[2]) gefundenen Resultate über die Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen in Sturm-Liouvillesche Reihen ein.

Ist statt des Differentialausdruckes $\Delta(u)$ ein Differentialausdruck von der allgemeineren Gestalt

$$L(u) + \lambda k u \equiv \frac{d\left(p\dfrac{du}{dx}\right)}{dx} + (q + \lambda k)u$$

vorgelegt, wo k irgend eine innerhalb des Intervalles positive Funktion von x bedeutet, so setze man

$$u = \frac{v}{\sqrt{k}}$$

---

1) Vgl. z. B. Annales de la faculté des sciences de Toulouse (2) III (1901).

2) Math. Ann. Bd. 58 (1903).

und multipliciere dann den erhaltenen Ausdruck mit $\frac{1}{\sqrt{k}}$; dann entsteht ein Ausdruck von der früheren Gestalt, nämlich

$$\Lambda^*(v) = L^*(v) + \lambda v,$$

wo

$$L^*(v) = \frac{d\left(p^* \frac{dv}{dx}\right)}{dx} + q^* v,$$

$$p^* = \frac{p}{k},$$

$$q^* = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{d}{dx}\left\{p \frac{d\frac{1}{\sqrt{k}}}{dx}\right\} + \frac{q}{k} = \frac{1}{\sqrt{k}} L\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

ist.

Als erstes Beispiel dienen die Differentialausdrücke

$$L(u) = \frac{d^2 u}{dx^2}, \qquad \Lambda(u) = \frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda u,$$

die zur Randbedingung I gehörige Greensche Funktion für den Differentialausdruck $L(u)$ im Intervall $x = 0$ bis $x = 1$ ist bereits oben (S. 217) aufgestellt worden; wir nehmen sie als Kern:

$$\begin{aligned} K(x, \xi) &= (1-\xi)x, \qquad (x \leqq \xi), \\ &= (1-x)\xi, \qquad (x \geqq \xi). \end{aligned}$$

Die zur Randbedingung I gehörige Greensche Funktion für $\Lambda(u)$ in demselben Intervall lautet

$$\begin{aligned} \Gamma(x, \xi) &= \frac{\sin\{\sqrt{\lambda}(1-\xi)\} \cdot \sin(\sqrt{\lambda}\, x)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}}, \qquad (x \leqq \xi), \\ &= \frac{\sin\{\sqrt{\lambda}(1-x)\} \cdot \sin(\sqrt{\lambda}\, \xi)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}}, \qquad (x \geqq \xi). \end{aligned}$$

Nach Satz 12 ist sie zugleich die lösende Funktion für den Kern $K(x, \xi)$ und werde als solche mit $\mathsf{K}(x, \xi)$ bezeichnet. Um die Eigenwerte und Eigenfunktionen der Differentialgleichung $\Lambda(u) = 0$ zu berechnen, setzen wir

$$\Gamma(x, \xi) = \mathsf{K}(x, \xi) = -\frac{\Delta(\lambda; x, \xi)}{\delta(\lambda)}.$$

Hier bestimmen sich Δ als Funktion von λ, x, ξ und δ als Funktion von λ allein eindeutig durch die Forderungen

$$\int_0^1 \Delta(\lambda; x, x)\, dx = \frac{d\delta(\lambda)}{d\lambda} \quad \text{und} \quad \delta(0) = 1,$$

und zwar ergiebt sich

$$\Delta(\lambda;\, x, \xi) = -\frac{\sin\{\sqrt{\lambda}(1-\xi)\}\cdot\sin(\sqrt{\lambda}\,x)}{\lambda}, \qquad (x \leqq \xi),$$

$$= -\frac{\sin\{\sqrt{\lambda}(1-x)\}\cdot\sin(\sqrt{\lambda}\,\xi)}{\lambda}, \qquad (x \geqq \xi),$$

$$\delta(\lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Hieraus folgen die Eigenwerte

$$\lambda^{(1)} = 1^2\pi^2, \quad \lambda^{(2)} = 2^2\pi^2, \quad \lambda^{(3)} = 3^2\pi^2, \quad \ldots$$

und vermöge

$$\lambda^{(m)}\Delta(\lambda^{(m)};\, x, \xi) = \pm\,\varphi^{(m)}(x)\,\varphi^{(m)}(\xi);$$

die bez. zu jenen Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen

$$\sin \pi x, \quad \sin 2\pi x, \quad \sin 3\pi x, \quad \ldots$$

Unser Satz 15 über die Entwicklung nach Eigenfunktionen der Differentialgleichung $\Delta(u) = 0$ läuft auf die Aussage hinaus, daß jede zweimal stetig differenzirbare Funktion von x, die für $x = 0$ und $x = 1$ verschwindet, sich in eine absolut und gleichmäßig convergente Reihe entwickeln läßt, die nach den Sinus der ganzen Vielfachen von πx fortschreitet.

Als weiteres Beispiel wählen wir die Differentialgleichung

$$x\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + \lambda x u = 0$$

und fragen nach den Eigenwerten und Eigenfunktionen derselben für das Intervall $x = 0$ bis $x = 1$, wenn an dem Randpunkte $x = 0$ die Bedingung V und an dem Randpunkte $x = 1$ die Bedingung I erfüllt sein soll. Nach einer früheren Bemerkung (S. 226—227) haben wir die Substitution $u = \frac{v}{\sqrt{x}}$ anzuwenden; wir gewinnen so die Differentialausdrücke

$$L^*(v) = \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{4x^2}v, \qquad \Delta^*(v) \equiv L^*(v) + \lambda v.$$

Die Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L^*(v)$, die in $x = 0$ der Randbedingung V^* ($r = \frac{1}{2}$) und in $x = 1$ der Randbedingung I genügt, lautet:

$$K(x, \xi) = \sqrt{x\xi}\,l(\xi), \qquad (x \leqq \xi),$$

$$= \sqrt{x\xi}\,l(x), \qquad (x \geqq \xi)$$

und die zu den nämlichen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion des Differentialausdruckes $\Delta(v)$ ist, wenn in der üblichen Weise

$$J(x) \quad \text{und} \quad K(x) = J(x)\, lx + P(x)$$

die Besselschen Funktionen erster und zweiter Art bezeichnen:

$$\mathsf{K}(x, \xi) = \sqrt{x\xi}\, \frac{J(x\sqrt{\lambda})\{J(\sqrt{\lambda})K(\xi\sqrt{\lambda}) - J(\xi\sqrt{\lambda})K(\sqrt{\lambda})\}}{J(\sqrt{\lambda})}, \quad (x \leqq \xi),$$

$$= \sqrt{x\xi}\, \frac{J(\xi\sqrt{\lambda})\{J(\sqrt{\lambda})K(x\sqrt{\lambda}) - J(x\sqrt{\lambda})K(\sqrt{\lambda})\}}{J(\sqrt{\lambda})}, \quad (x \geqq \xi).$$

Diese Funktion $\mathsf{K}(x, \xi)$ ist mithin nach Satz 12 die lösende Funktion des Kerns K und wir finden hieraus

$$\delta(\lambda) = J(\sqrt{\lambda});$$

mithin sind die Nullstellen $\lambda^{(m)}$ von $J(\sqrt{\lambda})$ die gesuchten Eigenwerte und, wenn man diese für λ in den Zähler des Ausdruckes für $\mathsf{K}(x, \xi)$ einführt, so ergeben sich die zugehörigen Eigenfunktionen

$$\varphi^{(m)}(x) = \sqrt{x}\, J(x\sqrt{\lambda^{(m)}}).$$

Unser Satz über die Entwickelung nach Eigenfunktionen des Differentialausdruckes $\Delta(u)$ läuft, wenn wir nachträglich die zu entwickelnde Funktion durch $\sqrt{x}$ dividiren und den Faktor $\sqrt{x}$ ebenfalls in allen Eigenfunktionen fortlassen, auf die Aussage hinaus, daß im Intervalle 0 bis 1 jede zweimal stetig differenzirbare Funktion von x, die für $x = 1$ verschwindet, sich in eine absolut und gleichmäßig convergente Reihe entwickeln läßt, die nach den Besselschen Funktionen $J(x\sqrt{\lambda^{(m)}})$ fortschreitet[1].

Weitere interessante Beispiele für unsere Theorie erhalten wir, wenn wir die Differentialgleichungen der Zylinder- und Kugelfunktionen höherer Art heranziehen; so führt die früher (S. 218) aufgestellte Greensche Funktion:

$$G(x, \xi) = \frac{1}{4\alpha}\left(\frac{1+x}{1-x}\,\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{\alpha}, \qquad (x \leqq \xi),$$

$$= \frac{1}{4\alpha}\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\,\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha}, \qquad (x \geqq \xi)$$

---

1) Neuerdings hat A. Kneser die Entwickelbarkeit einer willkürlichen Funktion nach Besselschen Funktionen nach einer Methode bewiesen, die derjenigen analog ist, wie er sie in der oben genannten Abhandlung auf die Sturm-Liouvilleschen Reihen angewandt hat. Archiv der Math. und Phys. 1903.

zu der neuen Definition der Kugelfunktion $P_a^{(m)}$

$$P_a^{(m)}(x) = \lambda^{(m)} \int_{-1}^{+1} G(x, \xi)\, P_a^{(m)}(\xi)\, d\xi,$$

und zu der Tatsache der Entwickelbarkeit einer jeden zweimal stetig differenzirbaren Funktion in eine Reihe, die nach den Kugelfunktionen $P_a^{(m)}$ fortschreitet.

Tritt der oben (S. 219) behandelte besondere Fall ein, daß zum Differentialausdruck L bei den betreffenden Randbedingungen eine Greensche Funktion im engeren Sinne nicht existirt, so gelten unsere Entwickelungen für die Greensche Funktion in dem dort erklärten erweiterten Sinne. Bezeichnet nämlich wie oben $\psi^{(0)}(x)$ die alsdann vorhandene den Randbedingungen genügende überall stetig differenzirbare Lösung der Gleichung $L(u) = 0$, so ergiebt sich durch Anwendung der Greenschen Formel (1) an Stelle des Satzes 11 leicht die folgende Tatsache:

Satz 16. *Wenn f eine zweimal stetig differenzirbare, den Randbedingungen und der Bedingung*

$$\int_a^b f(x)\, \psi^{(0)}(x)\, dx = 0$$

genügende Funktion bedeutet, so ist die Integralgleichung erster Art

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

lösbar und ihre Lösung gewinnt man durch die Formel

$$\varphi(x) = -L(f(x)).$$

Diesem Satze 16 entsprechend müssen wir auch in den Voraussetzungen des Satzes 15 über die Entwickelbarkeit nach Eigenfunktionen der Differentialgleichung $\Lambda(u) = 0$ für die zu entwickelnde Funktion $f(x)$ die Bedingung

$$\int_a^b f(x)\, \psi^{(0)}(x)\, dx = 0$$

hinzufügen; lassen wir jedoch im vorliegenden Falle $\lambda = 0$ als Eigenwert und die Funktion $\psi^{(0)}(x)$ als zugehörige Eigenfunktion gelten, so bleibt unser früherer Satz 15 auch bei unverändertem Wortlaut gültig.

Als einfachstes Beispiel für das zuletzt behandelte Vorkomniß dienen die Differentialausdrücke

$$L(u) = \frac{d^2u}{dx^2}, \qquad \Lambda(u) = \frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u.$$

Wenn wir die Randbedingungen IV ($h = 1$) für das Intervall -1 bis $+1$ wählen, nämlich

$$f(+1) = f(-1), \qquad f'(+1) = f'(-1),$$

dann wird $\psi^{(0)}(x) = 1$ und der Ausdruck der Greenschen Funktion im weiteren Sinne ist bereits oben (S. 220) angegeben worden. Wir erhalten dieselben Eigenwerte wie im ersten Beispiel (S. 227—228); jedoch ist jeder dieser Eigenwerte zweifach: allgemein gehören zu $\lambda^{(m)} = m^2\pi^2$ die zwei Eigenfunktionen $\sin m\pi x$, $\cos m\pi x$. Zu diesen kommt, den letzten Ausführungen entsprechend, $\lambda = 0$ als einfacher Eigenwert der Differentialgleichung $\Lambda(u) = 0$ mit der zugehörigen Eigenfunktion $\psi^{(0)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ hinzu.

Als zweites Beispiel für das in Rede stehende besondere Vorkomniß mögen die Differentialausdrücke

$$L(u) = \frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{du}{dx}\right\}, \qquad \Lambda(u) = \frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{du}{dx}\right\} + \lambda u$$

mit den Randbedingungen V für das Intervall -1 bis $+1$ dienen. Wir haben bereits oben (S. 220) für $L(u)$ die Greensche Funktion $G(x, \xi)$ im erweiterten Sinne aufgestellt. Da die Legendreschen Polynome $P^{(m)}$ ($m = 0, 1, 2, 3, \ldots$) die Differentialgleichungen

$$L(u) + m(m+1)u = 0$$

erfüllen und an den Randpunkten endlich bleiben, so sind sie die zu den Eigenwerten

$$\lambda^{(m)} = m(m+1)$$

gehörigen Eigenfunktionen; die so entstehende neue Definition für die Kugelfunktion $P^{(m)}$:

$$P^{(m)}(x) = \lambda^{(m)}\int_{-1}^{+1} G(x, \xi)\, P^{(m)}(\xi)\, d\xi \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

oder einfacher:

$$P^{(m)}(x) = \lambda^{(m)}\int_{-1}^{+1} G^*(x, \xi)\, P^{(m)}(\xi)\, d\xi \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

wo

$$\begin{aligned} G^*(x, \xi) &= -\tfrac{1}{2}\, l\{(1-x)(1+\xi)\}, \qquad (x \leqq \xi),\\ &= -\tfrac{1}{2}\, l\{(1+x)(1-\xi)\}, \qquad (x \geqq \xi) \end{aligned}$$

ist, kann als Grundlage für die Theorie der Kugelfunktionen dienen. Unser soeben verallgemeinerter Satz 15 liefert die Entwickelung einer beliebigen zweimal stetig differenzirbaren und an den Rand-

punkten $+1$, -1 endlich bleibenden Funktion nach Legendreschen Polynomen.

Wir haben im Vorstehenden den engen Zusammenhang zwischen der Theorie des Differentialausdruckes

$$\varDelta(u) \equiv L(u) + \lambda u$$

und der Theorie der Integralgleichung zweiter Art mit dem Kern $K(x, \xi)$ kennen gelernt. Dieser enge Zusammenhang zeigte sich am klarsten in der Uebereinstimmung der Eigenfunktionen der Differentialgleichung $\varDelta(u) = 0$ mit denjenigen jener Integralgleichung.

Nun erscheint bekanntlich die Differentialgleichung $\varDelta(u) = 0$, wenn man nach den Regeln der Variationsrechnung das folgende (Dirichletsche) Variationsproblem löst: man soll eine den Randbedingungen I genügende Funktion u von x derart bestimmen, daß das Integral

$$D(u) = \int_a^b \left\{ p\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - qu^2 \right\} dx \tag{8}$$

zu einem Minimum wird, während die Nebenbedingung

$$\int_a^b u^2\, dx = 1 \tag{9}$$

erfüllt ist. Andererseits haben wir in der ersten Mitteilung allgemein erkannt, wie durch meine Theorie der Integralgleichungen zweiter Art das folgende (Gaußsche) Variationsproblem gelöst wird: es ist ein definiter Kern gegeben; man soll diejenige Funktion $\omega(x)$ finden, für welche das Integral

$$J(\omega) = \int_a^b \int_a^b K(x, \xi)\, \omega(x)\, \omega(\xi)\, dx\, d\xi \tag{10}$$

seinen größten Wert besitzt, während die Nebenbedingung

$$\int_a^b (\omega(x))^2\, dx = 1 \tag{11}$$

erfüllt ist.

Wir wollen den engen Zusammenhang zwischen diesen beiden Variationsproblemen kurz darlegen. Zu dem Zwecke bestimmen wir zunächst eine Constante c derart, daß für alle Punkte x, y innerhalb J

$$c - q \geqq 0$$

ausfällt. Denken wir uns dann in (8) an Stelle von $-q$ die Funktion $c - q$ eingesetzt, so unterscheidet sich das Variationsproblem, das so modificirte Integral bei der Nebenbedingung (9) zum Mini-

mum zu machen, in Nichts von dem ursprünglichen Variationsproblem; d. h. wir dürfen in unserem ersten Variationsproblem von vorneherein $-q \geqq 0$ annehmen, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen.

Nunmehr setzen wir zwischen irgend zwei Funktionen u und ω, mit denen wir die Integrale (8) bez. (10) bilden, die Beziehung

$$L(u(x)) = -\omega(x) \tag{12}$$

fest. Bedenken wir, daß

$$G(x, \xi) = K(x, \xi)$$

die Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(u)$ ist, so folgt nach Satz 11 aus (12)

$$u(x) = \int_a^b K(x, \xi)\,\omega(\xi)\,d\xi, \tag{13}$$

und hieraus entnehmen wir wegen (10), (12) und (13), da

$$D(u) = -\int_a^b u L(u)\,dx$$

ist, die Gleichung

$$D(u) = J(\omega).$$

Wegen $-q \geqq 0$ ist $D(u)$ nur positiver Werte fähig; mithin ist $K(x, \xi)$ ein definiter Kern und seine Eigenwerte $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}, \ldots$ sind sämmtlich positiv (vgl. meine erste Mitteilung S. 79). Machen wir nun für die willkürliche Funktion ω den Ansatz

$$\omega(x) = c_1 \psi^{(1)}(x) + c_2 \psi^{(2)}(x) + \cdots,$$

wo $\psi^{(1)}(x), \psi^{(2)}(x), \psi^{(3)}(x), \ldots$ die normirten Eigenfunktionen des Kerns $K(x, \xi)$ bezeichnen, und berücksichtigen wir die Gleichung

$$\int_a^b K(x, \xi)\,\psi^{(m)}(\xi)\,d\xi = \frac{1}{\lambda^{(m)}}\,\psi^{(m)}(x)$$

so erhalten wir aus (13)

$$u(x) = \frac{c_1}{\lambda^{(1)}}\,\psi^{(1)}(x) + \frac{c_2}{\lambda^{(2)}}\,\psi^{(2)}(x) + \cdots$$

und folglich

$$\int_a^b (u(x))^2\,dx = \frac{c_1^2}{(\lambda^{(1)})^2} + \frac{c_2^2}{(\lambda^{(2)})^2} + \cdots.$$

Andererseits ist wegen (10)

$$J(\omega) = \frac{c_1^2}{\lambda^{(1)}} + \frac{c_2^2}{\lambda^{(2)}} + \cdots$$

Nunmehr wird die Reihe rechter Hand, wenn wir die Nebenbedingung (9)

$$\frac{c_1^2}{(\lambda^{(1)})^2}+\frac{c_2^2}{(\lambda^{(2)})^2}+\cdots = 1$$

stellen, ihren Minimalwert für

$$c_1 = \lambda^{(1)},\quad c_2 = 0,\quad c_3 = 0,\quad \ldots$$

und, wenn wir die Nebenbedingung (11)

$$c_1^2+c_2^2+\cdots = 1$$

stellen, ihren Maximalwert für

$$c_1 = 1,\quad c_2 = 0,\quad c_3 = 0,\quad \ldots$$

erhalten, wobei $\lambda^{(1)}$ den kleinsten Eigenwert bedeutet. Demnach werden

$$u(x) = \psi^{(1)}(x) \quad \text{und} \quad \omega(x) = \psi^{(1)}(x)$$

die gesuchten Lösungen der beiden Variationsprobleme.

Wir sehen also, daß vermöge der Transformation (12) oder (13) das Integral (8) in das Integral (10) übergeht, dagegen nicht zugleich die Nebenbedingung (9) in die Nebenbedingung (11). Wollen wir letztere Nebenbedingung erhalten, so müssen wir vielmehr in dem ersten Variationsproblem an Stelle von (9) die Nebenbedingung

$$\int_a^b (L(u))^2\,dx = 1$$

wählen; in der Tat überzeugt man sich leicht, daß die daraus nach den Regeln der Variationsrechnung entspringende Differentialgleichung wiederum keine andere als $\varDelta(u) = 0$ wird. Das letztgenannte Variationsproblem erscheint in diesem Sinne mit dem erstgenannten Variationsprobleme aequivalent.

VIII.

Sich selbst adjungirte partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung von elliptischem Typus.

Die in Abschnitt VII entwickelte Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung läßt sich vollkommen auf die sich selbst adjungirten partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung von elliptischem Typus übertragen, da ja, wie ich in der Einleitung meiner ersten Mitteilung bemerkt habe, meine Methoden und Resultate über die Integralgleichungen auch gültig

sind, wenn in denselben an Stelle der einfachen Integrale mehrfache Integrale stehen und dementsprechend der Kern K eine symmetrische Funktion zweier Reihen von Variabeln bedeutet.

In der xy-Ebene sei eine geschlossene Curve C durch die Gleichungen

$$x = a(s), \qquad y = b(s)$$

gegeben, wo $a(s)$, $b(s)$ stetige Funktionen der Bogenlänge s sind, deren Ableitungen — von einer endlichen Anzahl von Werten s abgesehen — ebenfalls stetig ausfallen. Das von dieser Curve C umschlossene endliche Gebiet der xy-Ebene werde mit J bezeichnet, die Curve C heiße die Randcurve des Gebietes J. Der allgemeinste homogene lineare sich selbst adjungirte partielle Differentialausdruck zweiter Ordnung von elliptischem Typus kann stets auf die Form

$$L(u) \equiv \frac{\partial p \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial p \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial y} + qu$$

$$\equiv p\Delta u + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + qu$$

gebracht werden. Wir machen über die in $L(u)$ auftretenden Funktionen folgende Annahmen. Es sei u eine Funktion der Veränderlichen x, y, deren zwei erste Ableitungen innerhalb des Gebietes J, sowie an der Randcurve C stetig sind; ferner sei p irgend eine innerhalb jenes Gebietes einmal nach x sowie nach y stetig differenzirbare Funktion von x, y, die überdies innerhalb J positiv ausfällt; endlich sei q irgend eine innerhalb J stetige Funktion von x, y.

Bedeutet v ebenfalls wie u eine zweimal stetig differenzirbare Funktion von x, y, so gilt die sogenannte *Greensche Formel*

$$(14) \qquad \int_{(J)} \{vL(u) - uL(v)\}\, dJ = \int_{(C)} p\left\{u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right\} ds;$$

darin ist das Integral links über das Gebiet J, das Integral rechts über die Randcurve C zu erstrecken und $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\frac{\partial v}{\partial n}$ bedeuten die Ableitungen nach der ins Innere gerichteten Normale der Randcurve C; dJ bedeutet das Flächenelement von J, und ds das Längenelement von C.

Es seien γ_1, γ_2 solche Funktionen der Variabeln x, y und der Parameter ξ, η, die innerhalb J und auf der Randcurve C in Bezug auf x, y zweimal stetig differenzirbar und von der Art sind, daß

der Ausdruck

$$\gamma(xy,\xi\eta) = -\gamma_1 l(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2})+\gamma_2,$$
$$= \gamma_1 l\frac{1}{\varrho}+\gamma_2 \qquad (\varrho = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2})$$

in Bezug auf das Variabelnpaar x, y — wenn nicht gerade $x = \xi$, $y = \eta$ wird — der Differentialgleichung

$$L(u) = 0$$

genügt; außerdem sei identisch für alle ξ, η

$$\gamma_1(\xi\eta,\xi\eta) = 1.$$

Ein solcher Ausdruck $\gamma(xy,\xi\eta)$ werde eine *Grundlösung der Differentialgleichung* $L(u) = 0$ *für das Gebiet* J genannt[1]).

So besitzt $\varDelta(u) = 0$ die Grundlösung $-l(\varrho)$ und für die Differentialgleichung $\varDelta(u)+u = 0$ ist $-K(\varrho)$ eine Grundlösung, wenn K die bereits oben (S. 229) benutzte Besselsche Funktion zweiter Art bedeutet.

Setzen wir in der Greenschen Formel (14) für u irgend eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$L(u(xy)) = -2\pi\varphi(xy)$$

und an Stelle von v eine Grundlösung $\gamma(xy,\xi\eta)$ ein, wobei ξ, η einen festen Punkt innerhalb J darstellt, so ergiebt sich die Formel

$$(15)\quad u(\xi\eta) = \frac{1}{p(\xi\eta)}\int_{(J)}\gamma(xy,\xi\eta)\,\varphi(xy)\,dJ$$
$$+\frac{1}{2\pi p(\xi\eta)}\int_{(C)}\left[p(xy)\left\{u(xy)\frac{\partial\gamma(xy,\xi\eta)}{\partial n}-\frac{\partial u(xy)}{\partial n}\gamma(xy,\xi\eta)\right\}\right]_{\substack{x=a(s)\\ y=b(s)}} ds.$$

Zu einer vorgelegten Differentialgleichung $L(u) = 0$ werden offenbar aus einer Grundlösung unendlich viele erhalten, wenn man ein beliebiges Integral von $L(u) = 0$ hinzufügt, das an jeder Stelle innerhalb J stetig ist. Für unsere weiteren Entwickelungen sind diejenigen Grundlösungen von besonderer Bedeutung, die an der Randcurve C gewisse homogene Randbedingungen erfüllen und zwar kommen dabei insbesondere diejenigen Randbedingungen in Betracht, die den Randbedingungen I—V* (S. 216) in der Theorie

1) Dieser Begriff der Grundlösung ist zuerst von A. Sommerfeld eingeführt worden, vergl. Mathematische Encyklopädie Bd. II, S. 515. Hinsichtlich ihrer Existenz vgl. E. Holmgren, Math. Ann. Bd. 58 S. 404.

der gewöhnlichen Differentialgleichungen entsprechen. Wir heben hier nur folgende drei Arten von Randbedingungen für eine Funktion $f(xy)$ hervor:

I. $f(xy) = 0$ für alle Punkte x, y der Randkurve C.

II. $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$ „ „ „ „ „ „ „

III. $\frac{\partial f}{\partial n} + hf = 0$ „ „ „ „ „ „ „

IV. $[f(xy)]_s = [f(xy)]_{s+\frac{l}{2}}$, $\left[\frac{\partial f}{\partial n}\right]_s = -\left[\frac{\partial f}{\partial n}\right]_{s+\frac{l}{2}}$ für alle s;

dabei bedeutet der Parameter s die Bogenlänge der Randcurve C von einem festen Punkte $s = 0$ an bis zu einem beliebigen Punkte derselben gerechnet, während l die Gesammtlänge der Randcurve C bezeichnet.

V. Ist die Randcurve C singuläre Linie (Nulllinie von p) der Differentialgleichung $L(u) = 0$ von gewisser Art, so ist als Randbedingung die Forderung zulässig: es soll $f(xy)$ bei der Annäherung an die Randcurve endlich bleiben.

V*. Wird die bisherige Betrachtungsweise in der Weise verallgemeinert, daß an Stelle der xy-Ebene eine beliebige geschlossene singularitätenfreie Fläche tritt (vgl. diese Mitteilung S. 241), so kann die Randbedingung für $f(xy)$ durch die Forderung ersetzt werden, daß die Funktion $f(xy)$ sich überall auf der Fläche regulär verhalten soll.

Diese Randbedingungen können noch in verschiedenster Weise miteinander kombinirt werden derart, daß auf einem Teile der Randcurve C die eine, auf einem anderen Teile eine andere Randbedingung erfüllt ist.

Eine Grundlösung $g(xy, \xi\eta)$ für das Gebiet J, die als Funktion von x, y an der Randcurve C eine homogene Randbedingung der genannten Arten erfüllt, heißt *die zu dieser Randbedingung gehörige Greensche Funktion der Differentialgleichung* $L(u) = 0$; ferner heiße der Quotient

$$G(xy, \xi\eta) = \frac{g(xy, \xi\eta)}{p(\xi\eta)},$$

die zu jener Randbedingung gehörige Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(u)$.

Wenn für einen Differentialausdruck $L(u)$ keine Greensche Funktion im eben definirten Sinne existirt, so verfahren wir genau analog, wie in dem entsprechenden Falle in der Theorie der ge-

wöhnlichen Differentialgleichungen (S. 219): ist dann nämlich $\psi^{(0)}(xy)$ eine von Null verschiedene überall stetige Lösung der Differentialgleichung $L(u) = 0$, die die betreffende Randbedingung, sowie die Relation

$$\int_{(J)} (\psi^{(0)}(xy))^2 dJ = 1$$

erfüllt, so konstruiren wir eine Lösung $g(xy, \xi\eta)$ der inhomogenen Differentialgleichung

$$L(u) = 2\pi p(\xi\eta)\psi^{(0)}(xy)\psi^{(0)}(\xi\eta),$$

die an der Stelle $x = \xi$, $y = \eta$ in derselben Weise wie eine Grundlösung logarithmisch unendlich wird, auf C die betreffende Randbedingung und überdies die Gleichung

$$\int_{(J)} g(xy, \xi\eta)\psi^{(0)}(xy)\,dJ = 0$$

erfüllt. Die Funktion

$$G(xy, \xi\eta) = \frac{g(xy, \xi\eta)}{p(\xi\eta)}$$

genügt der Differentialgleichung

$$L(u) = 2\pi\psi^{(0)}(xy)\psi^{(0)}(\xi\eta).$$

Die Funktionen $g(xy, \xi\eta)$, $G(xy, \xi\eta)$ werden als Greensche Funktionen im erweiterten Sinne bezeichnet. Man sieht leicht ein, wie die Definition der Greenschen Funktion weiter zu verallgemeinern ist, wenn auch im eben definirten Sinne eine Greensche Funktion nicht existirt, und daß dann eine solche stets existiren muß.

Wie oben (S. 220) gewinnen wir leicht das Symmetriegesetz der Greenschen Funktion eines Differentialausdruckes

$$G(\xi\eta, \xi^*\eta^*) = G(\xi^*\eta^*, \xi\eta)$$

und sodann unter Heranziehung der Formel (15) die folgende Tatsache:

Satz 17. *Wenn die Greensche Funktion eines Differentialausdruckes $L(u)$ für eine gewisse Randbedingung als Kern einer Integralgleichung erster Art*

$$f(xy) = \int_{(J)} G(xy, \xi\eta)\varphi(\xi\eta)\,dJ$$

genommen wird, wo $f(xy)$ eine gegebene zweimal stetig differenzirbare jener Randbedingung genügende Funktion ist, so besitzt diese Integralgleichung eine und nur eine Lösung $\varphi(xy)$, und man erhält diese Lösung durch die Formel

$$\varphi(xy) = -\frac{1}{2\pi} L(f(xy));$$

umgekehrt, wenn $\varphi(xy)$ irgend eine stetige Funktion ist und eine Lösung der Differentialgleichung

$$L(f(xy)) + 2\pi\varphi(xy) = 0$$

gefunden werden soll, die der gewählten Randbedingung genügt, so ist diese Lösung dadurch eindeutig bestimmt und man erhält sie durch die Formel

$$f(xy) = \int_{(J)} G(xy, \xi\eta)\,\varphi(\xi\eta)\,dJ.$$

Aus diesem Satze entnehmen wir leicht wie oben (S. 222), daß die Greensche Funktion $G(xy, \xi\eta)$ einen Kern darstellt, der nach der in der ersten Mitteilung eingeführten Ausdrucksweise (S. 73 und 75) sowohl abgeschlossen als auch allgemein ist.

Nunmehr gehen wir zur Behandlung des Differentialausdruckes

$$\varDelta(u) \equiv L(u) + \lambda u$$

über und erhalten genau wie oben (S. 222—224) durch die analogen Schlüsse der Reihe nach folgende Sätze:

Satz 18. *Wenn die Greensche Funktion eines Differentialausdruckes $L(u)$ für eine gewisse Randbedingung als Kern der Integralgleichung zweiter Art*

$$(16) \qquad f(xy) = \varphi(xy) - \lambda \int_{(J)} K(xy, \xi\eta)\,\varphi(\xi\eta)\,dJ$$

genommen wird, so erhält man die lösende Funktion $\mathsf{K}(xy, \xi\eta)$ dieser Integralgleichung, indem man die zu der nämlichen Randbedingung gehörende Greensche Funktion des Differentialausdruckes

$$\varDelta(u) \equiv L(u) + \lambda u$$

bildet.

Wir bezeichnen die Eigenwerte $\lambda^{(m)}$ und Eigenfunktionen $\psi^{(m)}(xy)$ der Integralgleichung zweiter Art (16) auch als *die Eigenwerte* bez. *Eigenfunktionen der Differentialgleichung $\varDelta(u) = 0$ für die betreffende Randbedingung*[1]).

1) Die Eigenfunktionen der Differentialgleichung $\varDelta u + \lambda u = 0$ hat H. Poincaré entdeckt und als „fonctions harmoniques" bezeichnet. Seit dem Erscheinen seiner grundlegenden Abhandlung „Sur les équations de la physique mathématique, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo (1894) haben sich zahlreiche Forscher mit dem Beweise für die Existenz jener fonctions harmoniques und mit dem Problem der Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen nach denselben erfolgreich beschäftigt: ich nenne nur Le Roy (Annales de l'École normale supérieure 1898), W. Stekloff (Annales de la faculté de Toulouse 1900, S. Zaremba (Annales de l'École normale supérieure 1899, Journ. de Math. 1900), A. Korn (Abhandlungen zur Potentialtheorie 4. Berlin 1902). Wie mir scheint, umschließen meine im Folgenden gewonnenen allgemeinen Sätze die wesentlichen Resultate der genannten Forscher.

Satz 19. *Wenn $h(xy)$ eine stetige Funktion von x, y bezeichnet, so daß für alle Eigenfunktionen $\psi^{(m)}(xy)$ der Differentialgleichung $\Delta(u) = 0$ die Gleichung*

$$\int_{(J)} h(xy)\,\psi^{(m)}(xy)\,dJ = 0$$

erfüllt ist, so ist $h(xy)$ identisch 0.

Satz 20. *Wenn die in Fourierscher Weise gebildete Reihe*

$$c_1\psi^{(1)}(xy) + c_2\psi^{(2)}(xy) + \cdots,$$
$$c_m = \int_{(J)} f(xy)\,\psi^{(m)}(xy)\,dJ$$

gleichmäßig convergirt, so stellt sie die Funktion $f(xy)$ dar.

Satz 21. *Jede zweimal stetig differenzirbare und den betreffenden Randbedingungen genügende Funktion $f(xy)$ ist auf die Fouriersche Weise in eine Reihe entwickelbar, die nach den Eigenfunktionen $\psi^{(m)}(xy)$ der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ fortschreitet; diese Reihe convergirt absolut und gleichmäßig.*

Ist statt des Differentialausdruckes $\Delta(u)$ ein Differentialausdruck von der allgemeineren Gestalt

$$L(u) + \lambda k u \equiv \frac{\partial p \dfrac{\partial u}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial p \dfrac{\partial u}{\partial y}}{\partial y} + (q + \lambda k)u$$

vorgelegt, wo k irgend eine innerhalb des Gebietes J positive Funktion von x, y bedeutet, so setze man

$$u = \frac{v}{\sqrt{k}}$$

und multiplicire dann den erhaltenen Ausdruck mit $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$; dann entsteht ein Ausdruck von der früheren Gestalt, nämlich

$$\Delta^*(v) = L^*(v) + \lambda v,$$

wo

$$L^*(v) = \frac{\partial\left(p^* \dfrac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(p^* \dfrac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial y} + q^* v,$$

$$p^* = \frac{p}{k},$$

$$q^* = \frac{1}{\sqrt{k}} L\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

ist.

Die Betrachtungen dieses Abschnittes VIII lassen sich leicht auf den Fall übertragen, daß das Integrationsgebiet J auf einer beliebigen Fläche im Raume gelegen ist: an Stelle des bisherigen Differentialausdruckes für das ebene Gebiet J tritt dann eine gewisse Verallgemeinerung des Beltramischen Differentialparameters, nämlich der Differentialausdruck

$$L(u) \equiv \frac{1}{\sqrt{eg-f^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{g\frac{\partial u}{\partial x}-f\frac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{eg-f^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{e\frac{\partial u}{\partial y}-f\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{eg-f^2}}\right)\right\}+qu;$$

darin bedeuten x, y die krummlinigen Coordinaten der Fläche und e, f, g in bekannter Weise die Coefficienten des Quadrates des Linienelementes

$$ds^2 = edx^2+2fdxdy+gdy^2$$

der Fläche; p bedeutet eine innerhalb J positive stetig differenzirbare Funktion und q irgend eine stetige Funktion auf der Fläche. Die Greensche Formel (14) gilt für irgend ein Gebiet J auf der Fläche mit der Randcurve C unverändert in der bisherigen Gestalt[1]).

Ist insbesondere die Fläche geschlossen und singularitätenfrei, so kann die Randbedingung für eine Funktion $f(xy)$ durch die Forderung ersetzt werden, daß die Funktion $f(xy)$ sich überall auf der Fläche regulär verhalten soll (Randbedingung V* S. 237). Auch in diesem Falle lehrt unsere Theorie die Existenz der Eigenfunktionen und die Entwickelbarkeit einer willkürlichen Funktion auf der Fläche nach jenen Eigenfunktionen der Fläche.

Als Beispiel diene die Kugel K mit dem Radius 1. Wählen wir für x, y die Polarcoordinaten ϑ, φ, so erhält wegen

$$e = 1,$$
$$f = 0,$$
$$g = \sin^2\vartheta$$

unser Differentialausdruck für $p = \frac{1}{2\pi}$, $q = 0$ die Gestalt:

$$L(u) \equiv \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right\}.$$

Die Greensche Funktion $g(\vartheta\varphi, \vartheta^*\varphi^*)$ im erweiterten Sinne hat wegen $\psi^{(0)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ der Gleichung

$$L(g) = \frac{1}{4\pi}$$

1) Vgl. G. Darboux, Theorie générale des surfaces liv. VII chap. I.

zu genügen. Bedeutet ϱ die kleinste sphärische Entfernung der Punkte ϑ, φ und ϑ^*, φ^* auf der Kugel, so ergiebt sich

$$g(\vartheta\varphi, \vartheta^*\varphi^*) = -l\left(2\sin\frac{\varrho}{2}\right);$$

dieselbe erfüllt in der Tat das Symmetriegesetz [1]).

Die Eigenwerte zum Kern $G = 2\pi g$ d. h. die Eigenwerte der Differentialgleichung

$$\varDelta u \equiv Lu + \lambda u = 0$$

sind

$$\lambda^{(n)} = \frac{n(n+1)}{2\pi} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

und zwar wird allgemein $\lambda^{(n)}$ ein $2n+1$ facher Eigenwert, indem zu $\lambda^{(n)}$ als Eigenfunktionen die $2n+1$ Kugelflächenfunktionen $P^{(n)}$ vom n^{ten} Grade gehören; die letzteren erfüllen mithin die Differentialgleichung

$$L(u) + \lambda^{(n)} u = 0$$

und die Integralgleichung

$$\lambda^{(n)} \int_{(K)} P^{(n)}(\vartheta^*\varphi^*)\, G(\vartheta\varphi, \vartheta^*\varphi^*)\, dK = P^{(n)}(\vartheta\varphi)$$

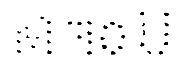
oder

$$-n(n+1)\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P^{(n)}(\vartheta^*\varphi^*)\, l\left(2\sin\frac{\varrho}{2}\right)\sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta = P^{(n)}(\vartheta\varphi).$$

Unser Satz 21 lehrt, daß jede zweimal stetig differenzirbare Funktion auf der Kugel nach den Kugelflächenfunktionen entwickelbar ist.

Schließlich sei noch erwähnt, daß die Bedeutung der Eigenfunktionen als Lösungen gewisser Variationsprobleme, sowie alle hiermit in Zusammenhang stehenden Tatsachen, wie ich sie für den Fall gewöhnlicher Differentialgleichungen am Schluß des Abschnittes VII angedeutet habe, entsprechend auch für den gegenwärtigen Fall der partiellen Differentialgleichungen zutreffen.

1) Diese Greensche Funktion für die Kugelfläche haben bereits E. Zermelo, Hydrodynamische Untersuchungen über die Wirbelbewegungen in einer Kugelfläche, Zeitschrift für Math. und Phys. Bd. 47 (1902) und J. Hadamard, Propagation des ondes, Paris 1903, berechnet.



IX.

Auftreten eines Parameters in der Randbedingung bei partiellen Differentialgleichungen.

Auch die Untersuchungen dieses Abschnittes betreffen die Integration partieller Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variabeln x, y; doch soll nicht wie in Abschnitt VIII die Differentialgleichung den Parameter λ enthalten, sondern wir nehmen vielmehr an, daß der Parameter λ in der Randbedingung auftritt. Es wird sich zeigen, daß auf gewisse dann entstehende Fragen ebenfalls meine in der ersten Mitteilung aufgestellte Theorie der Integralgleichungen erfolgreiche Anwendung findet.

Wenn die zu einer Randbedingung gehörige Greensche Funktion G bekannt ist, so wird stets eine gewisse zugehörige Randwertaufgabe lösbar. Setzen wir beispielsweise in der Formel (15) (S. 236)

$$\gamma(xy, \xi\eta) = p(\xi\eta)\, G^{\mathrm{I}}(xy, \xi\eta),$$

wo $G^{\mathrm{I}}(xy, \xi\eta)$ die zur Randbedingung I gehörige Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(u)$ bezeichnet, und wählen dann für u irgend eine Lösung der Differentialgleichung $L(u) = 0$, so entsteht die Gleichung

$$u(\xi\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{(C)}\Big[p(xy)\, u(xy)\, \frac{\partial G^{\mathrm{I}}(xy, \xi\eta)}{\partial n}\Big]_{\substack{x=a(s)\\ y=b(s)}} ds;$$

diese Formel löst die Aufgabe, das stetige Integral u jener Differentialgleichung $L(u) = 0$ im Innern des Gebietes J zu finden, wenn seine Werte auf der Randcurve C gegeben sind.

In entsprechender Weise bezeichnen wir mit $G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta)$ die zur Randbedingung II gehörige Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(u)$ und setzen in Formel (15) (S. 236)

$$\gamma(xy) = p(\xi\eta)\, G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta);$$

wählen wir dann für u wiederum eine Lösung der Differentialgleichung $L(u) = 0$, so wird

$$(17) \qquad u(\xi\eta) = -\frac{1}{2\pi}\int_{(C)}\Big[p(xy)\, \frac{\partial u(xy)}{\partial n}\, G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta)\Big]_{\substack{x=a(s)\\ y=b(s)}} ds;$$

diese Formel löst die Aufgabe, das Integral u jener Differentialgleichung $L(u) = 0$ im Innern des Gebietes J zu finden, wenn die Werte seiner normalen Ableitung auf der Randcurve C gegeben sind.

Umgekehrt sieht man sofort wie in der Potentialtheorie ein, daß, wenn die letztgenannten Randwertaufgaben als lösbar erkannt sind, daraus mit Hilfe einer Grundlösung stets die Existenz der Greenschen Funktionen G^{I} bez. G^{II} folgt.

Ehe wir nun der Frage nach der Existenz der Greenschen Funktionen näher treten, schicken wir einige Betrachtungen voraus, die sich auf den Zusammenhang zwischen gewissen Kernen von Integralgleichungen beziehen. Wie in der ersten Mitteilung (S. 70—71) werde, wenn $K(s,t)$ irgend ein Kern ist, die Funktion

$$KK(s,t)=\int_a^b K(s,r)\,K(t,r)\,dr$$

als der *aus $K(s,t)$ zweifach zusammengesetzte Kern* bezeichnet. Eine Reihe von Eigenschaften lassen sich von dem Kern $K(s,t)$ aussagen, wenn die entsprechenden Eigenschaften von $KK(s,t)$ bekannt sind; hier mögen nur folgende Sätze erwähnt werden:

Satz 20. Wenn der aus $K(s,t)$ zweifach zusammengesetzte Kern abgeschlossen oder allgemein ist, so ist stets auch der Kern $K(s,t)$ abgeschlossen bez. allgemein.

Satz 21. Wenn $K(s,t)$ ein abgeschlossener Kern ist und die Integralgleichung erster Art mit dem Kern $KK(s,t)$ lösbar ist, so ist es auch die Integralgleichung erster Art mit dem Kern $K(s,t)$.

In der Tat, aus

$$f(s)=\int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt$$

folgt durch Multiplikation mit $K(r,s)$ und Integration nach s die Gleichung

$$\int_a^b K(r,s)\,f(s)\,ds=\int_a^b KK(r,t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Wenn $f(s)$ eine gegebene Funktion ist, so wird die linke Seite dieser Gleichung ebenfalls eine bestimmte Funktion und aus dieser folgt die Funktion $\varphi(t)$ durch Lösung der Integralgleichung erster Art mit dem Kern $KK(s,t)$.

Satz 22. Wenn $KK(s,t)$ ein allgemeiner Kern ist, so läßt sich derselbe stets in eine Reihe entwickeln:

$$KK(s,t)=\frac{\psi^{(1)}(s)\,\psi^{(1)}(t)}{\lambda^{(1)}}+\frac{\psi^{(2)}(s)\,\psi^{(2)}(t)}{\lambda^{(2)}}+\cdots,$$

wobei $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots$ und $\psi^{(1)}(s), \psi^{(2)}(s), \ldots$ die zu $KK(s, t)$ gehörigen Eigenfunktionen bez. Eigenwerte bedeuten.

Zum Beweise wende man Satz 7 meiner ersten Mitteilung auf den Kern $K(s, t)$ an und setze in der so entstehenden Entwickelung an Stelle der Funktion $g(t)$ den Kern $K(t, r)$ ein.

Im Bisherigen haben wir stets den Kern als eine symmetrische Funktion der beiden Variabeln s, t bez. der beiden Variabelnpaare xy, $\xi\eta$ vorausgesetzt. In der Tat ist die von mir in der ersten Mitteilung begründete Theorie der Entwickelungen nach Eigenfunktionen nur für symmetrische Kerne gültig und die vielseitige Anwendbarkeit derselben auf die Theorie der Differentialgleichungen, wie sie im Vorstehenden zu Tage trat, wurde wesentlich durch den Umstand bedingt, daß die Greenschen Funktionen zufolge des Symmetriegesetzes symmetrisch in den beiden Variabeln bez. Variabelnpaaren ausfallen.

Dagegen erfordern die am Schlusse des Abschnittes II meiner ersten Mitteilung abgeleiteten Fredholmschen Formeln keineswegs die Annahme eines symmetrischen Kerns; desgleichen ist die von mir in Abschnitt VI der ersten Mitteilung angegebene Modifikation jener Formeln und die darauf beruhende Erweiterung ihrer Anwendbarkeit auch für unsymmetrische Kerne gültig.

Hiernach existirt für eine Integralgleichung zweiter Art, auch wenn ihr Kern $K(s, t)$ unsymmetrisch ist, eine lösende Funktion, d. h. eine Funktion $\mathsf{K}(s, t)$ von der Art, daß

$$K(s, t) = \mathsf{K}(s, t) - \lambda \int K(s, r)\, \mathsf{K}(r, t)\, dr$$

wird, allemal dann, wenn $K(s, t)$ nur Singularitäten von niederer als der $\frac{1}{2}^{\text{ten}}$ Ordnung besitzt. Ebenso folgt, daß eine Integralgleichung zweiter Art, deren Kern $K(xy, \xi\eta)$ eine Funktion zweier Variabeln paare ist, gewiß eine lösende Funktion besitzt, wenn der Kern $K(xy, \xi\eta)$ nur Singularitäten von niederer als 1ter Ordnung besitzt.

Wenn der Kern $K(s, t)$ bez. $K(xy, \xi\eta)$ einer Integralgleichung nicht symmetrisch ist, so verstehen wir unter dem aus $K(s, t)$ bez. $K(xy, \xi\eta)$ zweifach zusammengesetzten Kern die Funktionen

$$KK(s, t) = \int_a^b K(s, r)\, K(r, t)\, dr$$

bez.

$$KK(xy, \xi\eta) = \int_{(J)} K(xy, \mathfrak{x}\mathfrak{y})\, K(\mathfrak{x}\mathfrak{y}, \xi\eta)\, dJ.$$

Auch die Begriffe *Eigenwert* und *Eigenfunktion* sind unmittelbar auf den unsymmetrischen Kern übertragbar. Es kann nun

vorkommen, daß der zweifach zusammengesetzte Kern $KK(s, t)$ bez. $KK(xy, \xi\eta)$ an den Stellen

$$s = t \quad \text{bezw.} \quad x = \xi, \quad y = \eta$$

nur von niederer als der $\frac{1}{2}^{\text{ten}}$ bezw. der 1ten Ordnung singulär ist, während dies für den ursprünglichen Kern $K(s, t)$ bez. $K(xy, \xi\eta)$ nicht zutrifft[1]). In diesem Falle können wir von folgenden Sätzen Gebrauch machen, die von dem Zusammenhange zwischen den Integralgleichungen zweiter Art mit dem ursprünglichen und dem zweifach zusammengesetzten Kern handeln:

Satz 23. Wenn $\lambda = 1$ ein Eigenwert der Integralgleichung zweiter Art mit dem Kern $KK(s, t)$ ist, so giebt es unter den zu diesem Eigenwert gehörigen Eigenfunktionen gewiß eine solche Eigenfunktion $\varphi(s)$, die entweder die Integralgleichung

$$\varphi(s) = +\int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt$$

oder die Integralgleichung

$$\varphi(s) = -\int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt$$

befriedigt.

Zum Beweise setzen wir

$$\psi(s) = \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt; \tag{18}$$

dann wird

$$\int_a^b K(r, s)\,\psi(s)\,ds = \int_a^b KK(r, t)\,\varphi(t)\,dt$$

oder, da $\varphi(s)$ als Eigenfunktion von $KK(s, t)$ der Gleichung

$$\varphi(s) = \int_a^b KK(s, t)\,\varphi(t)\,dt \tag{19}$$

genügt:

$$\varphi(r) = \int_a^b K(r, s)\,\psi(s)\,ds. \tag{20}$$

Tragen wir diesen Wert von $\varphi(r)$ in die rechte Seite von (18) ein, so entsteht

$$\psi(s) = \int_a^b KK(s, t)\,\psi(t)\,dt,$$

1) Diese Tatsache ist bereits von J. Fredholm bemerkt und in ähnlicher Weise wie hier zur Auflösung von Integralgleichungen benutzt worden, wenn der Kern für $s = t$ bez. $x = \xi$, $y = \eta$ sich singulär verhält, vgl. Acta math. Bd. 27 S. 384.

d. h. die Funktion $\psi(s)$ erfüllt die nämliche Integralgleichung wie $\varphi(s)$. Wir nehmen der Kürze wegen an, es gäbe nicht zwei von einander linear unabhängige Lösungen $\varphi(s)$ der Gleichung (19); alsdann folgt notwendig

$$\psi(s) = c\varphi(s),$$

wo c eine Constante bedeutet. Die Berücksichtigung dieser Beziehung in (18) und (20) führt zu der Gleichung $c^2 = 1$, womit die in Satz 23 aufgestellte Behauptung bewiesen ist. Ebenso leicht gestattet sich der Nachweis ohne jene Annahme.

Satz 24. Wenn die Integralgleichung zweiter Art mit dem Kern $KK(s, t)$ für den Parameterwert $\lambda = 1$, d. h. wenn die Integralgleichung

$$F(s) = \varphi(s) - \int_a^b KK(s, t)\varphi(t)\,dt \tag{21}$$

lösbar ist und $\lambda = 1$ nicht gerade einen Eigenwert des Kerns $KK(s, t)$ bedeutet, so ist auch die Integralgleichung zweiter Art mit dem Kern $K(s, t)$, nämlich die Integralgleichung

$$f(s) = \varphi(s) - \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt \tag{22}$$

lösbar.

Zum Beweise setzen wir, wenn $f(s)$ eine gegebene Funktion bedeutet,

$$F(s) = f(s) + \int_a^b f(t)\,K(s, t)\,dt$$

und bezeichnen mit $\varphi(s)$ die Lösung der mit diesem $F(s)$ gebildeten Integralgleichung (21). Bilden wir dann die Funktion

$$\psi(s) = \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt + f(s) \tag{23}$$

und setzen dieselbe in (21) an Stelle von $\varphi(s)$ ein, so ist die entstehende Gleichung genau dieselbe wie die, die man aus (21) durch Multiplikation mit $K(r, s)$ und Integration nach s erhält. Daraus folgt, daß auch $\psi(s)$ eine Lösung von (21) sein muß. Da aber $\lambda = 1$ kein Eigenwert des Kerns $KK(s, t)$ sein sollte, so besitzt diese Integralgleichung nur eine Lösung; daher muß $\varphi(s)$ mit $\psi(s)$ übereinstimmen, d. h. wegen (23): $\varphi(s)$ ist zugleich die gesuchte Lösung der Integralgleichung (22).

Nach diesen Vorbereitungen stellen wir uns nunmehr **die Aufgabe, für ein beliebiges Gebiet J mit der Randcurve C die Greensche Funktion erster Art, d. h. diejenige Greensche Funktion $G^{I}(xy, \xi\eta)$, die zu der Rand-**

bedingung I gehört, für einen beliebigen Differentialausdruck $L(u)$ zu konstruiren.

Zu dem Zwecke betrachten wir zunächst den Differentialausdruck

$$D(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y},$$

wo P eine beliebige innerhalb J und auf der Randcurve C stetig differenzirbare Funktion sein möge. Wir nehmen nun an, es sei die zur Randbedingung I gehörige Greensche Funktion für den Differentialausdruck $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ bekannt, und bezeichnen dieselbe mit $\Gamma(xy, \xi\eta)$. Ist dann u eine innerhalb J zweimal stetig differenzirbare und auf C verschwindende Funktion, und setzen wir

$$(24) \qquad D(u) = f(xy)$$

so entnehmen wir aus der Formel (15) die Gleichung

$$u(\xi\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{(J)} \Gamma(xy, \xi\eta)\left\{\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} - f\right\} dJ$$

und unter Anwendung der Regel für die Integration eines Produktes:

$$u(\xi\eta) = -\frac{1}{2\pi}\int_{(J)}\left\{\frac{\partial\left(\Gamma(xy, \xi\eta)\frac{\partial P}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\Gamma(xy, \xi\eta)\frac{\partial P}{\partial y}\right)}{\partial y}\right\} u(xy)\, dJ$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{(J)} \Gamma(xy, \xi\eta) f(xy)\, dJ,$$

d. h. die der Randbedingung I genügende innerhalb J stetige Lösung $u(x, y)$ der Differentialgleichung (24) genügt der Integralgleichung

$$(25) \qquad F(\xi\eta) = u(\xi\eta) - \int_{(J)} K(xy, \xi\eta)\, u(xy)\, dJ,$$

wo zur Abkürzung

$$F(\xi\eta) = -\frac{1}{2\pi}\int_{(J)} \Gamma(xy, \xi\eta) f(xy)\, dJ,$$

$$K(xy, \xi\eta) = -\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\partial\left(\Gamma(xy, \xi\eta)\frac{\partial P}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\Gamma(xy, \xi\eta)\frac{\partial P}{\partial y}\right)}{\partial y}\right\}$$

gesetzt ist.

Wir betrachten nun den aus $K(xy, \xi\eta)$ zweifach zusammengesetzten Kern $KK(xy, \xi\eta)$. Da der Kern $K(xy, \xi\eta)$ für $x = \xi$, $y = \eta$ von der ersten Ordnung unendlich wird, so folgt leicht, daß der Kern $KK(xy, \xi\eta)$ überall endlich bleibt. Nach dem oben Gesagten (S. 245) ist daher die Integralgleichung zweiter Art

$$F^*(xy) = u^*(xy) - \lambda \int_{(J)} KK(xy, \xi\eta)\, u^*(\xi\eta)\, dJ$$

für den variabeln Parameter λ auflösbar.

Wäre $\lambda = 1$ ein Eigenwert für diesen Kern $KK(xy, \xi\eta)$, so müßte nach Satz 23 eine Eigenfunktion $\varphi(xy)$ existiren, die zugleich auch eine der Integralgleichungen

$$\varphi(xy) = \pm \int_{(J)} K(xy, \xi\eta)\, \varphi(\xi\eta)\, dJ$$

befriedigt; dann aber wäre $\varphi(\xi\eta)$ ein auf der Randcurve C verschwindendes Integral einer der beiden Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \pm \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Da aber für jede auf C verschwindende Funktion u die Identität

$$\int_{(J)} e^{\pm P}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} dJ = -\int_{(J)} e^{\pm P}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \pm \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\} u\, dJ$$

gilt, so würde sich $\varphi(xy)$ notwendig als Konstante und mithin gleich Null ergeben, was nicht der Fall wäre. Die Annahme, daß $\lambda = 1$ ein Eigenwert für den Kern $KK(xy, \xi\eta)$ sei, ist somit als unzutreffend erkannt.

Nunmehr lehrt Satz 24, daß auch die Integralgleichung (25) eine Lösung besitzt; diese Lösung $u(xy)$ ist das gewünschte Integral der Differentialgleichung (24), welches auf der Randcurve C verschwindet.

Es sei zur Abkürzung gesetzt:

$$P_\xi = \frac{\partial P(\xi\eta)}{\partial \xi}, \qquad P_\eta = \frac{\partial P(\xi\eta)}{\partial \eta},$$

$$P_{\xi\xi} = \frac{\partial^2 P(\xi\eta)}{\partial \xi^2}, \qquad P_{\xi\eta} = \frac{\partial^2 P(\xi\eta)}{\partial \xi\, \partial \eta}, \qquad P_{\eta\eta} = \frac{\partial^2 P(\xi\eta)}{\partial \eta^2},$$

$$r = \left|\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\right|,$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 = {} & 1 - \tfrac{1}{2} P_\xi (x-\xi) - \tfrac{1}{2} P_\eta (y-\eta) \\ & + \tfrac{1}{16}\{3P_\xi^2 + P_\eta^2 - 2P_{\xi\xi} + 2P_{\eta\eta}\}(x-\xi)^2 \\ & + \tfrac{1}{4}\{P_\xi P_\eta - 2P_{\xi\eta}\}(x-\xi)(y-\eta) \\ & + \tfrac{1}{16}\{P_\xi^2 + 3P_\eta^2 + 2P_{\xi\xi} - 2P_{\eta\eta}\}(y-\eta)^2. \end{aligned}$$

Wegen

$$D\left(\gamma_1 l \frac{1}{r}\right) = D(\gamma_1) . l \frac{1}{r}$$
$$-\left(2\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x}\gamma_1\right)\frac{x-\xi}{r^2} - \left(2\frac{\partial \gamma_1}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y}\gamma_1\right)\frac{y-\eta}{r^2}$$

folgt durch eine leichte Rechnung, daß $D\left(\gamma_1 l \frac{1}{r}\right)$ eine auch an den Stellen $x = \xi$, $y = \eta$ stetige Funktion wird. Wir bezeichnen mit γ_2 irgend eine Funktion von x, y, die innerhalb J zweimal stetig differenzirbar ist und auf der Randcurve C dieselben Werte wie $\gamma_1 l \frac{1}{r}$ annimmt, und konstruiren alsdann nach dem Vorstehenden die auf C verschwindende Lösung der Differentialgleichung (24) für

$$f(xy) = D\left(\gamma_1 l \frac{1}{r} - \gamma_2\right);$$

ist γ_3 diese Lösung, so stellt offenbar

$$G^{\mathrm{I}} = \gamma_1 l \frac{1}{r} - \gamma_2 - \gamma_3$$

die zur Randbedingung I gehörige Greensche Funktion der Differentialgleichung $D(u) = 0$ dar.

Mit Hülfe des Satzes (18) und unter Berücksichtigung einer früheren Bemerkung (S. 240) folgt dann auch die Existenz der zur Randbedingung I gehörigen Greenschen Funktion für den beliebigen Differentialausdruck $L(u)$.

Wir wenden uns nun zu der Frage nach der Existenz der zur Randbedingung II gehörigen Greenschen Funktion und betrachten zunächst den specielleren Differentialausdruck

$$L^*(u) \equiv \frac{\partial p \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial p \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial y},$$

der aus $L(u)$ entsteht, wenn man $q = 0$ nimmt. Ist u eine der Differentialgleichung $L^*(u) = 0$ genügende Funktion, so giebt es offenbar eine Funktion v der nämlichen Veränderlichen x, y von der Art, daß

$$p\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$
$$p\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

wird. Die Funktion v ist hierdurch bis auf eine additive Konstante bestimmt; sie genügt der Differentialgleichung

$$M^*(v) \equiv \frac{\partial \frac{1}{p} \frac{\partial v}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{1}{p} \frac{\partial v}{\partial y}}{\partial y} = 0$$

und heiße die zu u konjugirte Funktion.

Wenn durch s, n irgend zwei von einem Punkte ausgehende Richtungen bezeichnet werden, die in dem Sinne wie die positiven Richtungen der x- und y-Axe zueinander senkrecht stehen, so ist stets

$$p \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n}, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{1}{p} \frac{\partial v}{\partial s}.$$

Nehmen wir nun an, es gäbe für den Differentialausdruck $M^*(v)$ eine zur Randbedingung I gehörige Greensche Funktion G^{I}, so existirt notwendig für den Differentialausdruck $L^*(u)$ eine zur Randbedingung II gehörige Greensche Funktion G^{II}.

In der Tat läßt sich die zweite Randwertaufgabe für $L^*(u) = 0$ auf die erste Randwertaufgabe für $M^*(v) = 0$ zurückführen. Bezeichnen wir nämlich mit $f(s)$ die für $\frac{\partial u}{\partial n}$ vorgeschriebenen Werte auf der Randcurve C, so muß notwendig

$$\int_{(C)} pf(s)\, ds = 0$$

ausfallen und daher stellt

$$g(s) = -\int_0^s pf(s)\, ds$$

eine stetige Funktion auf der Randcurve C dar. Wir bestimmen nun das Integral v der Differentialgleichung $M^*(v) = 0$ mit den Randwerten $g(s)$; ist alsdann $-u$ die zu v konjugirte Funktion, so besitzt u offenbar die vorgeschriebenen normalen Ableitungen auf der Randcurve C.

Wir wenden jetzt die Greensche Formel (14) an, indem wir in derselben für v die eben konstruirte Greensche Funktion G^{II} und für u irgend eine stetige Lösung von $L^*(u) = 0$ nehmen. G^{II} ist im gegenwärtigen Falle der Differentialgleichung $L^*(u) = 0$ eine Greensche Funktion im erweiterten Sinne, da die Konstante eine Lösung von $L^*(u) = 0$ mit verschwindender normaler Ableitung liefert; wir haben demgemäß

$$\psi^{(0)}(xy) = \frac{1}{\sqrt{J}},$$

$$L^*(G^{\text{II}}) = \frac{2\pi}{J},$$
$$\int_{(J)} G^{\text{II}}(xy,\, \xi\eta)\, dJ = 0,$$

worin J den Flächeninhalt des Gebietes J bedeutet. Die Greensche Formel (14) liefert

$$u(\xi\eta) = -\frac{1}{2\pi}\int_{(C)} \left[p\,\frac{\partial u}{\partial n}\, G^{\text{II}}\right]_{\substack{x=a(s)\\ y=b(s)}} ds + \frac{1}{J}\int_{(J)} u dJ.$$

Setzen wir

$$[u(xy)]_{\substack{x=a(s)\\ y=b(s)}} = u(s),$$
$$[v(xy)]_{\substack{x=a(s)\\ y=b(s)}} = v(s),$$
$$[G^{\text{II}}(xy,\, \xi\eta)]_{\substack{x=a(s),\ \xi=a(\sigma)\\ y=b(s),\ \eta=b(\sigma)}} = G^{\text{II}}(s,\, \sigma),$$

so folgt

$$(26) \qquad u(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_{(C)} \frac{dv(s)}{ds}\, G^{\text{II}}(s,\, \sigma)\, ds + c_u$$

wo c_u eine durch die Funktion u bestimmte Konstante bedeutet.

Andrerseits gehen wir von der Gleichung $M^*(v) = 0$ aus und bezeichnen mit $H^{\text{II}}(xy,\, \xi\eta)$ die zugehörige Greensche Funktion für die Randbedingung II und mit $H^{\text{II}}(s,\, \sigma)$ die betreffende aus ihr entsprechend hervorgehende Funktion von s, σ. Da offenbar die zu $v(xy)$ conjugirte Funktion $-u(x,\, y)$ wird, so erhalten wir nunmehr die Gleichung

$$(27) \qquad v(\sigma) = -\frac{1}{2\pi}\int_{(C)} \frac{du(s)}{ds}\, H^{\text{II}}(s,\, \sigma)\, ds + c_v$$

wo c_v wiederum eine Konstante bedeutet.

Die gefundenen Gleichungen (26), (27) sind Integralgleichungen erster Art mit den symmetrischen Kernen $G^{\text{II}}(s,\, \sigma)$, $H^{\text{II}}(s,\, \sigma)$. Diese Kerne sind von der Gestalt

$$cl(|\, s - \sigma\,|) + S(s,\, \sigma),$$

wo c eine Konstante und $S(s,\, \sigma)$ eine stetige Funktion von s, σ bedeutet. Mittelst (27) folgern wir dann, daß $v(\sigma)$ gewiß einmal stetig differenzirbar ist, sobald $\frac{du(s)}{ds}$ einmal, d. h. sobald $u(s)$ zweimal stetig differenzirbar ist. Da unter dieser Voraussetzung die Formel (27) die Integralgleichung (26) auflöst, so schließen

wir leicht, daß der Kern $G^{\text{II}}(s, \sigma)$ der Integralgleichung (26) sowohl abgeschlossen wie allgemein ist.

Als Beispiel wählen wir den Fall $p = 1$, wo die Gleichung $L^*(u) = 0$ die bekannte Potentialgleichung wird; als Gebiet J diene der Kreis mit dem Radius 1. Die Rechnung ergiebt das Statthaben der Relationen

$$u(\sigma) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dv(s)}{ds}\, l\left(2\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right|\right) ds,$$

$$v(\sigma) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{du(s)}{ds}\, l\left(2\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right|\right) ds,$$

wobei $u(s)$ die Werte des Realteiles, $v(s)$ diejenigen des Imaginärteiles einer analytischen Funktion auf der Kreisperipherie bedeuten, während die Gleichungen

$$\int_{-\pi}^{+\pi} u(s)\, ds = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} v(s)\, ds = 0$$

erfüllt sind.

Setzen wir an Stelle der Veränderlichen s, σ bezw. πx, $\pi \xi$, so nehmen die gefundenen Formeln die Gestalt an

$$(28)\quad u(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{dv(x)}{dx}\, l\left(2\left|\sin\pi\frac{x-\xi}{2}\right|\right) dx = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1} v(x)\operatorname{cotg}\left(\pi\frac{x-\xi}{2}\right) dx,$$

$$(29)\quad v(\xi) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{du(x)}{dx}\, l\left(2\left|\sin\pi\frac{x-\xi}{2}\right|\right) dx = -\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1} u(x)\operatorname{cotg}\left(\pi\frac{x-\xi}{2}\right) dx.$$

Die letztere Formel (29) geht durch Produktintegration und Differentiation nach x in die Formel

$$\frac{dv(\xi)}{d\xi} = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{d^2u(x)}{dx^2}\, l\left(2\left|\sin\pi\frac{x-\xi}{2}\right|\right) dx$$

über. Die Einsetzung dieses Wertes von $\frac{dv}{dx}$ in die erstere Formel (28) liefert

$$(30)\quad u(\xi) = -\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1} \frac{d^2u(x)}{dx^2}\left\{\int_{-1}^{+1} l\left(2\left|\sin\pi\frac{\xi-y}{2}\right|\right) l\left(2\left|\sin\pi\frac{x-y}{2}\right|\right) dy\right\} dx;$$

diese Formel gilt für jede zweimal stetig differenzirbare Funktion u, die von -1 bis $+1$ integrirt Null liefert.

Wenden wir nun Satz 11 (S. 221) auf den Differentialausdruck $\frac{d^2u}{dx^2}$ an, indem wir als Greensche Funktion die zu den Randbedingungen IV gehörige oben (S. 220) berechnete Funktion wählen, so folgt für jede zweimal stetig differenzirbare jenen Randbedingungen genügende Funktion u die Identität

$$(31) \qquad u(x) = -\int_{-1}^{+1} \left\{ -\tfrac{1}{2}|x-\xi| + \tfrac{1}{4}(x-\xi)^2 + \tfrac{1}{6} \right\} \frac{d^2u(x)}{dx^2}\, dx.$$

Aus den Formeln (30) und (31) entnehmen wir durch eine sehr leichte Ueberlegung, daß notwendig

$$-\tfrac{1}{2}|x-\xi| + \tfrac{1}{4}(x-\xi)^2 + \tfrac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1} l\left(2\left|\sin\pi\frac{\xi-y}{2}\right|\right) l\left(2\left|\sin\pi\frac{x-y}{2}\right|\right) dy$$

sein muß, d. h. wenn wir die symmetrischen Funktionen

$$K(x, \xi) = \frac{1}{\pi} l\left(2\left|\sin\pi\frac{\xi-x}{2}\right|\right),$$

$$KK(x, \xi) = -\tfrac{1}{2}|x-\xi| + \tfrac{1}{4}(x-\xi)^2 + \tfrac{1}{6}$$

als Kerne auffassen, so ist der letztere nichts anderes als derjenige Kern, der aus dem ersteren durch zweifache Zusammensetzung entsteht. Der Kern $K(x, \xi)$ muß mithin dieselben Eigenfunktionen besitzen, wie $KK(x, \xi)$; dieselben sind nach dem Obigen (S. 231)

$$\sin m\pi x, \quad \cos m\pi x \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Die Eigenwerte von $K(x, \xi)$ sind die Quadratwurzeln aus den Eigenwerten des Kerns $KK(x, \xi)$, d. h. da jener Kern definit ist, gleich den ganzen positiven Vielfachen von π. Diese Eigenwerte sind zweifach; doch ist der Eigenwert Null, zu dem die Konstante als Eigenfunktion gehört noch als einfacher Eigenwert hinzuzurechnen.

Die Formeln (28), (29) sind wegen ihrer fruchtbaren Anwendung auf die Theorie der analytischen Funktionen von besonderer Wichtigkeit [1]).

Wir haben oben die Greensche Funktion $G(xy, \xi\eta)$ für den Differentialausdruck $L^*(u)$ konstruirt. Wenn aber die Gleichung $L^*(u) = 0$ eine zur Randbedingung II gehörige Greensche Funktion besitzt, so folgt aus Satz 18 unter Heranziehung einer früheren Bemerkung (S. 240) auch die Existenz der Greenschen Funk-

1) Vgl. O. D. Kellogg, Zur Theorie der Integralgleichungen, Inauguraldissertation Göttingen 1902, wo einige der in meinen Vorlesungen dargelegten Anwendungen berührt werden.

tion $G^{II}(xy, \xi\eta)$ für den allgemeinen Differentialausdruck

$$L(u) = L^*(u)+qu.$$

Wir kommen endlich auf das zu Beginn dieses Abschnittes IX in Aussicht gestellte Problem zurück.

Es sei für das Gebiet J der xy-Ebene die sich selbst adjungirte Differentialgleichung $L(u) = 0$ vorgelegt; man soll dasjenige Integral dieser Differentialgleichung finden, welches auf der Randcurve C des Gebietes J die Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\lambda u+h(s) = 0 \tag{32}$$

erfüllt, wo λ den Parameter und $h(s)$ eine gegebene Funktion der Bogenlänge s auf der Randcurve C bedeutet. $G^{II}(xy, \xi\eta)$ bezeichne wiederum die zur Randbedingung II gehörige Greensche Funktion, so daß überall auf der Randcurve C

$$\frac{\partial G^{II}(xy, \xi\eta)}{\partial n} = 0$$

wird; alsdann gilt die Formel (18) und wegen (32) erhält dieselbe die Gestalt

$$u(\xi\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{(C)} \left[p(xy)(\lambda u(xy)+h(s))\,G^{II}(xy, \xi\eta)\right]_{\substack{x=a(s)\\ y=b(s)}} ds;$$

diese Formel werde mit $\sqrt{p(\xi\eta)}$ multiplizirt und in ihr $\xi = a(\sigma)$, $\eta = b(\sigma)$ genommen. Setzen wir dann zur Abkürzung

$$\left[\sqrt{p(\xi, \eta)}\,u(\xi, \eta)\right]_{\substack{\xi=a(\sigma)\\ \eta=b(\sigma)}} = \varphi(\sigma),$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\sqrt{p(xy)\,p(\xi, \eta)}\,G^{II}(xy, \xi\eta)\right]_{\substack{x=a(s),\ \xi=a(\sigma)\\ y=b(s),\ \eta=b(\sigma)}} = K(s, \sigma),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{(C)} \left[p(xy)\sqrt{p(\xi, \eta)}\,G^{II}(xy, \xi\eta)\right]_{\substack{x=a(s),\ \xi=a(\sigma)\\ y=b(s),\ \eta=b(\sigma)}} h(s)\,ds = f(\sigma),$$

so erhält sie die einfache Gestalt

$$f(\sigma) = \varphi(\sigma)-\lambda\int_{(C)} K(s, \sigma)\,\varphi(s)\,ds. \tag{33}$$

Da wegen des Symmetriegesetzes der Greenschen Funktion auch die Funktion $K(s, \sigma)$ in den Veränderlichen s, σ symmetrisch wird, so erkennen wir in der Gleichung (33) eine Integralgleichung zweiter Art, die genau von derjenigen Gestalt ist, wie wir sie in der ersten Mitteilung behandelt haben. Der Kern $K(s, \sigma)$ dieser

Integralgleichung ist in den Variabeln s, σ stetig außer für $s = \sigma$, wo $K(s, \sigma)$ wie der mit einer Konstanten multiplizirte Logarithmus von $|s-\sigma|$ unendlich wird.

Wir bezeichnen die Eigenwerte $\lambda^{(m)}$ und Eigenfunktionen $\psi^{(m)}(s)$ der Integralgleichung (33) auch als *die Eigenwerte bez. Eigenfunktionen der Randbedingung*

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = 0$$

für die Differentialgleichung $L(u) = 0$.

Da $K(s, \sigma)$ nach der obigen Bemerkung (S. 252—253) ein abgeschlossener und allgemeiner Kern ist, und indem wir die oben (S. 252) gefundene Auflösung der Integralgleichung erster Art (26) berücksichtigen, folgen aus den Sätzen 3—7 meiner ersten Mitteilung eine Reihe von Tatsachen, unter denen ich der Kürze halber nur die folgende hervorhebe:

Satz 25. *Jede zweimal stetig differenzirbare Funktion auf der Randcurve C ist in der Fourierschen Weise in eine Reihe entwickelbar, die nach den Eigenfunktionen der Randbedingung*

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = 0$$

fortschreitet; diese Reihe konvergirt absolut und gleichmäßig.

Aus den letzten Betrachtungen kann zugleich die Existenz einer zur Randbedingung III gehörigen Greenschen Funktion G^{III} gefolgert werden. Da wir oben unter der Annahme der Greenschen Funktion G^{I} für die Potentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ die Existenz von G^{I} (S. 248—250) und G^{II} (S. 250—254) für den allgemeinen Differentialausdruck $L(u)$ bewiesen haben, so können wir zusammenfassend folgendes Resultat aussprechen:

Satz 26. *Für einen Differentialausdruck $L(u)$ giebt es stets die Greenschen Funktionen G^{I}, G^{II}, G^{III}, die zu den Randbedingungen bez.* I, II, III *gehören, wobei besonderenfalls der Begriff der Greenschen Funktion im erweiterten Sinne zu verstehen ist.*

Um noch kurz das zugehörige Variationsproblem zu berühren, nehmen wir an, es sei q eine innerhalb J nirgends positive Funktion; alsdann wird das Integral

$$D(u) = \int\limits_{(J)} \left\{ p\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) - qu^2 \right\} dJ$$

gewiß niemals negative Werte erhalten. Sollen wir nun diejenige

Funktion u bestimmen, die $D(u)$ zu einem Minimum macht, während für die Randwerte von u die Bedingung

$$\int_C pu^2 ds = 1$$

erfüllt ist, so führt die Variationsrechnung auf die Differentialgleichung $L(u) = 0$, während am Rande die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = 0 \qquad (\lambda = \text{const.})$$

gelten muß. (Dirichletsches Variationsproblem).

Setzen wir, wenn $u(xy)$ irgend eine Lösung der Differentialgleichung $L(u) = 0$ bedeutet, zur Abkürzung

$$\omega(s) = \left[\sqrt{p(xy)}\,\frac{\partial u(xy)}{\partial n}\right]_{\substack{x=a(s)\\ y=b(s)}},$$

so ist wegen Formel (17)

$$\left[\sqrt{p(\xi\eta)}\,u(\xi\eta)\right]_{\substack{\xi=a(\sigma)\\ \eta=b(\sigma)}} = -\frac{1}{2\pi}\int_{(C)}\left[p(xy)\sqrt{p(\xi\eta)}\,G^{\mathrm{II}}(xy,\xi\eta)\,\frac{\partial u(xy)}{\partial n}\right]_{\substack{x=a(s),\ \xi=a(\sigma)\\ y=b(s),\ \eta=b(\sigma)}} ds$$
$$= -\int_{(C)} K(s,\sigma)\,\omega(s)\,ds.$$

Andererseits wird

$$D(u) = -\int_{(J)} u\,Lu\,dJ - \int_{(C)} pu\frac{\partial u}{\partial n}\,ds$$
$$= \int_{(C)}\int_{(C)} K(s,\sigma)\,\omega(s)\,\omega(\sigma)\,ds\,d\sigma.$$

Hiernach geht das vorige Variationsproblem in folgende Aufgabe über: man soll eine Funktion $\omega(s)$ bestimmen, für welche das Integral

$$\int_{(C)}\int_{(C)} K(s,\sigma)\,\omega(s)\,\omega(\sigma)\,ds\,d\sigma$$

ein Minimum wird, wenn die Nebenbedingung

$$\int_{(C)}\left\{\int_{(C)} K(s,\sigma)\,\omega(s)\,ds\right\}^2 d\sigma = 1$$

erfüllt ist. (Gaußsches Variationsproblem).

Die Formel (34) lehrt, daß bei unseren Annahmen der Kern $K(s,\sigma)$ definit ist und daher die Eigenwerte sämmtlich positiv ausfallen; wir bezeichnen die Eigenwerte und die Eigenfunktionen des Kerns $K(s,\sigma)$ mit $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots$ bez. $\psi^{(1)}(s), \psi^{(2)}(s), \ldots$

Bringen wir sodann für $\omega(s)$ eine nach den Eigenfunktionen fortschreitende Reihe in Ansatz, so erkennen wir leicht in ähn-

licher Weise wie in Abschnitt VII (S. 233—234) ausgeführt wurde, daß

$$\omega(s) = \lambda^{(1)}\psi^{(1)}(s)$$

das gewünschte Minimum liefert; mithin ist:

$$[\sqrt{p(xy)}\,u(xy)]_{\substack{x=a(s)\\ y=b(s)}} = \psi^{(1)}(s).$$

Eine interessante Anwendung findet unser Satz 25 zur Lösung des Problems der kleinen Schwingungen einer in einem Gefäße befindlichen, der Schwere unterworfenen Flüssigkeit[1]). Hierbei handelt es sich um die Auffindung des Geschwindigkeitspotentiales U. Dasselbe ist eine Funktion des Ortes x, y und der Zeit t, die im Innern der Flüssigkeit für alle Zeiten t der Gleichung

$$\varDelta U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0,$$

an der festen Wand für alle t der Bedingung

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0$$

und auf der Horizontalen $y = 0$ für alle t der Gleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

genügt, während für $t = 0$ die freie Oberfläche in der Horizontalen $y = 0$ liegen und daselbst die vertikale Geschwindigkeit $\frac{\partial U}{\partial y}$ als Funktion von x etwa $= f(x)$ gegeben sein soll.

Der Ansatz

$$U = u \cos(\sqrt{\lambda}\, t)$$

liefert für die von t unabhängige Funktion u an der festen Wand die Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

und an der Horizontalen $y = 0$ die Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = 0, \qquad (\lambda = \text{const.})$$

während im Inneren der Flüssigkeit überall $\varDelta u = 0$ sein muß.

---

1) Vgl. insbesondere Poincaré, Journ. de Math. 1896.

In der voranstehenden allgemeineren Entwickelung haben wir mithin $p = 1$, $q = 0$ zu nehmen und das Randintegral nicht über die ganze Randcurve C, sondern nur über die Horizontale $y = 0$ zu erstrecken. Bedeutet also $G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta)$ die zur Randbedingung II gehörige Greensche Funktion für das von der Gefäßwand und der Horizontalen $y = 0$ begrenzte Gebiet, so lautet der in Betracht kommende Kern

$$K(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} G^{\mathrm{II}}(x0, \xi0).$$

Bezeichnen wir mit $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots \psi^{(1)}(x), \psi^{(2)}(x), \ldots$ die Eigenwerte bez. die Eigenfunktionen dieses Kerns und entwickeln wir die gegebene Funktion $f(x)$ nach diesen Eigenfunktionen, wie folgt

$$f(x) = c_1\psi^{(1)}(x) + c_2\psi^{(2)}(x) + \cdots,$$

so wird das hydrodynamische Problem durch die Formeln

$$\left[\frac{\partial U}{\partial y}\right]_{y=0} = c_1\psi^{(1)}(x)\cos(\sqrt{\lambda^{(1)}}\,t) + c_2\psi^{(2)}(x)\cos(\sqrt{\lambda^{(2)}}\,t) + \cdots$$

$$[U]_{y=0} = \frac{c_1\psi^{(1)}(x)}{\lambda^{(1)}}\cos(\sqrt{\lambda^{(1)}}\,t) + \frac{c_2\psi^{(2)}(x)}{\lambda^{(2)}}\cos(\sqrt{\lambda^{(2)}}\,t) + \cdots$$

gelöst.

Die Ausdehnung unserer Untersuchungsmethode auf mehr als zwei Veränderliche bietet keine principielle Schwierigkeit.

Die erste Randwertaufgabe, ferner die beiden Poincaréschen Probleme [1]), bei denen der Parameter λ ebenfalls in der Randbedingung auftritt, sowie zahlreiche andere wichtige Probleme führen auf Integralgleichungen erster Art mit symmetrischem Kern; ich werde daher in einer dritten Mitteilung die Theorie der Integralgleichungen erster Art entwickeln und insbesondere zu ihrer Lösung eine neue Methode angeben, die auch für die Integralgleichungen zweiter Art neue Resultate liefert.

1) Acta math. Bd. 20 1896—1897 S. 61 und S. 184.

Ueber die Bildung von Stickoxyd bei hohen Temperaturen.

(Mit 3 Figuren.)

Von

W. Nernst.

(Aus dem Göttinger Universitätsinstitut für physikalische Chemie.)

Vorgelegt in der Sitzung vom 9. Juli 1904.

Die Herren Muthmann und Hofer haben im vorigen Jahre[1]) eine überaus interessante Studie über das Gleichgewicht zwischen Stickstoff und Sauerstoff bei hohen Temperaturen veröffentlicht. Insbesondere findet sich in dieser Arbeit ein wohl in jeder Hinsicht überzeugender Nachweis, daß es sich bei der Bildung des Stickoxyds aus atmosphärischer Luft infolge elektrischer Funken oder einer Lichtbogenentladung um eine reine Wärmewirkung handelt, daß also diese Versuchsanordnung den bekannten Experimenten Deville's mit der kalt-warmen Röhre im Prinzip völlig analog ist.

Lediglich was die Temperaturbestimmung der von den genannten Autoren hauptsächlich benutzten Lichtbogenentladung anlangt, stiegen mir Bedenken auf; aus vielen Erfahrungen scheint hervorzugehen, daß die Temperatur des Lichtbogens außerordentlich hoch ist. So gelingt es, dünne Fäden von Zirkonoxyd im elektrischen Lichtbogen zu schmelzen. Wenn ein in den Lichtbogen gebrachtes Thermoelement relativ niedrige Werte der Temperatur anzeigt, so ist daran zu erinnern, daß das gleiche bei der Temperaturmessung gewöhnlicher Flammen durch Thermoelemente der Fall ist; die grosse Wärmeleitung und starke Wärmeausstrahlung lassen die Lötstelle des Thermoelements nicht entfernt die hohe Temperatur der Flamme annehmen. Uebrigens spricht der Umstand, daß nicht zu dicke Platindrähte mit größter Leichtigkeit

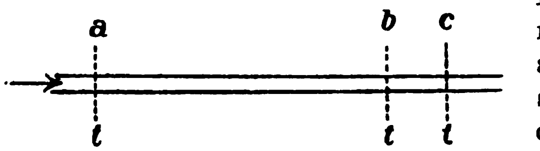
1) Berl. Ber. 36 S. 438 (1903).

in der Flamme des Lichtbogens geschmolzen werden können, wohl ohne weiteres für eine erheblich über dem Schmelzpunkte des Platins gelegene Temperatur. Aus Erfahrungen, die ich über die Bildung von Stickoxyden vermittelst elektrolytischer Glühkörper schon vor längerer Zeit gesammelt hatte, schätzte ich die Reaktionstemperatur, die einer Konzentration von Stickoxyd im Betrage von 3,6 Volum-Prozenten entspricht, erheblich über 2500°, während die Herren Muthmann und Hofer den Wert von nur 1800° in ihre Rechnungen einführen, allerdings im Einklang mit obigen Erwägungen auch bereits ihrerseits bemerken, daß die Temperatur sehr wohl merklich höher sein könnte. Behufs einer genaueren Festlegung der Gleichgewichtstemperaturen stellte ich die nachfolgend beschriebenen Erwägungen und Versuche an, die, wie ich glaube, zu einer relativ recht genauen Kenntnis der fraglichen Gleichgewichtsverhältnisse geführt haben.

Die Untersuchung des besprochenen Gleichgewichts bietet übrigens vielleicht ein allgemeines Interesse auch insofern, als die Untersuchung von Gasgleichgewichten bei hohen Temperaturen überhaupt theoretische Wichtigkeit beanspruchen dürfte und daher eine Weiterbildung der experimentellen Methoden auf diesem Gebiete wünschenswert erscheint. Die Activierung des atmosphärischen Stickstoffs ist aber ferner bekanntlich auch in technischer Beziehung ein so bedeutsames Problem, daß eine quantitative Durcharbeitung dieser Reaktion nicht unwillkommen sein wird.

1. Zur Theorie der Deville'schen Versuchsanordnung.

Den mathematisch-physikalischen Ansatz hierzu glaube ich bereits vor einiger Zeit gegeben zu haben[1]); hier möchte ich diese Frage lediglich vom experimentellen Standpunkte aus behandeln. Die anschaulichste Versuchsanordnung dürfte beiliegende kleine Skizze



(Fig. 1) erläutern; durch ein langes Rohr ströme das zu untersuchende Gasgemisch hindurch. Zwischen den Punkten a und b herrsche die Temperatur t, bei der das Gleichgewicht untersucht werden soll; von b bis c falle die Temperatur, und zwar möglichst rasch, ab; es sei beim Punkte c die Temperatur t' bereits soweit gesunken,

1) Festschrift Boltzmann. Leipzig 1904. S. 904.

daß die Reaktionsgeschwindigkeit einen praktisch verschwindenden Betrag erreicht hat. Offenbar müssen folgende beide Bedingungen erfüllt sein, damit das austretende Gasgemisch eine der Gleichgewichtstemperatur entsprechende Zusammensetzung besitzt: erstens muß die Strecke *ab* hinreichend lang sein, damit das Gas Zeit hat, sich ins Gleichgewicht zu setzen, und zweitens muß die Abkühlungsperiode von *b* bis *c* hinreichend kurz sein, damit das Gleichgewicht sich nicht wieder verschiebt.

Die erste Bedingung läßt sich theoretisch stets dadurch beliebig gut realisieren, daß man die Strecke *ab* hinreichend groß wählt; praktisch erzielt man dies natürlich am einfachsten dadurch, daß man das Rohr zwischen *a* und *b* gefäßförmig erweitert. Man kann zuweilen auch dadurch sich helfen, daß man zwischen *a* und *b* eine katalytisch wirkende Substanz bringt, wofür die bekannte Untersuchung von Knietsch[1]) über die Bildung von Schwefeltrioxyd ein Beispiel bildet. Die Frage, ob die Reaktionsgeschwindigkeit bei der Temperatur *t* nicht gar zu klein ist, wird sich experimentell übrigens in allen Fällen leicht dadurch entscheiden lassen, daß man Gemische durch das Rohr hindurchsendet, die einmal nach der einen, das andere Mal nach der anderen Seite hin vom Gleichgewichte abweichen.

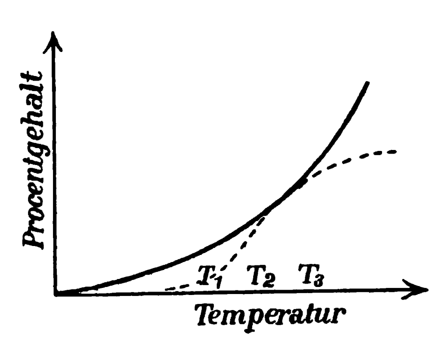
Die zweite Bedingung wird sich dadurch am besten erfüllen lassen, daß man das Stück *bc* in Gestalt einer engen Kapillare wählt, um möglichst große Gasgeschwindigkeiten zu erzielen und ferner das Wärmegefälle möglichst groß zu machen. Freilich kommt man hier wegen der Wärmeleitfähigkeit des Materials des Rohres nicht über eine gewisse Grenze und man kann keineswegs schließen, daß, wenn das austretende Gasgemisch eine von der Strömungsgeschwindigkeit unabhängige Zusammensetzung besitzt, notwendig diese Fehlerquelle vermieden sei. Es geht dies schon einfach aus der Tatsache hervor, daß keineswegs eine unendlich hohe Durchströmungsgeschwindigkeit ein unendlich rasches Wärmegefälle zur Folge hat. Selbstverständlich müssen katalytisch wirkende Stoffe in dem Stück *bc* vermieden werden.

Principiell wichtig scheint die Bemerkung, daß bei hoher Temperatur und entsprechend sehr großer Reaktionsgeschwindigkeit zwar im Raume *ab* das Gleichgewicht sich sicher herstellt, aber ebenso sicher sich im Raume *bc* verschiebt. Die austretenden Gase haben dann zwar die gleiche Zusammensetzung, gleichgültig, ob sie vorher in der einen oder anderen Richtung vom Gleichgewicht abwichen,

1) Berl. Ber. 34. 4069 (1901).

können aber trotzdem weit vom Gleichgewicht liegende Werte liefern.

Beistehende kleine Curvenzeichnung trägt vielleicht zur Verdeutlichung der obwaltenden Verhältnisse bei; die ausgezogene Curve möge die Gleichgewichtscurve (z. B. Prozente NO) repräsentieren, während die punktierte Curve die beobachteten Zahlen darstellen möge. Im allgemeinen wird man infolge der obigen Fehlerquellen zu kleine Ausbeuten erhalten. Wenn aber nur die Länge *ab* groß gegen *bc* ist, wird es immer ein Gebiet geben müssen, wo man die richtigen Zahlen erhält. Aufgabe des Experimentators ist also, das Temperaturgebiet von T_2 bis T_3 ausfindig zu machen, welches sich offenbar nach links umso weiter ausdehnen wird, je größer *ab* gewählt wird. Eine sehr wichtige Kontrolle dafür, daß man in diesem Gebiete sich befindet, besteht darin, daß nur in diesem Gebiete die Tangente der beobachteten Curve mit derjenigen der Gleichgewichtscurve zusammenfällt und, da die letztere bekanntlich aus der Wärmetönung des Processes sich in den meisten Fällen theoretisch wird berechnen lassen, so besitzen wir ein sehr zuverlässiges Kriterium dafür, ob die beobachteten Werte innerhalb eines gewissen Intervalles mit den wahren Werten des Gleichgewichtes zusammenfallen.



Im nachfolgenden findet sich übrigens auch eine Methode durchgeführt, welche die Gleichgewichtswerte in der Gegend von T zu ermitteln gestattet, woselbst die Reaktionsgeschwindigkeit zwar noch merklich, aber doch zu klein ist, als daß im Raume *ab* sich das Gleichgewicht in den zur Verfügung stehenden Zeiten herstellen könnte. Dieselbe beruht darauf, daß man durch Benutzung verschiedener Strömungsgeschwindigkeiten die beiden entgegengesetzten Reaktionsgeschwindigkeiten ermittelt und nach Guldberg und Waage durch Berechnung derjenigen Konzentration, bei welcher sie gleich werden, das Gleichgewicht ableitet[1]).

1) Es ist mir übrigens nicht bekannt, daß man die Methode der Messung der entgegengesetzten Reaktionsgeschwindigkeiten praktisch zur Ermittelung des Gleichgewichts bereits benutzt hat; bereits vor Beginn dieser Arbeit schlug mir Herr Dr. J. Sand gelegentlich einer gemeinsamen Untersuchung diese Methode zur Ermittlung des Gleichgewichts der Chloratbildung vor.

Genau die gleichen Betrachtungen sind nun offenbar auf eine scheinbar sehr verschiedene Versuchsanordnung anwendbar. Im Falle einer Explosion wird nämlich das betreffende Gasgemisch auf eine hohe Temperatur gebracht, auf der es eine, wenn auch nur sehr kurze Zeit verweilt, um dann sich äußerst rasch abzukühlen. Ein Beispiel hiervon werden wir weiter unten in den Versuchen Bunsen's finden, bei denen Knallgas unter Beimengung von atmosphärischer Luft zur Explosion gebracht wurde. Da es sich bei dieser Methode um sehr kurze Zeiten handelt, so ist sie nur in Gebieten so hoher Reaktionsgeschwindigkeit, d. h. bei so hohen Temperaturen, anwendbar, bei welchen die vorher beschriebene Methode gänzlich versagen würde. Es scheint, daß mittelst der hier dargelegten Gesichtspunkte sich aus dem Studium der Explosionen chemische Gleichgewichte bei Temperaturen werden ermitteln lassen, die unseren sonstigen experimentellen Hülfsmitteln gänzlich unzugänglich sind, freilich nur dann, wenn sich der Nachweis führen läßt, daß die Explosionstemperatur im Intervalle T_1 bis T_2 liegt.

Eine wertvolle Prüfung der Zuverlässigkeit der nach den obigen Methoden gewonnenen Gleichgewichtswerte kann das Gesetz der Massenwirkung liefern, indem man die betreffenden Versuche unter passender Variation der Zusammensetzung des Gasgemisches ausführt.

2. Versuche mit Iridiumöfen.

Da es von vornherein klar war, daß die Herstellung des Gleichgewichts nur bei sehr hohen Temperaturen erfolgen werde, so wurden die ersten Versuche unter Verwendung von elektrisch geheizten Iridiumöfen der von mir kürzlich beschriebenen Form angestellt[1]). Es wurde in die eine Seite des horizontalgestellten Ofens eine Quarzkapillare eingedichtet, die natürlich wegen ihres niedrigen Schmelzpunktes nicht bis in den eigentlichen Heizraum hineinragen durfte. Bekannte Volumina Luft wurden mittelst einer mit Wasser gefüllten und mit einem Abflußhahn am Boden versehenen Flasche unter möglichst konstanter Abflußgeschwindigkeit während gemessener Zeiträume aspiriert. Die Luftmenge, welche den Iridiumofen passiert hatte, wurde ferner durch ein mit einigen Kubikcentimetern konzentrierter Schwefelsäure gefülltes Schlangenröhrchen hindurchgesaugt und nach Beendigung des Ver-

1) Zeitschrift für Electrochemie 1903 S. 623.

suches wurde die Schwefelsäure in dem von Lunge angegebenen Apparat[1]) mit Quecksilber geschüttelt und die entwickelte Menge Stickoxyd gemessen.

Es ist dies wohl die beste analytische Methode, die wir in unserem Falle besitzen, und sie ist auch nach einiger Uebung einfach in der Handhabung. Freilich stellte sich im Laufe der Untersuchung heraus, daß für die Entscheidung gewisser Fragen die erwähnte für alle technischen Zwecke vollkommen hinreichende Methode doch nicht in jeder Hinsicht genügte. Auch bei langsamstem Durchleiten durch ein Schlangenrohr riecht das austretende Gas noch merklich nach Stickoxyden und so fand sich denn auch, leider erst, nachdem bereits eine Anzahl Versuche ausgeführt waren, daß ein zweites hinter das erste gelegte Schlangenrohr noch ca. 10 % derjenigen Stickoxydmenge lieferte, welche vom ersten absorbiert war; ferner stellte sich heraus, daß die Schlangenröhrchen mehrere Male auf das sorgfältigste mit konzentrierter Säure nachgespült werden mußten, ehe wirklich alle überraschend fest am Glase haftende aktive Säure in das Nitrometer gelangte. Dies bedingte aber wiederum, daß die Mengen Schwefelsäure, welche in das Nitrometer kamen, häufig das dreifache bis fünffache Volum des entwickelten Gases betrugen. Unter diesen Bedingungen ist nun die Löslichkeit des Gases, die nach Lunge[2]) 3,5 Volumprozente der Schwefelsäure beträgt, keineswegs zu vernachlässigen. Die Herren Jellinek und Langmuir haben auf meine Veranlassung zur Kontrolle der Lunge'schen Zahl eine Reihe von Versuchen angestellt, bei denen zu einer kleinen im Nitrometer befindlichen Menge Stickoxyd weitere Mengen Schwefelsäure hinzugefügt wurden. Das Löslichkeitsgleichgewicht stellt sich erst nach sehr energischem, lange fortgesetztem Schütteln ein. Die Versuche lieferten übrigens eine mit dem Lunge'schen Werte praktisch identische Zahl (3 %).

Versuche, die stickoxydhaltige Luft durch verdünnte Barytlösung, der Phenolphtalein zugesetzt war, bis zur Entfärbung des letzteren zu leiten, lieferten um 30 bis 50 % zu kleine Werte. Es hat den Anschein, als ob die Reaktion

$$2NO_2 + H_2O = HNO_3 + HNO_2$$

bei gewöhnlicher Temperatur zu langsam sich abspielt, als daß das gelöste NO_2 sämtlich zurückgehalten würde. Eine nähere Untersuchung der Geschwindigkeit obiger Reaktion, die sich mit

1) Treadwell, Analyt. Chemie II. S. 523.
2) Berl. Ber. 18. S. 1391 (1885).

Hülfe von Leitfähigkeitsmessungen gut durchführen ließe, erscheint wünschenswert und würde vielleicht zur Auffindung geeigneter Zusätze führen, die vorstehende Reaktion hinreichend zu beschleunigen. Wenn es gelingen würde, in der angegebenen Weise direkt auch sehr kleine Mengen von Stickoxyden in der Luft gleichsam titrimetrisch im Schlangenröhrchen zu analysieren, so würden sich manche interessante Fragen, die bei vorliegender Untersuchung auftauchten, mit vollster Exaktheit beantworten lassen.

Was nun die Versuche selber anlangt, so wurden zwei Iridiumöfen verwandt, von denen der erste bei einer Länge von 13 cm. ein Lumen von 0,8 cm., der zweite größere bei einer Länge von 16 cm. ein Lumen von 1,3 cm. besaß. Die Temperaturen wurden theils durch Thermoelemente von Heräus, theils durch Bestimmung der specifischen Helligkeit mit Hülfe photometrierter electrolytischer Glühstifte, wie früher beschrieben[1]), gemessen. Die specifische Helligkeit wurde für 1780° zu 0,91 HK. und für höhere Temperaturen als mit der 13ten Potenz der absoluten Temperatur fortschreitend angenommen. Durch eine Reihe von Vorversuchen wurde zunächst festgestellt, daß bei einer Temperatur von über 1700° die Reaktion hinreichend rasch sich abspielt, sodaß bei sehr langsamen Durchleiten das Gleichgewicht im Innern des Ofens offenbar sehr nahe erreicht wird; wenn die Geschwindigkeit der durch den kleinen Iridiumofen strömenden Luft auf etwa 20 Minuten pro Ltr. gesunken war, wurden die Resultate von der Strömungsgeschwindigkeit unabhängig. Damit war dann gleichzeitig gezeigt, daß bei dieser Temperatur während der kurzen Abkühlungsperiode das Gleichgewicht sich nicht merklich verschieben kann. Erheblich schneller stellte sich das Gleichgewicht, wie zu erwarten, bei ca. 1900° ein, aber auch hier immerhin nicht so rasch, daß der eben genannte Fehler erheblich ins Gewicht hätte fallen können.

Die nachfolgenden Tabellen enthalten die definitiven Versuchsresultate, bei denen die analytische Bestimmung des gebildeten Stickoxyds mit größter Sorgfalt vorgenommen und insbesondere zwei Absorptionsschlangen zur Benutzung kamen. Einige der mehr zur ersten Orientierung und mit geringerer Uebung angestellten Vorversuche sind ebenfalls mit aufgenommen, doch, weil sie Fehler von 10 bis 20 °/o enthalten können, mit der Bezeichnung (ca.) versehen. Es wurde in allen Fällen ein Liter Luft hindurchgesogen; unter t sind die dazu erforderlichen Zeiten (Minuten) vermerkt. T bedeutet die absolute Temperatur des Ofens.

1) l. c. S. 624; vgl. ferner W. Nernst, Physik. Zeitschr. 4 733 (1903).

Tabelle 1.

Kleiner Iridiumofen.

Nr.	T	t	ccm NO pro Liter.
1	2033	10	3,0 (ca.)
2	2033	23	6,4
3	2195	9,5	8,8 (ca.)
4	2195	12	9,6
5	2195	24	8,7
6	2195	26	8,0.

Tabelle 2.

Großer Iridiumofen.

Nr.	T	t	ccm NO pro Liter.
7	2033	5,2	4,8 (ca.)
8	2195	5,6	8,5
9	2195	9	9,8
10	2195	14	7,3.

Selbstverständlich dürfen an die obigen Versuchsresultate betreffs der Genauigkeit nicht gar zu große Anforderungen gestellt werden; neben den Unsicherheiten der Analyse, die besonders bei den Versuchen, wo die Ausbeute nur wenige Kubikcentimeter betrug, ins Gewicht fallen, ist es schließlich nicht ganz einfach, bei Temperaturen oberhalb des Schmelzpunkts des Platins völlig exakt zu arbeiten. Zweifellos würde man durch Verwendung größerer Luftmengen und daher zeitlich länger ausgedehnter Versuche zu besseren Werten gelangen; leider setzt hier die erhebliche Kostspieligkeit den Versuchen eine Grenze, indem die Lebensdauer der Iridiumöfen infolge starker Zerstäubung immerhin beschränkt ist. Ich glaube übrigens, daß die nachfolgend verzeichneten beiden Werte, die ich als die wahrscheinlichsten den obigen Tabellen entnehmen möchte, hinreichend sicher sind, zumal wir für sie noch eine weitere Kontrolle finden werden. Wir setzen für die Gleichgewichtskonzentration x

bei $T = 2033$ ($t^\circ = 1760$) $x = 6{,}4$ ccm NO pro Liter $= 0{,}64$ Volumprozent,

bei $T = 2195$ ($t^\circ = 1922$) $x = 9{,}7$ ccm NO pro Liter $= 0{,}97$ Volumprozent.

Berechnen wir nach der Formel

$$q = \frac{RT_1T_2}{T_1 - T_2} \ln \frac{k_1}{k_2} = 2 \,.\, 4{,}584 \frac{T_1T_2}{T_1 - T_2} \log \frac{x_1}{x_2}$$

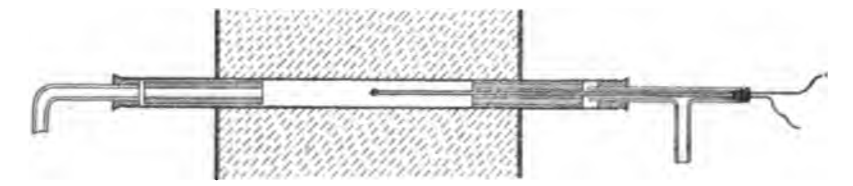
die Verbindungswärme des Stickoxyds, so folgt

$$q = 45600 \text{ g cal.}$$

also in hinreichender Uebereinstimmung mit der thermochemisch gewonnenen Zahl (2.21600 = 43200 g cal. pro 2NO). Daß q von der Temperatur praktisch unabhängig ist, folgt übrigens mit Sicherheit aus der Tatsache, daß die Molekularwärmen aller zweiatomigen Gase mit großer Annäherung einander gleich sind.

3. Versuche im Platinofen.

Da nach obigen Ergebnissen, wie die thermodynamische Rechnung (s. w. u.) lehrt, auch bei Temperaturen in der Gegend von 1500° atmosphärische Luft im Gleichgewicht noch sehr wohl meßbare Mengen von Stickoxyd enthalten muß, so schien es nicht aussichtslos, auch in einem Platinofen Messungen vorzunehmen. Es wurde bei den folgenden Versuchen ein kleiner Platinofen verwandt, der genau wie die Iridiumöfen geformt und montiert wurde. Seine Dimensionen waren Länge: 13,5 cm. Lumen 0,85 cm, Dicke der Platinwand ca. 0,17 mm. Des kleinen Widerstandes dieses Ofens willen wurde er ebenfalls mit Wechselstrom geheizt, der durch einen Transformator auf niedrige Spannung gebracht worden war. Der Ofen war jedoch mit einer kleinen Abänderung versehen, die für derartige Untersuchungen sich sehr empfiehlt; das Rohr war nämlich über die kreisförmigen Elektroden (vgl. Fig. 3) einige Centimeter verlängert, sodaß die zu untersuchenden Gase sehr bequem durch Glasröhrchen, die an den vorstehenden, hinreichend kühlen Röhrenenden mittelst Gummistopfen eingedichtet waren, hinein und abgeleitet werden konnten. Da Spuren von Feuchtigkeit zuweilen eine leichte Kondensation von kleinen Tröpfchen (Salpetersäure?) hervorriefen, so wurde die Luft bei diesen Versuchen, bei denen es sich um sehr geringe Mengen NO handelte, energisch durch Phosphorsäure getrocknet. Die Temperaturbestim-



mung geschah durch ein Thermoelement; der Heizraum des Ofens war durch hochgebrannte Magnesiaröhren beiderseitig abgeschlossen (vgl. Fig. 3).

Wie zu erwarten, dauert bei der in den nachfolgenden Versuchen benutzten Temperatur (1538° entsprechend einer elektromotorischen Kraft des Thermoelements von 16,0 Millivolt, während die andere Lötstelle 18° besaß), die Herstellung des Gleichgewichts sehr lange Zeit und es ergaben sich daher Werte, die von der Menge der hindurchgesaugten Luft unabhängig waren und der Zeit der Versuchsdauer direkt proportional anstiegen. Folgendes sind die gewonnenen Resultate:

Tabelle 3.

Luftmenge	t	ccm NO	ccm NO pro Minute
1,3 Liter	31,5	ca. 0,2	ca. 0,006
1 „	70	„ 0,4	„ 0,006
1,6 „	145	„ 0,96	„ 0,0066.

Ein Kontrollversuch in dem größeren Iridiumofen bei der gleichen Temperatur lieferte ca. 0,25 ccm bei einer Luftmenge von 1 Liter und einer Zeit von 11 Minuten. Da der Heizraum dieses Ofens das dreifache desjenigen des Platinofens betrug, so würden im letzteren nur ca. 0,08 ccm NO sich gebildet haben, in einer Minute somit ca. 0,007 ccm NO, was mit obigen Werten hinreichend (innerhalb der Analysenfehler) stimmt.

Andererseits wurde die Geschwindigkeit ermittelt, mit der Stickoxyd in dem Heizraume des Platinofens zerfiel. Zu diesem Zwecke wurde getrocknete Luft durch ein kleines Glasgefäß hindurchgesaugt, in dem ein elektrolytischer Lichtbogen (Spannung 153 Volt, Stromstärke 0,4 A) konstant brannte. Diese einfache Vorrichtung[1]) lieferte ein 3,0-procentiges Gemisch von Stickoxyd und Luft. Die folgende Tabelle enthält die Zeiten pro Liter durchgesaugter Luft erforderlich waren und unter x die entsprechenden Konzentrationen, ausgedrückt in Kubikcentimetern NO pro Liter Luft.

Tabelle 4.

t	x	$\frac{1}{t}\ln\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}$	$\frac{1}{t}\ln\frac{(x_1-x_0)(x_2+x_0)}{(x_1+x_0)(x_2-x_0)}$
0	30,0	0,0110	0,0029
44	19,9	0,0091	0,0039.
198	8,2		
∞	3,4		

1) Beschrieben und abgebildet bei Clement, Drude's Annalen **14** 335 (1904).

Den unter t verzeichneten Zahlen sind die Reaktionszeiten proportional; das Gesetz der Massenwirkung liefert:

$$-\frac{dx}{dt} = k_2 [NO]^2 - k' [N_2][O_2].$$

Die Konzentrationen $[N_2]$ und $[O_2]$ ändern sich aber so wenig, daß wir für unsere Zwecke hinreichend genau setzen können

(1) $$-\frac{dx}{dt} = k_2 x^2 - v'$$

worin v' also die Bildungsgeschwindigkeit und x die Conzentration des Stickoxyds bedeutet.

Für den Fall, daß (z. B. durch katalytische Wirkungen) die Reaktion monomolekular verlaufen sollte, gilt

(2) $$-\frac{dx}{dt} = k_1 x - v'.$$

Für die Gleichgewichtskonzentration x_0 folgt in beiden Fällen

(3) $$x_0 = \frac{v_1}{k_1} \quad \text{bezw.} \quad x_0 = \sqrt{\frac{v'}{k_2}}.$$

Die Integrale von (2) und (1) sind

(4) $$k_1 = \frac{1}{t} \ln \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0} \quad \text{bezw.} \quad 2 x_0 k_2 = \frac{1}{t} \ln \frac{(x_1 - x_0)(x_2 + x_0)}{(x_1 + x_0)(x_2 - x_0)}$$

und finden sich in den dritten und vierten Kolumnen der Tab. 4 berechnet.

Zur Entscheidung der Frage, ob wir einen monomolekularen oder bimolekularen Verlauf vor uns haben, reicht die Genauigkeit der Beobachtungen nicht aus, sofern wir uns auf die Prüfung beschränken, ob die Zahlen der dritten oder vierten Kolumne besser konstant sind. Wohl aber dürfte das Ergebnis unzweideutig für den letzteren Fall sprechen, wenn wir die Gleichungen (3) zur Berechnung von x_0 hinzuziehen.

Von x_0 wissen wir bereits, daß es zwischen 8,2 und 0,6 liegen muß (vergl. Tab. 3 und 4), und zwar offenbar von beiden Werten erheblich entfernt, da das Gleichgewicht von beiden Seiten offenbar noch lange nicht erreicht war. Eine erste Annäherung giebt daher der geometrische Mittelwert (2,8).

Nun liefert der monomoleculare Ansatz

$$x_0 = \frac{v'}{k_1} = \frac{0,0066}{0,010} = 0,66$$

also einen gänzlich ausgeschlossenen Wert, während aus

$$x_0^2 = \frac{v'}{k_2} \quad \text{und} \quad 2x_0 k_2 = 0{,}0036$$

sich findet

$$x_0 = 3{,}7,$$

welche Zahl durchaus wahrscheinlich ist und die wir daher bereits zur Berechnung der beiden letzten Kolumnen von Tab. 4 benutzt hatten. Daß hier nicht etwa ein Zirkelschluß vorliegt, geht schon daraus hervor, daß es relativ wenig ausmacht, welchen (zwischen 2 bis 5 liegenden) Wert von x_0 wir in Tabelle 4 benutzen.

Somit ergiebt sich also schließlich für

$$T = 1811, \quad x_0 = 3{,}7 \text{ ccm NO pro Liter} = 0{,}37 \text{ Volumprozent}$$

welcher Wert wohl keinen erheblichen Fehler enthalten dürfte.

4. Bildung von Stickoxyd durch Knallgasexplosion.

Von R. Bunsen[1]) ist eine Versuchsreihe mitgeteilt, nach welcher Gemische von Knallgas und Luft nach der Explosion merkliche Mengen von Stickoxyd enthalten können, und zwar wurde das Luftvolum vorher und nachher gemessen. Da das kondensierte Wasser offenbar im Laufe der nicht unbeträchtlichen Zeit, welche zwischen der Explosion und der Ablesung der übrig gebliebenen Luftmenge liegt, das gebildete NO_2 ziemlich vollständig absorbieren wird, so erhalten wir die Volumprocente an primär bei der hohen Temperatur, bei der bekanntlich NO_2 in $NO + \frac{1}{2} O_2$ sich spaltet, gebildeten Menge NO durch Division der verschwundenen Luftmengen mit 1,5. Die Reaktionstemperatur schließlich läßt sich schätzungsweise aus den Drucken ableiten, die man im Augenblick der Explosion erhält und von einer Reihe Forscher in guter Uebereinstimmung gefunden worden sind. Wenn weniger als 64 Volume Knallgas auf 100 Volume Luft kamen, bildete sich keine merkliche Menge von Stickoxyd, indem die rückständige Luft auch nicht um ein pro Mille ihr Volum vermindert hatte. Da die Temperatur bei einer Explosion von 100 Volumen Luft + 64 Volumen Knallgas ca. 2200° beträgt[2]), so folgt daraus, daß bis zu diesen Temperaturen die Reaktionsgeschwindigkeit zwischen

---

1) Ges. Abh. II S. 386; Gasometr. Meth. S. 72.

2) A. Langen, Untersuchungen über die Drücke, welche bei Explosionen auftreten. Berlin 1903 bei Springer.

Stickstoff und Sauerstoff noch zu klein ist. Dies ist aber insofern in Uebereinstimmung mit den im vorigen Abschnitt mitgeteilten Erfahrungen, als bei 1937° die Reaktion von einem momentanen Verlauf noch jedenfalls weit entfernt war. Anders bei noch höheren Temperaturen; hier wird offenbar die Reaktionsgeschwindigkeit so außerordentlich groß werden, daß während der Dauer der Maximaltemperatur, die ich nach den in der erwähnten Arbeit von Langen mitgeteilten Diagrammen auf ca. 0,0025 Sekunden schätze, merkliche Bildung von NO stattfindet, und es muß ein Temperaturintervall geben, wie aus den im ersten Abschnitt mitgeteilten Erwägungen folgt, woselbst die gefundenen Werte den Gleichgewichtskonzentrationen nahe kommen werden.

Folgende sind die von Bunsen gegebenen Werte; in der dritten Columne habe ich die Prozente NO, in der vierten nach Langen die (absoluten) Temperaturen hinzugefügt.

Tabelle 5.

Volume Knallgas pro 100 Volume Luft	Rückständige Luft	Prozent NO	T
64,31	99,90 %	0,07	2200 + 273 = 2473
78,76	99,43 %	0,38	2500 + 273 = 2773
97,84	96,92 %	2,05	2700 + 273 = 2973
226,04	88,56 %	7,63	ca. 3200 + 273 = ca. 3473.

Da in den drei ersten Versuchen der Prozentgehalt viel schneller ansteigt, als der Thermodynamik entspricht, so befinden wir uns offenbar im Gebiete zwischen T_1 und T_2 (vergl. Fig. 2); vom dritten zum vierten Versuch wächst der Prozentgehalt wenigstens annähernd, wie es die Theorie verlangt, wenn auch der letzte Wert (vielleicht infolge von Bildung von H_2O_2) etwas hoch scheint. Es ist aber wohl nicht zu gewagt, wenn wir den Mittelwert

$$x \text{ ca. } 5\,\% \quad \text{für} \quad T = 3200$$

als eine annähernde Gleichgewichtskonzentration ansehen. — Offenbar wird sich ähnlich die Theorie zahlreicher Explosionsvorgänge entwickeln lassen.

5. Bildungsgeschwindigkeiten des Stickoxyds.

Obwohl die Untersuchung dieser Frage nicht der eigentliche Gegenstand der Arbeit war, sei doch im Folgenden, was sich nebenbei darüber ergab, kurz zusammengefaßt.

In der Litteratur fand ich nur die Angaben, daß weißglühender Platindraht NO ziemlich rasch bis zur Entfärbung des gebildeten NO^2 zersetzt (Emich[1]); quantitative Angaben haben schon früher V. Meyer und Langer[2]) gemacht, die fanden, daß bei 1200° NO unverändert bleibt, bei ca. 1690° aber vollständig in Stickstoff und Sauerstoff zerfällt.

Die Gleichung

$$S = 2x_0 k_0 = \frac{1}{t} \ln \frac{(x_1 - x_0)(x_2 + x_0)}{(x_1 + x_2)(x_2 - x_0)}$$

liefert für die Zeit z, in welcher in Luft die Hälfte des möglichen Stickoxyds gebildet ist, indem wir $x = 0$ und $x = \frac{x_0}{2}$ setzen,

$$z = \frac{\ln 3}{2x_0 k_2} = 306'.$$

Da die Zahlen sich auf ein Liter Luft beziehen, der Heizraum aber nur 5,2 ccm beträgt, so ist die wirkliche Erhitzungszeit 1,61 Minuten = 97 Sekunden (bei 1538°). Der Tab. 1 (Versuch No. 1) ferner entnehmen wir das Resultat, daß bei $t = 1737°$ und bei einer Durchströmungsgeschwindigkeit von 10' pro Liter das Gleichgewicht etwa zur Hälfte erreicht ist; da der Heizraum des kleinen Iridiumofens ca. 5 ccm beträgt, so war bei diesem Versuch die Luft $^1/_{20}$ Minute = 3 Sekunden auf der Versuchstemperatur. Versuch 7 Tab. 2 giebt, da der Heizraum des großen Iridiumofens 17 ccm betrug, ca. 4 Sekunden für den gleichen Zeitraum.

Den Versuchen Bunsen's entnehmen wir schließlich das Resultat, daß bei ca. 2600° das Gleichgewicht im Momente der Explosion (ca. 0,0025 Sekunden) etwa zur Hälfte sich einstellt. Der Partialdruck der Luft im Moment der Explosion betrug hier etwa 2,7 Atm., bei 1 Atm. würde die Zeit somit ca. 7,3 . 0,0025 = 0,018 Secunden betragen.

Wir haben somit folgende kleine Tabelle, die, wenn auch weit entfernt, exakte Zahlen zu liefern, doch die Reaktionsfähigkeit von Stickstoff und Sauerstoff bei verschiedenen Temperaturen illustrieren dürfte.

---

1) Wiener Monatshefte 18 S. 78 (1893).

2) Pyrochem. Untersuchungen S. 66.

Zeiten, die erforderlich sind, damit in Luft von Atmosphärendruck sich die Hälfte des möglichen Stickoxyds bildet.

Tabelle 6.

Temp.	Sekunden
1200°	sehr lange
1538°	97
1737°	3,5
2600°	ca. 0,018.

Offenbar ist es die außerordentliche Trägheit des Stickstoffs, die bei Temperaturen, bei denen wir sonst einen momentanen Verlauf anzutreffen gewohnt sind, noch meßbare Zeiträume liefert. Eine genauere Untersuchung der Geschwindigkeitsverhältnisse dürfte auch als ein Beispiel für die Aenderung der Reaktionsgeschwindigkeit innerhalb eines sehr weiten Temperaturintervalls von allgemeinerem Interesse sein.

6. Gleichgewichtstabelle.

In der Gleichung

$$K = \frac{[NO]^2}{[N_2][O_2]}$$

wird, indem wir die Volumprozente x des gebildeten NO einführen,

$$K = \frac{x^2}{\left(79{,}2 - \frac{x}{2}\right)\left(20{,}8 - \frac{x}{2}\right)}$$

(79,2 bez. 20,8 Gehalt der Luft an N_2 bez. O_2). Die Gleichung

$$\log^{10} \frac{K_0}{K} = \frac{43200\,(T_0 - T)}{4{,}584 \,.\, T_0\, T}$$

wird für

$$T_0 = 2200, \qquad x_0 = 0{,}99$$

$$\log^{10} \frac{x}{\sqrt{\left(79{,}2 - \frac{x}{2}\right)\left(20{,}8 - \frac{x}{2}\right)}} = \log^{10} 0{,}0249 - 2{,}141 \frac{2200 - T}{T}$$

oder, da $\frac{x}{2}$ klein gegen 20,8 ist, hinreichend genau

$$\log^{10} \frac{x}{40{,}8\,(1 - 0{,}0152\,x)} = \log^{10} 0{,}0249 - 2{,}141 \frac{2200 - T}{T}.$$

In der folgenden Tabelle ist

$$\sqrt{K} = \frac{x}{40{,}8\,(1 - 0{,}0152\,x)}$$

für eine Reihe von Temperaturen berechnet; in der letzten Columne befinden sich die Werte der Volumprozente x.

Tabelle 7.

T	$\sqrt{K}.10^3$	x
1500	2,52	0,10
1600	3,96	0,16
1700	5,92	0,23
1800	8,54	0,34
1900	11,6	0,46
2000	15,4	0,61
2100	19,9	0,79
2200	24,9	0,99
2300	31,2	1,23
2400	38,0	1,50
2500	45,6	1,79
2600	59,7	2,10
2700	62,7	2,46
2800	72,3	2,83
2900	82,9	3,20
3000	93,7	3,60
3200	117,9	4,43.

Wenn wir zum Schluß die beobachteten Werte neben die aus obiger Tabelle interpolierten stellen,

Tabelle 8.

T	x beob.	x ber.
1811	0,37	0,35
2033	0,64	0,67
2195	0,97	0,98
3200	ca. 5	4,4

so dürfen wir aus der unerwartet guten Uebereinstimmung wohl schließen, daß die in dieser Arbeit abgeleiteten Gleichgewichtswerte der Wahrheit sehr nahe kommen werden. —

Bei den obigen Versuchen hat mich mein Privatassistent Herr Jellinek eifrig und verständnißvoll unterstützt.

Luftelektrische Messungen bei 2 Ballonfahrten.

Von

H. Gerdien.

Vorgelegt in der Sitzung am 9. Juli 1904 durch Herrn E. Wiechert.

Methode der Leitfähigkeitsmessung.

Im Jahre 1903 hatte ich Gelegenheit, meinen Apparat zur Messung der elektrischen Leitfähigkeit, der specifischen Ionengeschwindigkeit und specifischen Ionenzahl in der freien Atmosphäre bei einigen Ballonfahrten[1]) zu verwerten. Es hatte sich gezeigt, daß die Voraussetzung, die der Methode zur Messung der Leitfähigkeit und specifischen Ionengeschwindigkeit zu Grunde lag, die langsame zeitliche Aenderung der specifischen Ionenzahl in der Atmosphäre nicht immer erfüllt ist. Am Schlusse meines Berichtes über die Messungen der Leitfähigkeit im Jahre 1903 hatte ich bereits eine Aenderung der bisher von mir angewandten Methode angegeben, welche die Messungen der Leitfähigkeit und specifischen Ionengeschwindigkeit von den Aenderungen der specifischen Ionenzahl unabhängig machen sollte. Der damals bezeichnete Weg wurde nun in der Tat durch Verwendung der folgenden Anordnung eingeschlagen. Einem Luftstrome von bekannter Geschwindigkeit wird in einem ersten Cylinderkondensator, zwischen dessen Elektroden ein hinreichend schwaches elektrisches Feld besteht, ein meßbarer Bruchteil seines Gehaltes an Ionen entzogen,

1) H. Gerdien, Die absolute Messung der elektrischen Leitfähigkeit und der specifischen Ionengeschwindigkeit in der Atmosphäre, Phys. Zeitschrift. 4, S. 632—635. 1903. Messungen der elektrischen Leitfähigkeit der freien Atmosphäre bei 4 Ballonfahrten, Nachr. d. kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1903, S. 382—399.

der Rest wird in einem zweiten Cylinderkondensator mit hinreichend starkem elektrischen Felde bestimmt.

Es seien

V_1' und V_1'' die Anfangs- und Endpotentialdifferenzen zwischen den Elektroden des ersten Cylinderkondensators, gemessen in elektrostatischem Maß,

V_2' und V_2'' die entsprechenden Potentialdifferenzen zwischen den Elektroden des zweiten Cylinderkondensators,

C_1 bezw. C_2 die Kapacität des ersten bezw. zweiten geladenen Systems,

G_1 bezw. G_2 die mittlere Luftgeschwindigkeit im ersten bezw. zweiten Cylinderkondensator,

r_{a1}, r_{i1} bezw. r_{a2}, r_{i2} die Radien der äußeren und inneren Cylinderfläche des ersten bezw. zweiten Cylinderkondensators,

l_1 bezw. l_2 die Länge der inneren Elektrode des ersten bezw. zweiten Cylinderkondensators,

t die Dauer der Beobachtung (in Sekunden),

dann gilt für den ersten Cylinderkondensator [1])

$$\varepsilon . n_p . v_p = \frac{\lg V_1' - \lg V_1''}{t} C_1 \frac{\lg\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}{2\pi l} \qquad 1)$$

und ein entsprechender Ausdruck für $\varepsilon . n_n . v_n$, worin ε die Ladung des einzelnen Ions (in elektrostatischem Maß),

v_p bezw. v_n die spec. Geschwindigkeit der positiven bezw. negativen Ionen (in elektrostatischem Maß),

n_p bezw. n_n die Zahl der positiven bezw. negativen Ionen im ccm bedeutet.

Die Geschwindigkeit des Luftstromes im ersten Cylinderkondensator muß dabei folgender Bedingung genügen [2]):

$$G_1 > \frac{2 v_{p(n)} V_1' . l}{\lg\left(\frac{r_{a1}}{r_{i1}}\right) \cdot (r_a^2 - r_i^2)} .$$

Nimmt man an, daß die Luft verschiedene Arten von Ionen eines Vorzeichens enthält, so giebt die Messung der Spannungsabnahme am ersten Cylinderkondensator $\varepsilon(n_{p1} v_{p1} + n_{p2} v_{p2} \ldots)$, worin n_{p1}, $v_{p1} \ldots$ die specifischen Ionenzahlen bezw. specifischen Ionengeschwindig-

1) Vergl. H. Gerdien, l. c.

2) In meiner Arbeit „Messungen der elektrischen Leitfähigkeit ...“, Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1903, S. 385 steht im Zähler der entsprechenden Formeln irrtümlich der Faktor 4 statt 2.

keiten für die einzelnen Ionenarten bezeichnen; dabei hat die Luftgeschwindigkeit in dem ersten Cylinderkondensator der obigen Formel zu genügen, in der für $v_{p(n)}$ der größeste vorkommende Wert einzusetzen ist. Bezeichnet man die Leitfähigkeit der Luft mit λ, die Aggregate $\varepsilon . u_{p1} v_{p1}$ mit λ_{p1}, $\varepsilon . u_{p2} v_{p2}$ mit $\lambda_{p2} \ldots$, der Gesammtanteil der positiven Ionen an der Leitfähigkeit mit λ_p und den der negativen Ionen mit λ_n, so ergiebt also eine Messungsreihe mit negativer Ladung der inneren Elektrode des ersten Cylinderkondensators $\lambda_p = \lambda_{p1} + \lambda_{p2} \ldots$ eine solche mit positiver Ladung $\lambda_n = \lambda_{n1} + \lambda_{n2} \ldots$, und $\lambda = \lambda_p + \lambda_n$ und zwar unabhängig von der Luftgeschwindigkeit G_1. Die Voraussetzungen über die Art der Luftströmung, des elektrischen Feldes der Ionisierung und der Molisierung sind die in meinen früheren Arbeiten erörterten.

Ist der zweite Cylinderkondensator in seinen Dimensionen, seinem elektrischen Felde und der Luftgeschwindigkeit G_2 so bemessen, daß er dem durchgesaugten Luftstrome alle darin noch vorhandenen Ionen entzieht, so gilt:

$$\varepsilon . n_p = \frac{C_1 (V_1' - V_1'') + C_2 (V_2' - V_2'')}{\pi . (r_{a1}^2 - r_{i1}^2) G_1 . t} \qquad 2)$$

und der entsprechende Ausdruck für $\varepsilon . n_n$. Nimmt man wieder für jedes Vorzeichen verschiedene Ionenarten an, so gelten die entsprechenden Formeln; eine Messungsreihe mit negativer Ladung der inneren Elektroden giebt also

$$\varepsilon . n_p = \varepsilon (n_{p1} + n_{p2} \ldots)$$

und eine entsprechende Messungsreihe mit positiver Ladung

$$\varepsilon . n_n = \varepsilon (n_{n1} + n_{n2} \ldots).$$

Es ließe sich auch für den zweiten Cylinderkondensator unter der Voraussetzung geradliniger Stromkurven leicht die Bedingung angeben, der die Luftgeschwindigkeit G_2 zu genügen hat, damit alle Ionen dem Luftstrome entzogen werden, doch soll davon Abstand genommen werden, weil durch Wirbelbildung hinter der inneren Elektrode des ersten Cylinderkondensators wahrscheinlich in Wirklichkeit eine rechnerisch nicht verfolgbare Durchmischung des Luftstromes erfolgt [1]).

1) Aus diesem Grunde war der hintere Kondensator so dimensioniert, daß schon ohne das Vorhandensein des ersten Kondensators die Entziehung aller Ionen gesichert war. Vgl. auch S. 285.

Aus den Formeln 1) und 2) ergeben sich v_p bezw. v_n und zwar im Falle mehrerer Ionenarten von jedem Vorzeichen die sogenannten mittleren spec. Ionengeschwindigkeiten

$$v_p = \frac{n_{p1} v_{p1} + n_{p2} v_{p2} \cdots}{n_{p1} + n_{p2} \cdots}$$

und

$$v_n = \frac{n_{n1} v_{n1} + n_{n2} v_{n2} + \cdots}{n_{n1} + n_{n2} + \cdots}.$$

Apparate zur Messung der Leitfähigkeit.

Die Apparate zur Messung der Leitfähigkeit, die bei den beiden Fahrten benutzt wurden, unterschieden sich wesentlich durch die Konstruktion des ersten geladenen Systems, dessen Elektroden auf geringe Potentialdifferenz geladen werden sollten.

Nach langwierigen Versuchen, die das Ziel hatten ein Elektrometer von etwa 5 bis 20 Volt Meßbereich zu schaffen, das einer festen, sorgfältig horizontierten und erschütterungsfreien Aufstellung nicht bedurfte, schien mir die bekannte Bohnenbergersche Anordnung nach Anbringung einiger Aenderungen, die sie für Arbeiten im Luftballon geeignet machen, die vorteilhafteste zu sein. Das Aluminiumblättchen des Elektrometers stand in leitender Verbindung mit der inneren Elektrode des ersten Cylinderkondensators, die beiden Platten, zwischen denen es im Inneren des Elektrometergehäuses frei herabhing, wurden durch je eine in staubdichter Umhüllung untergebrachte, in ihrer Spannung getrennt regulierbare Zambonisäule auf entgegengesetzt gleichen Potentialen gehalten.

Die Zambonisäulen waren mittels Bajonettverschlusses am Elektrometergehäuse befestigt und konnten schnell durch Reservesäulen ersetzt werden, sobald sie infolge niedriger Temperatur oder aus anderen Gründen versagten. Die auf entgegengesetzt gleiche Potentiale geladenen Elektrodenplatten hatten eine solche Form erhalten, daß einerseits ein Anschlagen des Aluminiumblättchens unmöglich gemacht, andererseits ein geeigneter Gang der Empfindlichkeit innerhalb des Meßbereichs des Elektrometers erreicht wurde. Man konnte durch Regulieren der Säulenspannung erreichen, daß das Blättchen zwischen 3 und 10 Volt etwa 1 mm Ausschlag für 1 Volt gab, daß dagegen über 10 Volt Spannung die Empfindlichkeit bis auf etwa 8 Volt/mm Ausschlag sank. Die unter etwa 3 Volt liegenden Spannungen waren infolge der unsicheren Einstellung des Aluminiumblättchens in der Nähe der

Nulllage nicht mit der wünschenswerten Genauigkeit meßbar. Die parallaxefreie Ablesung der Blättchenausschläge geschah mittels Lupe und gespiegelter Skala in der von Elster und Geitel[1]) angegebenen Form; unter der Millimeterteilung der Skala war eine kleine Libelle befestigt, deren Blase gleichzeitig mit der Ablesung des Blättchenausschlags im Spiegel beobachtet und durch Anheben des Apparates in die Nullstellung gebracht wurde. 1 mm Verschiebung der Blase entsprach einem Anschlag des Blättchens aus der Ruhelage um etwa 0,1 mm. Die innere Elektrode des ersten Cylinderkondensators, deren aus einer dünnen stählernen Blattfeder gebildeter Träger von oben frei in das Elektrometergehäuse hineinragte und an seinem unteren Ende das Aluminiumblättchen trug, ruhte auf einem im Inneren des Elektrometergehäuses untergebrachten, vor Staub und Feuchtigkeit gut geschützten Bernsteinisolator. Durch zwei seitlich in das Elektrometergehäuse eingeführte Schubstangen konnten die Elektrodenplatten von den Polen der Zambonisäulen abgehoben und von beiden Seiten gegen die Befestigungsstelle des Aluminiumblattes gedrückt werden, dem sie so auf dem Transport als Schutzbacken dienten.

Wegen der Veränderlichkeit der Zambonisäulen, die zum Laden der Elektrodenplatten dienten, mußte die Empfindlichkeit des Elektrometers vor und nach jeder Messung kontrolliert werden. Dieses geschah mittels einer Batterie von 40 kleinen Kalomel-Elementen (1 Kalomel-Element = 1,06 Volt bei Zimmertemperatur), die auf Hartgummirähmchen in einem kleinen Holzkasten montiert waren. Auf dem Deckel des Kastens waren 5 isolierte Kontaktstifte angebracht, zwischen denen je 10 Elemente lagen. Da die kleine Eichbatterie sich ausgezeichnet bewährt hat und es vielleicht für luftelektrische Beobachtungen auf Reisen von Wichtigkeit sein kann, stets die Eichung der Blättchenelektrometer unmittelbar nach ihrem Gebrauch kontrollieren zu können, soll die Herstellung dieser transportablen Elemente kurz beschrieben werden. Ein Glasröhrchen von 6 mm lichter Weite, 1 mm Wandstärke und 7 cm Länge ist an einem Ende zugeschmolzen; in den Boden ist eine Elektrode aus 0,5 mm dickem Platindraht eingeschmolzen. Man bringt in das Gläschen einen Tropfen reines Quecksilber, schüttet darüber etwa 10 mm hoch Kalomel, befeuchtet mit 5 bis 10%iger Zinkchloridlösung und setzt darauf einen Stopfen aus Glaswolle;

---

1) J. Elster und H. Geitel, Ueber eine Verbesserung der Ablesung am Exnerschen Elektroskop, Phys. Zeitschr. 4. S. 137—138. 1902.

auf die Glaswolle setzt man ein Stück Glasstab von etwa 15 mm Länge, das mit sehr geringem Spielraum in das 6 mm im Lichten messende Röhrchen hineinpaßt. Ueber den Glasstab preßt man wieder mit Zinkchloridlösung befeuchtete Glaswolle bis zu einem Abstande von etwa 20 mm vom oberen Ende des Röhrchens. In die Glaswolle läßt man das Ende eines 1 mm dicken und 4 mm breiten Zinkblechstreifens hineinragen, der außerhalb des Röhrchens rechtwinklig umgebogen und mit einem angelöteten Kupferdraht versehen ist. Das Ende des Gläschens wird mit geschmolzener Harz-Gummi-Kittmasse zugegossen. Die Verbindung der Elemente geschieht mittels kleiner Messingdoppelklemmschrauben. Bei der Füllung der Elemente wird immer eine an der Glaswolle haftende kleine Luftblase mit eingeschlossen, die das Gläschen bei Temperaturänderungen vor dem Zersprengtwerden schützt. Der nahezu dicht schließende Glasstab in der Mitte des Elementes verhindert, daß von der Zinkelektrode abfallende Partikel in das Quecksilber geraten und giebt dem Element im Verein mit den Glaswollestopfen einen inneren Widerstand, der es gegen Kurzschluß unempfindlich macht.

Die Batterie von 40 Elementen hat in ihrem sehr stark gearbeiteten Schutzkästchen ein Gewicht von 1250 gr.

Die Konstanten des bei der Fahrt vom 14. IV. benutzten Apparates waren folgende:

$$C_1 = 15{,}2 \text{ cm}, \quad C_2 = 17{,}4 \text{ cm}.$$
$$l_1 = 20 \text{ cm}, \quad l_2 = 31{,}2 \text{ cm}.$$
$$r_{a1} = r_{a2} = 2{,}45 \text{ cm}.$$
$$r_{i1} = 0{,}25 \text{ cm}, \quad r_{i2} = 0{,}50 \text{ cm}.$$
$G_2 = 390$ cm/sec (bei einer Umlaufszeit des Federgehäuses von 33 sec).

Die Erprobung des Apparates bei der Ballonfahrt vom 14. IV. zeigte eine Reihe von Schwierigkeiten, die zum Teil die Genauigkeit der Leitfähigkeits-Bestimmungen herabdrückten, zum Teil aber auch durch den Zeitaufwand, den sie zu ihrer Ueberwindung erforderten, sehr störend wurden. Die Einstellung der Libelle des Bohnenbergerschen Elektrometers, die auf fester Unterlage keine Schwierigkeit bietet, ist im Ballonkorbe eine nur schwer lösbare Aufgabe; für die nach jeder Benutzung des Elektrometers notwendige Eichung mittels der Normalbatterie wurde zuweilen wegen der Schwierigkeiten, die diese Einstellung machte, eine größere Zeit beansprucht als für die eigentlichen Messungen. Dazu kam, daß wegen der verhältnismäßig kleinen Kapacität des vorderen Systems die Spannungsabnahme an diesem schon einen

gut meßbaren Betrag erreichte, während an dem zweiten Elektrometer noch keine hinreichend genau meßbare Abnahme der Blättchendivergenz eingetreten war. Da mir überdies die Verwendung von Zambonisäulen zu Meßzwecken bei niedrigen Temperaturen, wie sie bei einer Hochfahrt vorkommen, selbst bei dauernder Kontrolle der Elektrometer-Empfindlichkeit Bedenken erregte, nahm ich sofort nach meiner Rückkehr von der ersten Fahrt die Umänderung [1]) des Apparates in Angriff.

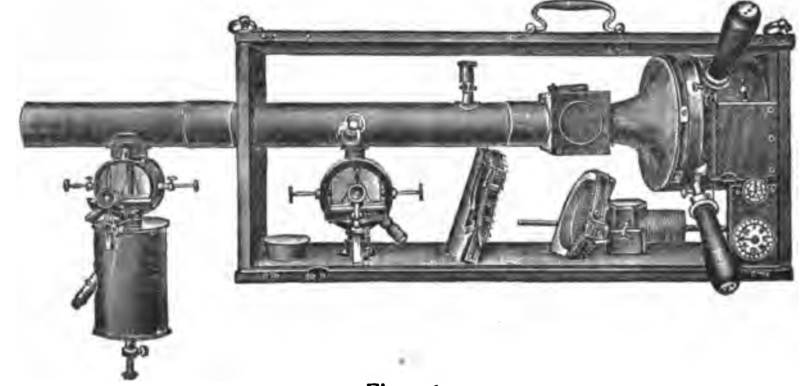
Bei meinen früheren Arbeiten hatte sich eine variable Kapacität als Mittel zur Herstellung niedriger Spannungsdifferenzen bewährt; es lag daher nahe, wieder diese Methode zu verwenden, zumal sie den nicht unwesentlichen Vorteil bietet, bei dem vorderen geladenen System je nach der Größe der zu messenden specifischen Ionengeschwindigkeiten verschiedene Kapacitäten anzuwenden, wodurch es möglich gemacht wird, die Ablesungen an dem Blättchenelektrometer immer an den zur Erreichung einer möglichst hohen Genauigkeit günstigsten Stellen des Meßbereichs vorzunehmen.

Die Dimensionen des vorderen Cylinderkondensators waren die gleichen, wie diejenigen des bei der Fahrt am 14. IV. benutzten Apparates. Der Träger der inneren Elektrode besteht (wie bei den früher von mir benutzten Anordnungen) aus einer dünnen Blattfeder; diese ist auf dem Blättchenträger eines Aluminiumblattelektrometers befestigt, dessen Gehäuse dicht mit dem äußeren Rohr des Cylinderkondensators verbunden ist. Der Blättchenträger durchdringt den isolierenden Bernsteinstopfen des Elektrometers und trägt an seinem unteren Ende ein System konaxialer Röhren (Wandstärke 0,5 mm, freie Länge 32 mm, äußerer Durchmesser des äußersten Rohres 30 mm. Der isolierende Bernsteinstopfen ist fest in ein Rohr von 4 mm Wandstärke eingepaßt [2]), das an seinem unteren Ende eine hartangelötete Messingplatte trägt. Mit dieser sind 3 unter Winkeln von 120° versetzte parallele cylindrische Führungsstangen verschraubt (Durchmesser 10 mm), deren untere Enden durch eine andere Platte fest ver-

1) Der tatkräftigen Unterstützung der Herren Spindler u. Hoyer ist es zu danken, daß dieser Umbau des Apparates in seinen wesentlichen Teilen in der kurzen Zeit bis zu der nächsten Fahrt am 5. V. 1904 gelang.

2) Da der thermische Dilatationskoeffizient von Bernstein erheblich größer ist als derjenige von Messing, empfiehlt es sich, um ein Lockerwerden des Stopfens in seiner Fassung bei niedrigen Temperaturen zu verhüten, das Messingrohr vor dem Einpassen des Stopfens etwas anzuwärmen; zu starke Erwärmung führt leicht zu Sprüngen im Bernstein, welche mit Verschlechterung der Isolation verbunden sind.

bunden sind. Die drei Stangen dienen einem zweiten System konaxialer Röhren (Wandstärke 0,5 mm, freie Länge 32 mm, äußerer Durchmesser des äußersten Rohres 32 mm) als Geradführung, das vertikal soweit nach oben oder unten verschoben werden kann, daß es in das obere isolierte System (mit 0,5 mm Abstand der Rohrwände) auf 30 mm Länge hineintaucht oder bis zu einem Abstande der Rohrenden von 10 mm von diesem entfernt ist. Beide Rohrsysteme sind von einer cylindrischen Büchse (8,5 cm Durchmesser, 13,5 cm Länge) staubdicht umschlossen, deren obere Stirnplatte mit dem Elektrometergehäuse verschraubt ist, während die untere centrisch einem mit Stopfbüchse abgedichteten und mit Millimeterteilung versehenen cylindrischen Stift den Durchtritt gestattet, mittels dessen das bewegliche Rohrsystem von außen um meßbare Beträge verschoben werden kann. Das obere Ende des Stiftes ist nicht fest mit dem Rohrsystem verbunden, sondern besitzt seitlich 2 mm Spielraum und in der vertikalen Richtung 1 mm toten Gang; da so das ganze innere System völlig frei von den Wänden der umhüllenden Büchse ist, können Stöße und Beschädigungen, welche diese treffen, nicht zu Deformationen der im Inneren befindlichen Teile führen [1]). Der vordere Cylinderkondensator nebst Elektrometer und variabler Kapacität wird zum Transport neben dem zweiten Cylinderkondensator verpackt; für die Messungen wird das äußere Rohr des vorderen Cylinderkondensators auf das äußere Rohr des hinteren Cylinderkondensators aufgesetzt, dessen vorderes Ende aus der Stirnwand des umhüllenden Schutzkastens hervorragt (siehe Figur 1). Beide Elektrometer wie



Figur 1.

1) Bei dem am 5. V. 1904 benutztem Apparat war die Geradführung des beweglichen Rohrsystems noch nicht in der beschriebenen Art vor Deformationen geschützt, auch konnte aus Mangel an Zeit nur die Verschiebung zwischen zwei festen End-Anschlägen eingerichtet werden. Auf der Rückreise hatte der Apparat Deformationen erlitten, die seinen weiteren Gebrauch ausgeschlossen haben würden.

auch die variable Kapazität sind mit Natriumtrocknung versehen.

Die Dimensionen des hinteren Cylinderkondensators sind so bemessen, daß auch ohne Vorschaltung des vorderen Cylinderkondensators die vollkommene Entziehung aller Ionen aus dem durchgesaugten Luftstrome unter den angewandten Versuchsbedingungen und für die bei Atmosphärendruck vorkommenden specifischen Ionengeschwindigkeiten gesichert ist.

Da sich bei den früheren Fahrten ergeben hatte, daß die Beobachtung der Umlaufsgeschwindigkeit des Aspirators nach der bisherigen primitiven Methode (mittels Strichmarke am Umfang des Federgehäuses) die Aufmerksamkeit des Beobachters in unzulässiger Weise in Anspruch nimmt, wurde der Aspirator für die Hochfahrt vom 5. V. 1904 mit einem Zählwerk versehen. Durch eine Aenderung des Laufwerkes war die Fördergeschwindigkeit des Aspirators für diese Fahrt noch etwas gesteigert worden. Die Eichung des Aspirators geschah nach dem von Herrn H. Schering und mir ausgearbeiteten Verfahren [1]).

Die Kapacitätsbestimmung des vorderen Systems wurde nach der von mir beschriebenen Methode mittels der variabelen Kapacität ausgeführt [2]), wobei als Normalkapacität die Differenz der Kapacitäten zweier Cylinderkondensatoren von 9 cm bezw. 40 cm Länge (Radius des äußeren Cylinders 2,45 cm, des inneren 0,50 cm) benutzt wurde, deren innere Elektroden mittels centrisch aufgelöteter, 0,25 mm dicker, 2,5 cm langer Drahtstücke mit den inneren Cylindern der zu eichenden Kapacitäten in Berührung gebracht wurden. Das Verhältnis der zu einem beliebigen Skalenteil gehörigen Kapazität des variabelen Systems zur Maximalkapacität desselben wurde, soweit der Meßbereich des Blättchenelektrometers nicht ausreichte, dadurch bestimmt, daß die Maximalkapacität mittels einiger Normalelemente (in einigen Fällen wurde auch von den Enden eines bekannten Widerstandes, der von einem mittels Präcisionsmilliampèremeters gemessenen Strome durchflossen war, abgezweigt) aufgeladen und die Spannung am Blättchenelektrometer abgelesen wurde, die der zum betreffenden Skalenteil gehörigen Kapacität entsprach. Dieses Verfahren ist einfacher und

---

1) H. Gerdien und H. Schering, Ein Verfahren zur Messung der Strömungsgeschwindigkeit von Gasen mit besonderer Berücksichtigung luftelektrischer Apparate. Phys. Zeitschr. 5, S. 297—298. 1904.

2) H. Gerdien, Die Messung kleiner Kapacitäten mittels einer meßbar veränderlichen Normalkapacität. Phys. Zeitschr. 5, S. 294—296. 1904.

genauer als die successive Ausmessung der variabelen Kapacität unter alleiniger Ausnutzung des Meßbereichs des Blättchenelektrometers.

Vorbedingung für einwandfreie Messungen mittels der Kombination von Blättchenelektrometer und variabeler Kapacität ist die Verwendung fehlerloser Aluminiumblättchen im Elektrometer. Blättchen, die sich unterhalb der Befestigungsstelle nicht in starker Krümmung durchbiegen, sondern noch auf eine kurze Strecke eine geringe Steifigkeit zeigen (die durch zu starkes Benetzen mit Klebstoff hervorgerufen zu werden pflegt) sind unbrauchbar. Brauchbare Blättchen zeigen für gleiche Potentialdifferenzen innerhalb weniger Secunden die richtige Einstellung — sowohl für fallende als auch für steigende Potentialdifferenzen.

Die Konstanten des bei der Ballonfahrt vom 5. V. 1904 benutzten Apparates waren folgende:

$$C_1 \text{ (Minimum)} = 23{,}7 \text{ cm}, \quad C_1 \text{ (Maximum)} = 571 \text{ cm}, \quad C_2 = 17{,}4 \text{ cm}.$$
$$l_1 = 20 \text{ cm}, \quad l_2 = 31{,}2 \text{ cm}.$$
$$r_{a1} = r_{a2} = 2{,}45 \text{ cm}.$$
$$r_{i1} = 0{,}25 \text{ cm}, \quad r_{i2} = 0{,}50 \text{ cm}.$$

$G_2 = 493$ cm/sec. (bei einer Umlaufszeit des Federgehäuses von 18 sec.)

Apparat zur Messung des Potentialgefälles.

Bei der Ballonfahrt vom 5. V. 1904 sollten neben den Messungen der Leitfähigkeit auch solche des Potentialgefälles vorgenommen werden; auf die Bedeutung derartiger gleichzeitiger Messungen in der freien Atmosphäre habe ich bereits früher hingewiesen[1]) — sollten sie einem einzelnen Beobachter gelingen, so war auf äußerst einfache Handhabung insbesondere des Potentialgefälle-Apparates Gewicht zu legen. Mir standen bei den Vorbereitungen der Potentialgefällemessungen im Freiballon vor Allem, die von Herrn Dr. F. Linke gesammelten Erfahrungen[2]) zu Gebote.

1) Vergl. Phys. Zeitschr. 4, S. 632—635, 1903 und Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, l. c.

2) F. Linke, Ueber Messungen elektrischer Potentialdifferenzen vermittels Kollektoren im Ballon und auf der Erde, Dissert. Potsdam 1901 und Ueber Messung von Potentialdifferenzen mittels Kollektoren unter besonderer Berücksichtigung radioaktiver Substanzen. Phys. Zeitschr. 4, S. 661—664. 1903.

Die Wahl der Kollektoren konnte nicht zweifelhaft sein: wegen der gleichzeitig vorzunehmenden Leitfähigkeits-Messungen mußte jede künstliche Ionisierung der Luft, die besonders bei fallendem Ballon grobe Fehler geben kann, vermieden werden. Neben den im Ballon ohnehin ausgeschlossenen Flammenkollektoren blieben daher die Elektroden aus radioaktiven Präparaten, so verlockend die Sicherheit und Bequemlichkeit ihrer Verwendung auch ist, außer Betracht. Auch von dem Gebrauch der von H. Ebert vorgeschlagenen Aktinoelektroden[1]) nahm ich Abstand, da auch diese durch Entsendung negativer Elektronen in das umgebende Gas wirken und so eine künstliche Elektrisierung herbeiführen; auch mußte die Möglichkeit offen gehalten werden, auch in Dunstschichten und bei Nacht arbeiten zu können. Es blieben also nur Tropfkollektoren als brauchbar übrig, die sich in der ihnen von F. Linke gegebenen Form der Spritzkollektoren durch hervorragend gute Wirksamkeit und ökonomischen Flüssigkeitsverbrauch auszeichnen. Die Kollektorgefäße (aus Weißblech) hatten je $1^1/_4$ Liter Inhalt und waren an ihrem unteren Ende mit Hähnen versehen; aus den Hähnen trat die Flüssigkeit in eine 25 bezw. 15 m lange Schlauchleitung aus Paragummi von 3 mm lichter Weite und 2 mm Wandstärke (mit Stoffeinlage) ein. Neben jeder Schlauchleitung war zur Sicherung gegen Zugbeanspruchung ein Stahldraht von 0,4 mm Dicke herabgeleitet, der von 10 zu 10 cm mittels Bindfaden an ihr befestigt war. Die unteren Enden der Schlauchleitungen trugen die mit Filter und auswechselbarer Ausflußöffnung versehenen Kollektoren, deren Oeffnungen zwischen 0,1 und 0,2 mm Weite besaßen. Die Vorsicht, nahezu ein Dutzend Reserveteile mitzunehmen, erwies sich als sehr angebracht, da mehrfach ein Versagen der Kollektoren durch Verstopfung oder Bereifung eintrat. Jeder Reserveteil war vor der Fahrt auf seinen Verbrauch geprüft worden; die Ausflußzeit der Füllung von $1^1/_4$ Liter lag bei 15 m Druckhöhe zwischen 15 Minuten und 1 Stunde.

Die Kollektorgefäße hängen an mit Staub- und Feuchtigkeitsschutz versehenen Hartgummi-Isolatoren, die nach einem Vorschlag von Herrn H. Schering mit eingedrehten Nuten versehen waren; die Isolation war auch in mit Wasserdampf gesättigter Luft eine vorzügliche.

Bei Potentialgefällemessungen im Freiballon war es bisher schwierig, den bei Aenderungen der Höhenlage des Ballons zu-

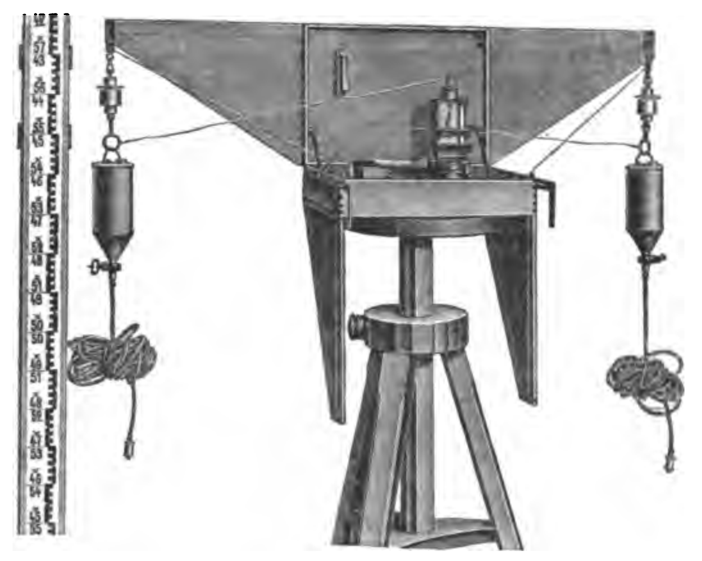
1) H. Ebert, Ueber elektrische Messungen im Freiballon, Beitr. zur Geophysik 6, S. 66—86, 1903.

weilen auftretenden großen Aenderungen des Potentialgradienten durch schnelle Aenderung des Elektrodenabstandes zu folgen, um so in dem gegebenem Meßbereich des Elektrometers zu bleiben. Es erschien mir ausgeschlossen, neben den Leitfähigkeitsmessungen noch diese Arbeiten durchzuführen, wenn nicht durch eine Verbesserung der Methode, das lästige Aendern des Elektrodenabstands vermieden werden konnte. Diese Aufgabe vermochte ich durch Verwendung eines Elektrometers mit geeignetem Meßbereich zu lösen. Innerhalb eines gemeinsamen Gehäuses befanden sich übereinander an dem gleichen (10 cm langen) Blättchenträger zwei Blättchenpaare; die unteren Blättchen bestanden aus der üblichen sehr dünnen Aluminiumfolie und waren so kurz bemessen, daß sie auch bei horizontaler Lage die Schutzbacken nicht berühren konnten. Die oberen Blättchen waren aus dickerer Folie hergestellt und etwas länger bemessen als die unteren. Der Meßbereich des unteren Blättchenpaares reichte von 40 Volt bis 300 Volt, der des oberen von 280 Volt bis etwa 800 Volt. So war es möglich, ohne Aenderung des Elektrodenabstandes von 10 m Potentialgefälle von 4 Volt/m bis zu 80 Volt/m zu messen. Für noch größere Potentialgefälle wurde eine Kette von 7,5 m Länge mitgenommen, mittels deren der 15 m lange Schlauch mit dem dazugehörigen Kollektorgefäß um 7,5 m tiefer gehängt werden konnte, so daß nun bei 2,5 m Elektrodenabstand Gefälle bis zu 320 Volt/m meßbar wurden. Das Doppelelektrometer war durch einen Hartgummi-Isolator mit Nuten isoliert; das Gehäuse war mit Natriumtrocknung versehen[1]). Die Vorzeichenbestimmung geschah in üblicher Weise durch Annähern eines mit Flanell geriebenen Hartgummistabes[2]). Es war Sorge getragen worden, lichtelektrische Effekte an allen zu den Kollektoren und dem Elektrometer gehörigen Metallteilen auszuschließen.

Die Kollektorgefäße und Schlauchleitungen wurden in einem kleinen Instrumentenkoffer verpackt; das Elektrometer war unter Zwischenschaltung zweier zu einander senkrechter Gelenke auf dem Boden eines flachen Kastens (vergl. Figur 2) ($30 \times 50 \times 10$ cm) montiert, konnte mittels zweier dreigängigen Stellschrauben schnell angenähert vertikal gestellt, und zum Transport auf den Boden

1) Bei den Vorarbeiten zu den Potentialgefällemessungen unterstützte mich in dankenswerter Weise Herr H. Schering, Assistent am geophysikalischen Institut.

2) Für Potentialgefällemessungen in Wolken und Dunstschichten, wo schnelle Wechsel des Vorzeichens vorkommen, wird sich ein dauernd angeschaltetes Bohnenberger-Elektroskop zur Vorzeichenbestimmung empfehlen.



Figur 2.

des Kastens umgeklappt werden. In dem Kasten fanden auch die Isolatoren, die Reserveteile und Zubehör Platz. Nach Herunterklappen zweier am Kastenboden mittels Scharnieren befestigter dreieckiger Bretter und Vorziehen zweier an den Seiten des Kastens verschiebbarer Metallhaken konnte der Kasten als Konsole nach außen am Rande des Ballonkorbes befestigt werden. Der Deckel des Kastens ließ sich dann außen in der Vertikalebene durch zwei Haken feststellen; an seiner Rückseite waren wiederum mittels Scharnieren zwei dreieckige Bretter befestigt, die seitwärts ausgeschwungen werden konnten und an ihren nun in einem Abstand von 1,50 m befindlichen äussersten Ecken Haken zum Einhängen der Isolatoren und der an diesen hängenden Kollektoren trugen. Die ganze Anordnung ließ sich schnell gebrauchsfertig machen und verpacken und konnte so bei der Landung nicht gefährlich werden. Die Kollektorgefäße wurden mit 96 % Spiritus gefüllt, der in einem Sack von 20 Liter Inhalt aus Ballonstoff (nebst Umhüllungssack von grober Leinwand) mitgeführt wurde.

Verhütung von Ballonladungen. Ballast.

Nachdem schon eine Reihe von Beobachtern auf die Störungen durch Ballonladungen aufmerksam geworden war, die alle luftelektrischen Messungen im Freiballon beeinträchtigen, gelang

H. Ebert[1]) der Nachweis, daß diese Ladungen wesentlich durch reibungselektrische Vorgänge beim Sandwerfen hervorgerufen werden. Bei meinen früheren Ballonfahrten hatte ich auf Vorschlag von Herrn Dr. F. Linke versucht, diese Ladungen durch Wirkenlassen eines nahe unter dem Korbboden angebrachten Spritzkollektors zu beseitigen. Dieser Spritzkollektor war auch bei der Fahrt vom 5. V. 1904 in Tätigkeit. Da jedoch nach meinen früheren Erfahrungen noch eine andere schädliche Wirkung des feinen Ballastsandes (Ionenadsorption) zu befürchten blieb, suchte ich den Ballastsand wenigstens für die Dauer der luftelektrischen Messungen durch ein anderes, unschädliches Material zu ersetzen.

Vorversuche, die ich an einem böigen Tage im Freien vornahm, hatten mir gezeigt, daß die Temperaturabnahme eines mit 50 Litern warmen Wassers gefüllten Ballonstoffsackes[2]) (mit Umhüllungssack aus grober Leinwand) bei einer Temperaturdifferenz von 40° C. gegen die Lufttemperatur etwa 4° C. in der Stunde beträgt. Da im Ballon die Ventilation nur sehr schwach ist und da die Sonnenstrahlung im allgemeinen in denjenigen Höhen, in denen die Lufttemperatur sehr niedrig wird, eine große Intensität zeigt, schien es mir wenigstens für eine Tagfahrt von 12 Stunden Dauer wohl durchführbar, den Sandballast zum Teil durch warmes Wasser zu ersetzen, ohne ein Einfrieren desselben befürchten zu müssen. Ich verwendete bei beiden Fahrten 2 Säcke von je 50 Litern Inhalt, die oben und unten mit 30 mm weiten Schlauchansätzen versehen waren; an die unteren Schlauchansätze waren etwa 5 m lange Stücke von gummiertem Hanfschlauch angeschlossen. Die Säcke wurden vor der Abfahrt mit warmem Wasser von 60—70° C. gefüllt und liessen sich leicht von zwei Mann zum Korbe tragen, wo sie an dem Ringe über den Köpfen der Korbinsassen befestigt wurden. Der Ausfluß des Wassers konnte durch Schraubenquetschhähne reguliert werden. Diese Einrichtung erlaubte es im Verein mit einem von Herrn Prof. Wiechert angegebenen sehr empfindlichen Vertikalanemometer, das die geringsten Vertikalgeschwindigkeiten des Ballons gegen die umgebende Luft sofort zu erkennen und zu messen gestattet, die Höhenlage des Ballons während der Messungen in bisher unerreichter Vollkommenheit konstant zu halten. Die technischen Einzelheiten der Warmwasser-Ballast-

---

1) H. Ebert, Ueber elektrische Messungen im Freiballon, Beitr. zur Geophysik 6, S. 66—86, 1903.

2) Bezogen von A. Riedinger in Augsburg.

Einrichtung haben sich durchaus bewährt. Selbst für nächtliche Hochfahrten mit der dann auftretenden Ausstrahlung wird man den Warmwasser-Ballast unbesorgt verwenden können, wenn man für etwas geringere Wärmedurchlässigkeit des Sackes (etwa durch Wattieren des Umhüllungssackes) sorgt; es dürfte sich nicht empfehlen, die Dimensionen des einzelnen Sackes noch größer zu wählen — schon bei den 50 Liter-Säcken ist das Befestigen am Ringe bei etwas windigem Wetter nicht leicht.

Resultate.

1. Ballonfahrt. Abfahrt von der Charlottenburger Gasanstalt, 14. April 1904, $8^h 34^m$ a. Landung nahe Ober-Oberau bei Lüben (Schlesien), $7^h 15^m$ p. Ballonführer: Dr. H. Elias, Teilnehmer: H. Gerdien. Am Tage der Fahrt lagerte hoher Luftdruck über dem bottnischen Busen und über Südosteuropa und war im Begriff, sich über Mitteleuropa auszubreiten. Eine tiefe Depression lag westlich der britischen Inseln und hatte einen Ausläufer niedrigen Druckes bis über Norddeutschland ausgesandt. Die Fahrt fand in dem Uebergangsgebiet zwischen niedrigem Druck und hohem Druck auf der Südseite dieses Ausläufers statt. Der Verlauf der Isothermen in der Höhe war nach den Aufzeichnungen des berliner Aeronautischen Observatoriums [1]) ein äußerst schnell wechselnder: in der Nacht vom 13. zum 14. April trat von 1000 bis zu 3000 m Höhe Abkühlung ein, doch schon im Laufe des 14. April schnellen die Isothermen wieder in die Höhe.

Am Morgen der Abfahrt war der Himmel ganz bedeckt und zeitweise fiel Regen; doch klarte das Wetter bald auf — in der Höhe zeigten sich Alto-Cumuli und Alto-Stratus, in geringen Höhen wuchsen aus dunstigem Untergrunde Cumuli hervor, die im Laufe des Vormittags schnell an Mächtigkeit gewannen und dem Ballon, der infolge seiner schweren Leuchtgasfüllung sie nicht leicht überflügeln konnte, keine ruhige Höhenlage zu halten erlaubten. Abwechselnd ergriffen aufsteigende Luftströme in der Nähe der Cumuli, in die der Ballon gelegentlich hineingezogen wurde, und absteigende Ströme in den Lücken zwischen ihnen den Ballon, der bald ungehinderter Sonnenstrahlung ausgesetzt zu steigen, bald von einer Wolke beschattet zu fallen gezwungen war.

Die Leitfähigkeitsmessungen, die bei dieser Fahrt vorgenommen

---

1) Das Wetter, 1904, Heft 5.

wurden, sind außer durch die oben erörterten Mängel des Apparates auch durch die unruhige Höhenlage des Ballons beeinträchtigt, die infolge häufiger vertikaler Beschleunigungen die Einstellung der Elektrometerblättchen beeinflußt haben dürfte. Die in nachstehender Tabelle zu den betreffenden Höhen angegebenen Werte der Leitfähigkeit, der specifischen Ionengeschwindigkeit und Ionenzahl sind als Mittelwerte für die vom Ballon durchschnittenen Schichten zu betrachten.

Zeit	Höhe über dem Meere in Metern	$\lambda_p . 10^4$	$\frac{v_p}{300}$	$\varepsilon . n_p . 10^6$	$\lambda_n . 10^4$	$\frac{v_n}{300}$	$\varepsilon . n_n . 10^6$	Rel. Feuchtigkeit in %	Bemerkungen
$10^h 06^m$ a.— $10^h 36^m$ a.	850—1100				(1,2)	(1,2)	0,33	85	Gegen Schluß der Messung ist der Ballon in der Nähe eines großen Cumulus.
$10^h 48^m$ a.— $11^h 09^m$ a.	1350—1200	(0,9)	(1,0)	0,31				75	Der Ballon überfliegt den Cumulus, der sich dann auflöst.
$12^h 22^m$ p.— $12^h 37^m$ p.	1500				2,0	1,4	0,48	81	Ueber einer Lücke zwischen den Cumuli.
$12^h 47^m$ p.— $1^h 02^m$ p.	1450—1680	1,6	1,1	0,47				75	Während der Messung fließt sehr langsam Wasserballast aus.
$2^h 45^m$ p.— $3^h 00^m$ p.	2150—2000				(3,8)	(1,9)	0,66	65	Ringsum mächtige Cumuli.
$3^h 10^m$ p.— $3^h 25^m$ p.	1950—1730	2,1	1,6	0,43				70	Es erscheinen Cirren.
$3^h 39^m$ p.— $3^h 54^m$ p.	1600—1700				(2,2)	(1,9)	0,88	70	Der Wasserballast geht zu Ende.
$4^h 09^m$ p.— $4^h 18^m$ p.	1550—700	—	—	(0,15)				—	Der Ballon ist nicht zu halten; zum Schluß der Messungsreihe muß Sandballast gegeben werden.

Während der letzten Messungsreihe beobachtete ich, daß die negative Ladung des zum ersten Cylinderkondensator gehörigen Elektrometers zunahm, so oft Sand in den Korb hinein wirbelte; es ist daher eine Auswertung der Messungen unterlassen worden. Die in Klammern gesetzten Zahlen sind unsicher.

Die Messungen der Leitfähigkeit und der specifischen Ionengeschwindigkeit zeigen, soweit sie einwandfrei erscheinen, eine Zunahme beider mit der Höhe; diese scheint besonders stark da aufzutreten, wo der Ballon aus dem etwas dunstigen Untergrunde

der Cumulusregion in absteigende Ströme klarer Luft hineinkommt. Der Anteil der negativen Ionen an der Elektricitätsleitung scheint nur wenig größer zu sein als derjenige der positiven. Die specifische Ionenzahl erhebt sich nur wenig über die am Erdboden vorkommenden Werte und erreicht selbst in der verhältnismäßig klaren Luft in der Höhe von 2150—2000 m nur einen Wert, der 0,66 elektrostatischen Einheiten in cbm entspricht. Die specifischen Zahlen der positiven und negativen Ionen weichen in entsprechender Höhe nur innerhalb der Beobachtungsfehler von einander ab. Das ganze Bild des Verlaufes der Leitfähigkeit, specifischen Ionengeschwindigkeit und der Ionenzahl zeigt große Aehnlichkeit mit demjenigen, das von Herrn Prof. Wiechert bei der Ballonfahrt vom 2. August 1903 vorgefunden wurde [1]). Auch der 2. August 1903 war ein Tag mit lebhafter Cumulus-Bildung in den unteren Schichten. Bemerkenswert sind auch die bei beiden Fahrten übereinstimmend erhaltenen relativ kleinen Werte der specifischen Ionengeschwindigkeiten; ob diese Verminderung der Beweglichkeit der Ionen in der Nähe von Cumulus-Wolken, also in Gebieten stürmischer Kondensation des Wasserdampfes eine regelmäßige ist, wird erst ein größeres Beobachtungsmaterial zeigen können.

2. Ballonfahrt. Abfahrt von Berlin, Uebungsplatz des Luftschiffer-Bat., 5. Mai 1904, $8^h\,37^m$ a. Landung nahe Tyczyn, 15 km von Sjeradz, Russ. Gouvernement Kalisch, $7^h\,25^m$ p. Ballonführer: Dr. H. Elias, Teilnehmer: H. Gerdien. Am 4. Mai lag eine Depression über dem Bottnischen Busen, während hoher Druck die Witterung in West-Europa beherrschte; über Mittel-Europa lagerte ziemlich gleichmäßig verteilter Luftdruck. Am Tage der Fahrt zog die Depression nordostwärts weiter, im Westen der britischen Inseln erschien eine neue Depression und auch über dem südöstlichen Europa bildete sich ein Gebiet niedrigen Druckes aus. Das westliche Hochdruckgebiet vom Vortage hatte sich über Frankreich behaupten können; in Deutschland herrschte gleichmäßig verteilter Druck. Der vertikale Temperaturgradient war im Mittel $0{,}63^\circ/_{100}$ m, in Höhen bis zu 6000 m, zeigte also eine verhältnismäßig stabile Wetterlage an. Bis zu einer Strato cumulus-Decke in der Höhe von 1400 bis 1900 m war der Gradient nahezu der des adiabatischen Gleichgewichts, über der

1) Vergl. H. Gerdien, Phys. Zeitschr. 4, S. 632—635, 1903 und Nachr. der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl., 1903, Heft 6.

Wolkendecke waren nur vereinzelte Cirren erkennbar und ungeschwächt trafen die Sonnenstrahlen auf das Wolkenmeer.

Am Morgen der Fahrt herrschte unter der Wolkendecke böige Witterung, welche die Abfahrt einigermaßen erschwerte; an die Montage der Apparate konnte vor der Abfahrt nicht gedacht werden, da der Ballon in wilden Pendelungen die haltenden Mannschaften hin und herzerrte; mit Mühe gelang es, den Wasserballast an dem Ringe zu befestigen. Der 1250 cbm fassende Ballon war mit 1100 cbm Wasserstoffgas gefüllt worden; da während des Abwiegens der Füllansatz sich öffnete, mag er unter dem heftigen Winddruck wohl 100—150 cbm vor dem Loslassen verloren haben. Unmittelbar nach dem Loslassen geriet der Ballon trotz schleuniger Ballastausgabe mit dem Korbe in einer Telegraphenleitung fest, aus der er sich erst nach weiteren Ballastopfern löste, um nun, infolge seines starken Auftriebes seiner durch den Gasverlust in recht beträchtliche Höhe verlegten Gleichgewichtslage zuzueilen. Schnell war die Wolkendecke erreicht und durchstoßen und rund eine Viertelstunde nach der Abfahrt schwebte der Ballon in 3200 m Höhe. Wohl unter der schädlichen Nachwirkung dieser schnellen Druckerniedrigung auf die Korbinsassen konnte die Montage der Apparate erst 1³/₄ Stunden nach der Abfahrt beendigt werden. Ueber der Strato-Cumulus-Decke begannen nun die luftelektrischen Messungen; gegen Mittag wurde, da die geschlossene Wolkendecke bisher eine genauere Orientierung verhindert hatte, unter die Wolken gegangen. Bei diesem Abstieg und dem darauf folgenden Aufstieg konnten beim Durchstoßen der Wolkendecke wichtige Potentialgefällemessungen vorgenommen werden. Im Laufe des Nachmittags wurde dann der Ballon stufenweise in die Höhe getrieben; es gelangen bis zur Maximalhöhe von 6090 m zusammenhängende Leitfähigkeits- und Potentialgefällemessungen[1]).

In der folgenden Tabelle sind die zusammengehörigen Höhen und Potentialgefälle, die daraus berechneten Ladungen der Volumeneinheit und von meteorologischen Daten nur die relativen Feuchtigkeiten angegeben. In den Bezeichnungen wird das absolute elektrostatische Maßsystem benutzt, daneben ist das Potentialgefälle in der üblichen Einheit (Volt/m) angeführt. Die hier angegebenen Potentialgefälle sind nicht korrigiert wegen der Influenz des Ballons oder wegen eventuell vorhandener Ballonladungen; nach Untersuchungen von Herrn Dr. F. Linke, die demnächst

---

1) Herrn Dr. H. Elias bin ich für seine freundliche Unterstützung bei der Handhabung des Potentialgefälle-Apparates zu Dank verpflichtet.

publiciert werden sollen, ist bei der hier verwendeten Anordnung eines dritten Kollektors in geringem Abstande unter dem Korbe die Korrektion wegen Influenz des Ballons nur klein. Ballonladungen dürften infolge der ausschließlichen Verwendung von Wasserballast unmittelbar vor und während der luftelektrischen Messungen und infolge der Wirksamkeit des dritten Kollektors ausgeschlossen sein.

Zeit	Höhe über dem Meere in Metern	Potentialgefälle in Volt/m	Potentialgefälle in absolutem elektrostat. Maß	Räumliche Dichte in absolutem elektrostat. Maß	Relat. Feuchtigkeit in %	Bemerkungen
$11^h 19^m$ a.	2916	+ 12,8	+ $4{,}3 . 10^{-4}$	—$1{,}56 . 10^{-10}$ (11h 19m – 11h 25m)	40	Ueber den Wolken.
$11^h 21^m$ a.	2924	+ 10,4	+ 3,1 „		—	„
$11^h 25^m$ a.	2948	+ 11,3	+ 3,8 „		—	„
$11^h 33^m$ a.	2717	+ 7,6	+ 2,5 „	—3,19 „ (11h 33m – 11h 40m)	43	„
$11^h 40^m$ a.	2733	+ 11,9	+ 4,0 „		—	„
$11^h 50^m$ a.	2650	+ 8,9	+ 3,0 „	+ 0,55 „	—	„
$11^h 58^m$ a.	2505	+ 9,3	+ 3,1 „	— 1,52 „	—	„
$12^h 04^m$ p.	2400	+ 8,6	+ 2,9 „	+ 17,1 „	—	„
$12^h 08^m$ p.	2274	+ 16,7	+ 5,6 „	(+ 11,4) „	—	„
$12^h 10^m$ p.	2267	+ 17,1	+ 5,7 „	(+ 136) „	—	„
$12^h 12^m$ p.	2281	+ 10,0	+ 3,3 „	+ 5,7 „	—	Dicht über den Wolken.
$12^h 19^m$ p.	1949	+ 17,0	+ 5,7 „	(— 67,5) „	51	Wind.
$12^h 21^m$ p.	1962	+ 20,3	+ 6,8 „	(+ 301) „	77	Viel Wind von S.
$12^h 22^m$ p.	1971	+ 10,1	+ 3,4 „	(— 75,1) „	58	Obere Wolkengrenze.
$12^h 24^m$ p.	1989	+ 15,3	+ 5,1 „	—	100	Der Ballon schwimmt auf den Wolken, zuweilen fliegen Nebelfetzen in den Korb; Wind!
$12^h 25^m 15^s$ p.	1989	+ 7,6	+ 2,5 „	(+ 159) „	94	
$12^h 27^m$ p.	1975	+ 16,0	+ 5,3 „	(— 250) „	95	
$12^h 29^m 30^s$ p.	1982	+ 22,4	+ 7,5 „	(+ 111) „	100	
$12^h 32^m 30^s$ p.	1972	+ 26,8	+ 8,9 „	(— 452) „	98	In den Wolken.
$12^h 37^m 30^s$ p.	1960	+ 6,4	+ 2,1 „	(— 604) „	100	Der Füllansatz ist nur ganz verschleiert sichtbar.
$12^h 46^m$ p.	1948	— 21,0	— 7,0 „	(— 46,5) „	100	
$12^h 47^m$ p.	1924	— 25,1	— 8,4 „	— 3,06 „	97	
$12^h 48^m 30^s$ p.	1872	— 25,8	— 8,6 „	(+ 297) „	96	
$12^h 50^m$ p.	1843	+ 6,6	+ 2,2 „	(+ 4,18) „	95	
$12^h 53^m 30^s$ p.	1805	+ 7,2	+ 2,4 „	(+ 152) „	96	
$12^h 57^m 30^s$ p.	1865	— 27,2	— 9,1 „	(+ 239) „	97	
$12^h 58^m$ p.	1873	— 34,4	— 11,5 „	(+ 99,6) „	—	
$12^h 59^m 30^s$ p.	1885	— 39,0	— 13,0 „	(+ 56,4) „	—	
$1^h 02^m$ p.	1861	— 34,0	— 11,3 „		—	
$1^h 04$ p.	1842	unmessbar klein, dann positiv		positive Ladungen	97	Die Erde wird zuweilen sichtbar; die Messungen müssen abgebrochen werden.

Nach Gelingen des Orientierungsversuchs wird der Ballon wieder hochgetrieben; Ballast-Verbrauch 4½ Sack Sand.

Zeit	Höhe über dem Meere in Metern	Potentialgefälle in Volt/m	Potentialgefälle in absolutem elektrostat. Maß	Räumliche Dichte in absolutem elektrostat. Maß	Relat. Feuchtigkeit in %	Bemerkungen
$2^h 17^m 30^s$ p.	1404	+ 16,5	$+ 5,5 . 10^{-4}$	$+ 5,02 . 10^{-10}$	92	Der Ballon taucht in die Wolken.
$2^h 20^m$ p.	1515	+ 14,5	+ 4,8 „	— 11,2 „	96	
$2^h 22^m$ p.	1572	+ 16,9	+ 5,6 „	— 35,6 „	—	In den Wolken.
$2^h 24^m$ p.	1648	+ 27,1	+ 9,0 „	(— 228) „	—	„
$2^h 25^m 30^s$ p.	1655	+ 33,1	+ 11,0 „	(— 28,7) „	—	Es wird oben heller.
$2^h 26^m 30^s$ p.	1680	+ 35,6	+ 11,9 „	(+ 23,2) „	98	
$2^h 28^m 30^s$ p.	1728	+ 31,5	+ 10,5 „	— 11,5 „	97	
$2^h 30^m$ p.	1853	+ 36,9	+ 12,3 „	(— 86) „	100	Noch immer in den Wolken.
$2^h 30^m 30^s$ p.	1879	+ 45,4	+ 15,1 „	(— 20,7) „	—	
$2^h 31^m$ p.	1906	+ 47,5	+ 15,8 „	(+ 49) „	—	Die Sonne dringt durch.
$2^h 32^m$ p.	1958	+ 37,8	+ 12,6 „	+ 21,9 „	92	Obere Wolkengrenze, Wind.
$2^h 34^m 30^s$ p.	2078	+ 27,9	+ 9,3 „	+ 12,3 „	52	Dicht über den Wolken.
$2^h 37^m$ p.	2311	+ 17,0	+ 5,7 „		16	Ueber den Wolken.
$4^h 23^m$ p.	4913	+ 6,4	+ 2,1 „	(— 3,24) „	6	Der Ballon wird durch Ausgabe von Wasserballast im langsamen Steigen erhalten.
$4^h 37^m$ p.	5036	+ 7,7	+ 2,6 „		—	
$5^h 17^m$ p.	(5850)	+ 8,7	+ 2,9 „	(+ 2,66) „	—	
$5^h 27^m$ p.	(5880)	+ 8,4	+ 2,8 „		—	

Nach Verbrauch des Wasserballastes wurde ½ Sack Sandballast gegeben; momentan stellte sich starke Blättchendivergenz ein, die einem positiven Gefälle von 45 Volt/m entsprach. Sie stellte sich nach Ableiten beider Elektroden schnell in angenähert dem gleichen Betrage wieder her und war nach etwa 10 Minuten noch nicht auf die Hälfte gesunken. Der dritte Kollektor wirkte während dieses Versuches nicht mehr.

Die Messungen der Leitfähigkeit, specifischen Ionengeschwindigkeit und specifischen Ionenzahl ergaben die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Resultate.

Zeit	Höhe über dem Meere in Metern	$\lambda_p \cdot 10^4$	$\frac{v_p}{300}$	$s.n_p \cdot 10^6$	$\lambda_n \cdot 10^4$	$\frac{v_n}{300}$	$s.n_n \cdot 10^6$	Rel. Feuchtigkeit in %	Bemerkungen
3h 14m p.— 3h 19m p.	4290				8,17	2,96	0,92	30	Ueber dem Ballon vollkommen wolkenloser, tiefblauer Himmel.
3h 32m p.— 3h 42m p.	4320	15,9	2,50	2,12				—	
3h 49m p.— 4h 00m p.	(4460—4540)				10,0	2,81	1,19	—	Der Ballon wird durch kontinuirliche Ausgabe von Wasserballast im langsamen Steigen erhalten.
4h 48m p.— 4h 55m p.	(5130—5180)				8,14	3,48	0,78	—	
5h 02m p.— 5h 07m p.	(5400 —5460)	14,6	3,58	1,36				—	
5h 32m p.— 5h 42m p.	(5900—5930)				10,3	3,68	0,93	—	
5h 53m p.— 6h 05m p.	6090—(6000)	14,7	4,03	1,22				—	

Diskussion der Resultate vom 5. Mai 1904.

Die Potentialgefälle-Messungen haben ergeben, daß das elektrische Feld der Atmosphäre in Höhen über 3000 m zu sehr kleinen Werten herabsinkt; dieses Resultat steht im Einklange mit den von anderen Beobachtern vorgefundenen Verhältnissen. Die vorliegenden Messungen haben die Kenntnis des Potentialgefälles bis etwa 5900 m ausgedehnt und ergaben hier das positive Gefälle von etwa 8,5 Volt/m.

Die Gefälle-Messungen in der Strato-Cumulus-Decke und ihrer Nachbarschaft zeigen das Vorhandensein stärkerer räumlicher Ladung in dem Bereich der Kondensationsprodukte an. Die räumlichen Dichten wurden unter der Annahme verschwindender horizontaler Kraftkomponenten, also einer rein schichtenförmigen Anordnung der Ladungen, und zeitlicher Konstanz der gemessenen Gefälle-Werte berechnet. Beide Annahmen sind offenbar an der oberen und unteren Wolkengrenze, wo die Kollektoren bald in Nebelfetzen gehüllt, bald wieder sichtbar waren, nicht erfüllt. Inwiefern sie für das Innere der Wolkenschicht zutreffen, bleibt ebenfalls zweifelhaft; bei dem Abstieg durch die Wolkendecke und dem etwa 2 Stunden späteren Aufstiege wurden durchaus nicht die gleichen Ladungsdichten — stellenweise nicht einmal das gleiche Vorzeichen — in entsprechenden Höhen vorgefunden.

Beim Abstieg wurden in der Wolkendecke, nahe unter ihrer oberen Grenzfläche (1960—1872 m) vorwiegend negative Ladungen vorgefunden; in dem unteren Teile der Schicht (bis herab zu 1805 m) waren vorwiegend positive Ladungen. Beim Aufstieg wurden dagegen in den unteren Teilen gerade vorwiegend negative Ladungen und nahe der oberen Grenzfläche positive vorgefunden. Dieses wechselnde Verhalten wird wohl erklärt durch die intensiven Strömungsvorgänge, die in einer solchen Schicht herrschen und notwendig eine rein schichtenförmige Anordnung der Ladungen zerstören müssen. Die Berechnung der räumlichen Dichten aus den barometrisch gemessenen Höhendifferenzen und den zugehörigen Potentialgefälle-Messungen ist natürlich mit den Fehlern behaftet, welche bei diesen Messungen vorkommen; insbesondere sind die in Klammern gesetzten Werte infolge der Kleinheit der Höhenintervalle als unsicher zu betrachten. Auch dürfte die lebhafte, bald aufwärts bald abwärts gerichtete Bewegung des Ballons in der Wolkendecke die Blättcheneinstellungen beeinträchtigt haben. Es sind diese Messungen nur als ein Versuch zu betrachten, der Frage nach den elektrischen Verhältnissen in ausgedehnten Schichtwolken näher zu treten — zur Feststellung allgemein geltender gesetzmäßiger Beziehungen wird man ein weit ausgedehnteres Beobachtungsmaterial abwarten müssen.

Die Wichtigkeit der Lösung der Ballastfrage konnte experimentell[1]) im Ballon erwiesen werden und bestätigte die von H. Ebert gefundenen für luftelektrische Arbeiten im Ballon so unheilvollen Wirkungen des Sandballastes. Bemerkenswert ist das langsame Verschwinden der einmal vorhandenen Ballonladung: nach 10 Minuten ist sie noch nicht bis auf die Hälfte zurückgegangen! Der Verbrauch von etwa 8—10 kg Sandballast täuschte also ein positives Gefälle von 45 Volt/m vor, während das wirklich vorhandene etwa 8,4 Volt/m betrug; man ersieht daraus, zu welch groben Fehlern bei luftelektrischen Messungen die ausschließliche Benutzung von Sandballast führen kann.

Die Messungen der Leitfähigkeit ergaben nahezu deren Konstanz in Höhen zwischen 4000 und 6000 m; die Leitfähigkeit der positiven Ionen ist in allen Messungsreihen etwas größer als die der negativen. Die specifischen Ionengeschwindigkeiten nehmen mit der Höhe zu und zeigen fast durchweg Werte, die etwas höher liegen, als dem Gasdruck entsprechen würde. Dieses gilt besonders von den specifischen Geschwindigkeiten der positiven

1) Vergl. S. 296.

Ionen, die zuweilen die der negativen Ionen in der gleichen Höhenlage ein wenig an Größe übertreffen. Es wäre verfrüht, bei der geringen Anzahl von Messungen auf eine neue Tatsache zu schließen; zudem liegen die Abweichungen der gemessenen Werte noch innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler. Der Gehalt an positiven Ionen zeigt eine Abnahme mit der Höhe (zwischen 4000 und 6000 m); der Gehalt an negativen Ionen ist nahezu konstant.

Aus den korrespondierenden Potentialgefälle- und Leitfähigkeitsmessungen läßt sich der elektrische Vertikalstrom in den Höhen zwischen 4000 und 6000 m berechnen. Faßt man sowohl die Leitfähigkeitsmessungen als auch die Potentialgefällemessungen in diesen Höhen zu Mittelwerten zusammen, so ergiebt sich eine Vertikalstromdichte von

$$(15,1 + 9,2) . 10^{-4} . 2,6 . 10^{-4} = 6,4 . 10^{-8}$$

in elektrostatischem Maß, oder $2,1 . 10^{-18}$ Amp./cm². Dieser Wert ist etwas kleiner, als der in meinen früheren Arbeiten ermittelte. Die wichtige Aufgabe der Messung des Vertikalstromes als Funktion der Höhe konnte noch nicht gelöst werden, da infolge der äußeren Umstände Leitfähigkeitsmessungen in den geringeren Höhen unterbleiben mußten. Ein Fortschritt ist hier wohl erst von der gemeinsamen Arbeit zweier Beobachter zu erwarten, die gleichzeitig Potentialgefälle und Leitfähigkeitsmessungen vornehmen.

Am Schlusse dieses Berichts ist es mir eine angenehme Pflicht, Herrn Geheimrat R. Aßmann, sowohl für sein freundliches Entgegenkommen, das mir wieder die Teilnahme an zwei Ballonfahrten ermöglichte, als auch für die bereitwillige Erfüllung meiner die Korbausrüstung betreffenden Wünsche meinen ehrerbietigsten Dank auszusprechen.

Göttingen, Geophysikalisches Institut, Juli 1904.

Ultramikroskopische Beobachtungen.

Von

Wilhelm Biltz.

Vorgelegt in der Sitzung vom 9. Juli 1904 durch O. Wallach.

Erste Mitteilung: Ueber die Abscheidung des Schwefels aus der Thioschwefelsäure und des Selens aus der selenigen Säure. (Gemeinschaftlich mit Willy Gahl).

Mit Hilfe der von H. Siedentopf und R. Zsigmondy aufgefundenen Methode zur Sichtbarmachung und Größenbestimmung ultramikroskopischer Teilchen [1]) ist man, wie bekannt, im Stande, die Existenz von Einzelteilchen mit Lineardimensionen bis zu 4—6 $\mu\mu$ zu erkennen. Mit dem von den genannten Forschern konstruierten Apparat, für welchen sich die Bezeichnung „Ultramikroskop“ einzubürgern beginnt, sind also Abmessungen, welche von den sogenannten molekularen Dimensionen, 0.1—0.6 $\mu\mu$, nicht mehr sehr weit entfernt sind, der Betrachtung zugänglich geworden. Diese außerordentliche Erweiterung der Grenzen sinnlicher Wahrnehmung dürfte in der Chemie, wie mir scheint, zunächst in zweierlei Hinsicht nutzbar gemacht werden können. Einerseits gestattet das Ultramikroskop eine scharfe Unterscheidung zwischen Medien, welche völlig homogen und daher „optisch leer“ sind, und solchen, welche durch mehr oder minder feine Suspensionen „getrübt“ erscheinen, es erleichtert also die Diagnose und Charakterisierung sogenannter colloidaler Lösungen. Andererseits eignet es sich zum genaueren Studium von gewissen Fällungserscheinungen, Vorgängen, bei welchen aus einem ursprünglich homogenen Gebilde ein heterogenes entsteht. In der vorliegenden Mitteilung sind

---

1) Ann. der Physik (IV) **10**, 1 (1903).

zwei Fälle dieser Art, die Zerlegung der Thioschwefelsäure: $H_2S_2O_3 = H_2SO_3 + S$ und die Umsetzung der selenigen und schwefligen Säure zu Selen und Schwefelsäure: $H_2SeO_3 + 2H_2SO_3 = H_2O + Se + 2H_2SO_4$ abgehandelt. Einige Mitteilung über ultramikroskopische Beobachtungstechnik sollen vorangeschickt werden.

Das Princip des Ultramikroskops [1]) besteht darin, daß man unter Verzichtleistung auf ähnliche Abbildung die sichtbar zu machenden Teilchen so hell beleuchtet, daß die Größe der von ihnen erzeugten Beugungsscheibchen in die Grenzen mikroskopischer Sichtbarkeit gelangt. Die Grenzen der ultramikroskopischen Sichtbarkeit sind demnach durch die Helligkeit der anwendbaren Lichtquelle gegeben. Da die Intensität der beleuchtenden Strahlen größer ist, als die der abgebeugten, wird die Beleuchtung senkrecht zur Beobachtungsrichtung angeordnet. Die Beugungsscheibchen erscheinen im Gesichtsfeld daher hell auf dunkelm Grunde. Bei Medien mit äußerst kleinen, zahlreichen Teilchen nimmt man einen mehr oder weniger intensiven nicht auflösbaren Lichtkegel wahr; bei optisch leeren Medien bleibt das Gesichtsfeld dunkel. — Wir benutzten für unsere Versuche einen für Bogenlicht eingerichteten Apparat zur Untersuchung von Flüssigkeiten. Der Beleuchtungskegel konnte durch einen Bilateralspalt dimensioniert werden und zwar wählten wir eine Spalttiefe von $^{20}/_{100}$ mm und eine etwa ebenso große Breite, derart, daß bei der am Apparate angebrachten Condensorvorrichtung in der zu beobachtenden Flüssigkeit ein Raum von etwa $(27\,\mu)^2$ Querschnitt beleuchtet wurde. Im Okular des Beobachtungsmikroskopes befand sich eine Meßteilung von 18 (3 : 6 angeordneten) Quadraten, deren Seitenlänge einer Länge von $9\,\mu$ im Objekt entsprach. Das ganze beleuchtete Gesichtsfeld betrug das fünffache des Quadratnetzes. Unsere Angaben beziehen sich stets auf das Quadratnetz als Einheit. Bei einer Spalttiefe von $^{20}/_{100}$ mm, also einer Beleuchtungstiefe von etwa $27\,\mu$ im Objekt wurde demnach ein Parallelepipedon der Beobachtung unterworfen, welcher $27\,\mu$ breit und tief, $54\,\mu$ lang war und dessen Inhalt 0.00004 mm^3 betrug. Das Objektiv des Beobachtungsmikroskops war ein Apochromat, Wasserimmersion D^* von C. Zeiß, Jena, mit einer numerischen Apertur 0.75, welches in Verbindung mit dem Huygens'schen Okular 4 eine 390fache Vergrößerung gestattete. Das Zuleitungsglasrohr der Beobachtungscuvette war mit dem Halsteil eines einfachen Einfülltrichters ohne Glashahn

1) Vgl. l. c.

unmittelbar verschmolzen. Gummischlauchverbindungen und Schliffstücke sind, wie die folgenden Versuche lehren, bei genauen Arbeiten zu vermeiden. Der Abschluß der Cuvette wurde durch einen am Abflußrohr angebrachten Gummischlauch nebst Quetschhahn bewirkt; vor der Beobachtung kamen die Flüssigkeiten nur mit ungeschliffenen Glasflächen in Berührung. Zum Einstellen wurde stets colloidale Goldlösung benutzt. Beim Wechsel der Beobachtungsobjekte ist es nötig, die Cuvette 4—5 mal, bei sehr teilchenreichen Flüssigkeiten noch öfter auszuspülen. Unmittelbar nach dem Einfüllen der Versuchslösung bemerkt man ultramikroskopisch eine ziemlich starke Strömung in der Flüssigkeit, die sich nach etwa 1' nahezu beruhigt. Bei Teilchenzählungen wurde das Maximum und Minimum in der langsam strömenden Flüssigkeit angegeben.

Eine gewisse Schwierigkeit beim Arbeiten im chemischen Laboratorium besteht bei der Empfindlichkeit des Ultramikroskops darin, die zu untersuchenden Flüssigkeiten frei von Staubteilchen oder Keimen zu erhalten[1]; dies gilt besonders dann, wenn es sich nicht um Untersuchung colloidaler Lösungen handelt, bei welchen die Zahl der charakteristischen Teilchen allerdings die der verunreinigenden bei weitem überwiegt, sondern, wenn man, wie hier von Elektrolytlösungen, welche ihrer Natur nach nahezu optisch leer sein sollen, ausgeht.

Gewöhnliches destilliertes Wasser, wie es für analytische Zwecke im Glasballons aufbewahrt wird, enthielt z. B. 1.6 Teilchen in dem bezeichneten Volumen, also im mm^3 40000 Teilchen. Außerdem war ein, wenn auch nur schwacher Lichtkegel sichtbar. Die Teilchen erschienen weiß und sendeten ziemlich vollständig polarisiertes Licht aus. Ein unmittelbar am Destillierapparate unter Staubschutz aufgesammeltes Wasser enthielt nur 0.6—0.8 Teilchen.

Spring empfiehlt in seinen bekannten Arbeiten über optisch leere Flüssigkeiten[2], man solle innerhalb des zu klärenden Mediums gelatineuse Niederschläge, wie Eisenhydroxyd, Zinkhydroxyd erzeugen, wobei die suspendierten Teilchen durch Adsorption ent-

---

1) Das Gleiche haben soeben Lobry de Bruyn und Wolff, Rec. d. trav. chim. Pays-Bas 23, 167 (1904), bei einer Diskussion der Raehlmann'schen Beobachtungen, C. 1904 I, 321 betont. Wir können der Ansicht dieser Autoren: „Sans aucun doute on constatera que dans l'examen ultramicroscopique des solutions la présence universelle de particules flottantes ultramicroscopiques (qui ne sont certainement pas en repos) présentera de sérieux inconvénients", soweit sie das Vorkommen solcher Teilchen betrifft, durchaus beipflichten.

2) Recueil de trav. chim. Pays-Bas 18, 153. 233 (1899).

fernt werden. Ein solches Verfahren liefert natürlich nur eine Lösung von bei der Reaktion entstehenden Stoffen. Eine sorgfältig geleitete Destillation guten Wassers führt, wie ebenfalls Spring fand, nicht zum Ziele; wir erhielten wechselnde Resultate, im Durchschnitte etwa 0.4—0.6 Teilchen. Dagegen gelang es, durch Combination des Spring'schen Fällungsverfahrens mit sorgfältiger Destillation in der Tat ein fast völlig optisch leeres Wasser zu erhalten. Zu diesem Zwecke wurden 600 ccm destillierten Wassers mit 150 ccm $^1/_4$n Zinksulfatlösung und 150 ccm $^1/_2$n Natronlauge gemischt und 12 Stunden sich selbst überlassen. Durch ein Heberrohr, dessen einer Schenkel in die durch Absitzen geklärte Flüssigkeit, dessen anderer in einen zum Destillieren vorbereiteten, mit ausgekochten Korkstopfen verschlossenen Kolben führte, wurde diese in den Kolben übergeführt und zwar dadurch, daß an einem Ansatzrohr der mit dem Kühler luftdicht verbundenen Vorlage mittelst der Pumpe gesaugt wurde. Nunmehr wurde das Heberrohr verschlossen und die Destillation ausgeführt. Das Destillat konnte der Vorlage mittelst eines von vornherein daselbst angebrachten sogenannten Gifthebers entnommen werden, ohne daß der Apparat geöffnet zu werden brauchte. Wurde ein derartiges Wasser im Ultramikroskop betrachtet, so zeigten sich, als nach 1′ Ruhe eingetreten war, 0 Teilchen und ein nur dem ausgeruhten Auge erkennbarer, ganz schwacher Lichtkegel. Nur sehr selten gelangte ein schwach leuchtendes Teilchen in das Gesichtsfeld.

Viel bequemer und für die meisten Zwecke völlig ausreichend ist es indessen, das Wasser durch Filtration von Teilchen zu befreien. Man benutzt, da Watte, Filtrierpapier und dgl. ausgeschlossen ist, am besten Zellen von unglasiertem Porcellan, sogenannte Pukall'sche Filter, durch welche mit der üblichen Vorsicht, daß das Filtrat nur mit glatten Glasflächen in Berührung kommt, filtriert wird. Bei ziemlich schnellem Saugen erhielten wir 0—0.6 Teilchen, bei langsamem 0—0.2 und einen ganz schwachen Lichtkegel. Beim Abstellen des bei der Saugfiltration entstandenen Vacuums muß man die eindringende Luft am besten durch Watte filtrieren, da bei unvorsichtigem Oeffnen Staubteilchen in das Filtrat geschleudert werden; ein so überaus schlechtes Filtermaterial Watte für Flüssigkeiten ist, so vorzüglich wirkt es bekanntlich für Reinigung von Luft [1]), ein gutes Beispiel, um

---

1) Vgl. Spring, Rec. d. trav. chim. Pays-Bas 18, 158. Tyndall, Fragments Scientifiques, traduction de H. Gravez, Paris 1877.

zu zeigen, in wie hohem Maße Adsorptionswirkungen von der Beschaffenheit beider angrenzenden Medien abhängen. Wasser, welches, wie beschrieben, durch Filtration gereinigt ist, soll im folgenden als P. Wasser bezeichnet werden.

Beim Arbeiten mit diesem Wasser und der Bereitung der Lösungen sind einige Vorsichtsmaßregeln nötig, die sich aus dem nachstehenden Versuchen ergeben:

Gänzlich unbrauchbar sind Gefäße mit eingeschliffenen Glasstopfen, eine Erfahrung, die, wie mir mitgeteilt wurde, bereits Herr Zsigmondy gemacht hat. Wird ein ausgedämpftes Glaskölbchen mit P. Wasser gefüllt und der Glasstopfen im Schliffe einige Male unter leichtem Andrücken gedreht, so zeigt das vorher 0—0.2 Teilchen enthaltende Wasser ein durch die äußerst zahlreichen Teilchen auffallendes ultramikroskopisches Bild, welches etwa an das einer sehr verdünnten colloidalen Platinlösung erinnert.

Ebenso ist die Berührung mit Gummi zu vermeiden. Etwa 20 ccm P. Wasser wurden mit einem 4 cm langen Stück ausgewaschenen schwarzen Gummischlauches einige Male kräftig durchgeschüttelt. Es zeigten sich im Apparate bis zu 3 Teilchen verschiedener, teilweise recht beträchtlicher Größe; ein Lichtkegel war wegen des blendenden Glanzes der größten Teilchen nicht wahrzunehmen.

Ein besonders überraschendes Resultat ergab sich, als P. Wasser in vier Portionen durch ein kleines Faltenfilter unmittelbar in den Einfülltrichter des Ultraapparates filtriert wurden. Die Flüssigkeit zeigte sehr zahlreiche, kleine weiße Teilchen, die durch ihre ziemlich lebhaften Eigenbewegungen auffielen. Die Größe der Teilchen unter sich war nahezu die gleiche; der Lichtkegel war sehr schwach, die Teilchenzahl 10—20. Auch bei der Benutzung quantitativer Filter zeigten sich ziemlich zahlreiche, allerdings äußerst kleine Teilchen, die z. T. an der Grenze der Sichtbarkeit lagen.

Als Verschlüsse für Gefäße, in denen Lösungen zur ultramikroskopischen Untersuchung bereitet oder aufbewahrt werden sollen, haben sich Korkstopfen, welche mit Stanniol umwickelt sind, recht bewährt.

Die eigentümliche Verzögerungserscheinung, welche sich bei der Zersetzung der Thioschwefelsäure bemerkbar macht, ist häufig

Gegenstand der Untersuchung gewesen [1]). Landolt, welcher als erster den zeitlichen Verlauf dieser Erscheinung maß, ging von der Anschauung aus, die Thioschwefelsäure zersetze sich tatsächlich erst in dem Augenblicke der sichtbaren Schwefelabscheidung; er bezeichnete demnach seine Messungen als solche der Existenzdauer der Thioschwefelsäure. Durch Leitfähigkeitsmessungen konnte indessen Foussereau zeigen, daß die Zerlegung der Säure im Momente ihrer Entstehung beginnt und die beobachtete Verzögerung der sichtbaren Reaktion auf einer verzögerten Abscheidung des Schwefels beruht. Zu dem gleichen Resultate gelangte Hollemann, als er bald nach der Mischung von Säure und Thiosulfat mit Alkali neutralisierte; da auch in diesem Falle Schwefelabscheidung eintritt, muß dieser bereits vor seiner makroskopischen Sichtbarkeit existieren. Hollemann gelang es ferner äußerst wahrscheinlich zu machen, daß die Reaktion von der im undissociierten Zustande vorhandenen Thioschwefelsäure und nicht von den Thiosulfationen ausgeht [2]), ein Ergebniß, das mit der Fähigkeit der Sulfitionen, umgekehrt Schwefel unter Bildung von Thiosulfationen zu addieren, correspondiert.

Zur weiteren Aufklärung der Verzögerungserscheinung bei der Einwirkung von Säure auf Thiosulfat war nunmehr noch die Frage zu beantworten, in welchem Zustande sich der entstandene Schwefel vor seiner sichtbaren Abscheidung befindet. Man konnte entweder annehmen, daß er in wirklich gelöstem Zustande oder daß er pseudogelöst vorliegt, in welchem Falle die colloidale Lösung mit wachsender Schwefelbildung allmählich in eine deutliche Suspension übergehen müsse. Nach der ersten Annahme handelt es sich um eine Uebersättigungserscheinung, welche innerhalb kurzer Zeit ausgelöst wird, nach der zweiten um die Bildung einer zunächst makroskopisch nicht wahrnehmbaren inhomogenen, colloidalen Lösung, deren Partikel mit der Zeit durch weiteres Wachsen in das Gebiet der mit dem bloßen Auge er-

1) Landolt, Ber. **16**, 1883, 2958 (1883). Foussereau, Ann. chim. phys. (XVI) **15**, 533 (1888). Colefax, Journ. chem. Soc. **61**, 176 (1892). Hollemann, Rec. d. trav. chim. Pays-Bas **14**, 71 (1895). v. Oettingen, Z. f. phys. Chem. **33**, 1 (1900).

2) Es liegt hier ein Beispiel für die häufiger zu beobachtende Erscheinung vor, daß gewissen Radikalen in Verbindung mit Elektronen eine größere Stabilität zukommt, als in Verbindung mit Atomen oder Atomgruppen; eine gut gemessene Reaktion dieser Art ist die Zersetzung des Ammoniumnitrits im Stickstoff und Wasser (Angeli u. Boeris, Acad. Linc. [5] 1, II, 70 (1892) vgl. Nernst, theoret. Chem. 2. Aufl. pg. 502); wir sind zur Zeit damit beschäftigt, in dieser Richtung weiteres Versuchsmaterial zu sammeln.

kennbaren Größe gelangen. Hiernach soll die Verzögerung nur scheinbar sein und, ihr Grad von den optischen Hilfsmitteln des Beobachters abhängen und der Vorzug selbst kontinuierlich verlaufen; im ersten Falle ist der Vorgang diskontinuierlich. Für die erste Erklärung, welche Ostwald[1]) auf Grund der Messungen Foussereaus vertritt, spricht unter anderem bereits der Umstand, daß die durch Leitfähigkeitsbestimmungen gemessene Reaktionsgeschwindigkeit bei der sichtbaren Abscheidung des Schwefels eine durch diesen bewirkte katalytische diskontinuierliche Beschleunigung erhält; auch konnte von Oettingen mit einer allerdings primitiven an das ultramikroskopische Princip erinnernden Methode einen diskontinuierlichen Verlauf beobachten.

Durch das Ultramikroskop war es leicht, zur Entscheidung beizutragen. Die benutzten Stoffe, Natriumthiosulfat und Oxalsäure waren mit möglichster Sorgfalt mehrfach, zuletzt unter Vermeidung von Filtrationen umkrystallisiert; sie wurden in P. Wasser gelöst. Die Lösungen erwiesen sich bei verschiedenen Darstellungen stets stärker durch Teilchen verunreinigt, als das P. Wasser; zur Prüfung auf Continuität oder Discontinuität des Vorganges wurde jede Lösung zunächst einzeln untersucht.

Eine $^1/_{50}$ mol. n. Thiosulfatlösung zeigte 1.2 sehr kleine Teilchen, z. T. an der Grenze der Sichtbarkeit, und einen äußerst schwachen Lichtkegel. Eine $^1/_{50}$ mol. n. Oxalsäurelösung enthielt 1.0 Teilchen. Je 10 ccm der Flüssigkeiten wurden schnell gemischt, in den Ultraapparat gebracht und beobachtet. Die Zeit ist vom Augenblick der Mischung an gerechnet.

Tabelle 1.

Temperatur 24°.

Zeit	Beobachtung[2])
10''	1—1.2 mäßig große Teilchen; Lichtkegel kaum wahrnehmbar; Strömung.
30''	Ebenso; Strömung verlangsamt sich.
1'0''—3'0''	Bild unverändert.
3' 0''	Auftreten zahlreicher sehr kleiner Teilchen, welche sich schnell vermehren.
3' 30''	Teilchen deutlich heller; Farbe weiß; oscillatorische Eigenbewegung der Teilchen unverkennbar.
4' 0''	Teilchen so hell, daß Lichtkegel nicht mehr wahrnehmbar; die

1) Ostwald, Lehrb. d. allgem. Chem. II, 2, 5. 291.

2) Die Aussagen über „die Teilchen" beziehen sich, wie, um jedes Mißverständnis auszuschließen, nochmals hervorgehoben werde, natürlich auf „die von den Teilchen erzeugten Beugungsscheibchen".

Zeit	Beobachtung
	Helligkeit der Teilchen nimmt noch merklich zu; nicht mehr deren Zahl.
5′ 0″	Eine Auszählung ergab 8—10. Die sehr hellen Teilchen erscheinen von Interferenzringen umgeben; das von ihnen abgebeugte Licht ist z. T. polarisiert.
8′ 0″	Einzelne der Teilchen erscheinen bläulich.
15′ 0″	Das Bild ist im ganzen unverändert; neben den großen Teilchen sind kleinere nicht wahrnehmbar.

Tabelle 2.

10 ccm $^1/_{50}$ mol. n. Thiosulfat + $^1/_{50}$ mol. n. Oxalsäure + 20 ccm P. Wasser; Temperatur 24°.

Zeit	Beobachtung
1′ 0″	0.8—1.0 Teilchen. Schnelle Strömung.
1′ 30″	Lichtkegel erkennbar; Strömung läßt nach.
3′ 30″	Bild unverändert.
5′ 30″	Ebenso.
7′ 0″	Vielleicht mehr Teilchen.
7′ 30″	Deutlich mehr Teilchen; nach roher Schätzung 4.
8′ 0″	Nach Zählung 5—6 Teilchen.
9′ 0″	Teilchen deutlich heller; Lichtkegel nicht mehr wahrzunehmen; das abgebeugte Licht z. T. polarisiert.
11′ 0″	Etwa 4 sehr helle Teilchen; Farbe weiß bis bläulich; Interferenzringe.

Hierdurch ist nachgewiesen, daß der Vorgang der Schwefelabscheidung auch bei ultramikroskopischer Beobachtung diskontinuierlich erscheint und zwar tritt, wie besondere, mit den gleichen Lösungen angestellte Versuche ergaben, die Diskontinuität etwa zur selben Zeit, wie die mit bloßem Auge erkennbare Opalescens auf. Bildete sich zunächst eine colloidale Lösung von Schwefel, so wäre im Ultraapparat ein sich allmählich verstärkender Lichtkegel zu erwarten gewesen, der sich einem Anwachsen der Teilchen entsprechend nach einiger Zeit als auflösbar erweist, wenn anders die Nichtexistenz optisch leerer colloidaler Lösungen außer Frage steht[1]). Die zeitweilig existierende Lösung von

1) Echte colloidale Lösungen von Schwefel sind vermutlich blau; man erhält derartige, allerdings höchst unbeständige Lösungen bekanntlich beim Vermischen verdünnter Ferrichlorid- und Schwefelwasserstofflösungen. Eine Adsorptionsverbindung von blauem colloidalen Schwefel mit Substraten, wie Aluminiumoxyd und Kieselsäure ist vielleicht das Ultramarin. Falls sich diese Vermutung bewahrheiten sollte, hätte man in diesem Produkte ein vollkommenes Analogon zum Cassius'schen Goldpurpur zu erblicken.

Schwefel in Wasser muß demnach als echte Lösung angesehen werden. Sie ist zu vergleichen mit der farblosen Lösung von Gold in Glas, die das zunächst optisch leere Goldglas vor der zur Bildung des Goldrubinglases nötigen Wiedererwärmung repräsentiert.

Im Gegensatze zu der Zersetzung der Thioschwefelsäure bietet das folgende Beispiel einen Fall, in welchem makroskopische und ultramikroskopische Beobachtung zu verschiedenen Ergebnissen führen. Wird eine wässerige Lösung seleniger Säure mit schwefliger Säure reduciert, so scheidet sich das gebildete Selen sehr allmählich in amorpher Form aus der Flüssigkeit ab. Makroskopisch erhielten wir z. B. folgende Beobachtungsreihe:

Tabelle 3.

10 ccm $^1/_{10}$ mol. n. Lösung von SeO_2 + 10 ccm $^1/_5$ mol. n. Lösung von SO_2; Temperatur 21°.

Zeit	Beobachtung
30″	Aeußerst schwach gelbliche Flüssigkeit.
1′	Schwach gelblich.
2′	Etwas stärker.
3′	Deutliches, ohne Anstrengung wahrnehmbares Gelb.
4′	Ebenso.
30′	Lösung etwas getrübt.
50′	Trübung der Lösung deutlich rötlich.
1^h 45′	Lösung rot.
12^h	Roter Absatz an den Gefäßwänden.
48^h	Dichter blutroter, flockiger Niederschlag; Lösung farblos.

Das zu den Versuchen verwendete Selendioxyd war sorgfältig gereinigt worden. Man löst das rohe, meistens rötliche Präparat in conc. Salpetersäure, dampft die nach dem Verdünnen filtrierte Lösung mehrmals mit Wasser ab und sucht aus der zurückbleibenden Masse die reinsten Teile aus, die einer nochmaligen Sublimation unterworfen und dann in P. Wasser gelöst werden.

Das Schwefeldioxyd wurde einer Bombe entnommen, durch Watte filtriert und in P. Wasser geleitet. Die Lösungen waren zunächst nicht rein:

$^1/_{10}$ mol. n. SeO_2 zeigte 1.2 große Teilchen; $^1/_5$ mol n. SO_2 1.6—2 sehr kleine Teilchen. Ein zweimaliges langsames Filtrieren durch eine Pukallsche Zelle ergab das folgende günstige Resultat:

$^1/_{10}$ mol. n. SeO_2 : 0.2—0.4 sehr kleine Teilchen; schwacher Lichtkegel.

$^1/_5$ mol. n. SO_2 : 0—0.2 sehr kleine Teilchen; ganz schwacher Lichtkegel.

Der ultramikroskopische Versuch bot ein wegen der Schärfe der Reaktion, der lebhaften Eigenbewegung der Selenteilchen und des auffallenden Farbenspieles besonders schönes Schauspiel:

Tabelle 4.

10 ccm $^1/_{10}$ mol. n. SeO_2 + 10 ccm $^1/_5$ mol. n. SO_2; Temperatur 22°.

Zeit	Beobachtung
20″	0—0.6 sehr kleine Teilchen; Strömung.
1′	Ebenso; schwächere Strömung; schwacher Lichtkegel.
2′ 20″	Sehr kleine Teilchen, welche sich schnell vermehren.
2′ 40″	Die Ausscheidung der Teilchen scheint beinahe vollendet; ihre Größe nimmt deutlich zu.
2′ 50″	Weiteres Anwachsen der Teilchen.
3′ 20″	Die Teilchen zeigen lebhafte oscillatorische Eigenbewegung; eine Auszählung ergab 36 Teilchen (9×10^5 pro mm^3); das abgebeugte Licht ist schwach polarisiert.
4′ 20″	Das Licht der, lebhafte Zickzackbewegungen ausführenden Teilchen ist blendend hell und rein weiß.
5′ 20″	Licht bläulich. Interferenzringe.
7′ 20″	z. T. rote Teilchen.
8′ 20″	Neben den roten Teilchen noch scharf begrenzte weiße bis blaue Teilchen.

Tabelle 5.

5 ccm $^1/_{10}$ mol. n. SeO_2 + 5 ccm $^1/_5$ mol. n. SO_2 + 20 ccm P. Wasser; Temperatur 22°.

Zeit	Beobachtung
30″	0.4 Teilchen bei schneller Strömung.
1′ 30″	0.6 „ „ „ „
2′ 30″	0 Teilchen; ganz schwacher Kegel; keine Strömung.
5′	Ebenso.
6′ 30″	Teilchen (?)
7′ 30″	Zeitweiliges Auftreten einiger Teilchen; vermutlich durch Strömung bedingt.
10′ 30″	Aeußerst schnelle Vermehrung der Teilchenzahl; Teilchen zeigen lebhafte Eigenbewegung.
11′ 30″	Die Teilchen sind noch ziemlich klein.
12′	Eine Auszählung ergab 8 Teilchen.
12′ 30″	Eine zweite Auszählung der nunmehr ziemlich hellen Teilchen ergab deren 12.
16′	Resultat der Auszählung ebenso.
17′	Teilchen verändern sich nicht mehr wesentlich; abgebeugte Licht schwach polarisiert.
18′	Teilchen z. T. blendend weiß.
19′	Teilchen teilweise bläulich; stets lebhafte Eigenbewegungen.

Bei dem ersten Versuche blieb, wie ersichtlich das Gesichtsfeld über 2' nahezu dunkel, die Teilchenabscheidung vollzog sich innerhalb von 30', von wo ab nur noch eine Vergrößerung und Farbenveränderung der abgeschiedenen Partikel zu erkennen war. Bei dem zweiten Versuche blieb das Reaktionsgemisch 10' leer, die Abscheidung war indessen wesentlich langsamer und erst nach etwa 8' eine von da ab nahezu konstant bleibende Teilchenzahl erreicht. Für die Deutung der Erscheinungen gilt das über die Schwefelabscheidung gesagte.

Derartige Verzögerungserscheinungen bei der Entstehung unlöslicher Niederschläge, bedingt durch primäre Bildung wahrer übersättigter Lösungen scheinen demnach häufiger zu sein, als es bei makroskopischer Betrachtung den Anschein hat.

Der Firma C. Zeiß, Jena, bin ich für die zeitweilige Ueberlassung eines Ultramikroskopes für die geschilderten Versuche zu größtem Danke verpflichtet.

Dichteste gitterförmige Lagerung kongruenter Körper.

Von

H. Minkowski.

Vorgelegt in der Sitzung vom 25. Juni 1904.

Wir beschäftigen uns hier mit folgendem Probleme: Gegeben ist ein beliebiger Grundkörper K. Lauter mit K kongruente und parallel orientirte Körper in unendlicher Anzahl sollen im Raume in gitterförmiger Anordnung derart gelagert werden, daß keine zwei der Körper in einander eindringen und daß dabei der von den Körpern erfüllte Teil des Raumes gegenüber dem von ihnen freigelassenen möglichst groß ist.

Unter einer gitterförmigen Anordnung der Körper verstehen wir, daß entsprechende Punkte in ihnen ein parallelepipedisches Punktsystem (Gitter) bilden. Wir beschränken die Untersuchung auf konvexe Körper.

Die Lösung dieses Problems gestattet interessante Anwendungen in der Zahlenlehre und ist auch für die Theorie von der Struktur der Krystalle von Bedeutung[1]). Aus der Kenntniß der dichtesten Lagerung von Kugeln folgen (§ 7) fast unmittelbar alle Tatsachen der Gauß-Dirichlet'schen Theorie der Parallelgitter (d. s. die Sätze über die arithmetische Reduktion der positiven ternären quadratischen Formen). Die dichteste Lagerung von Oktaedern (§ 9) giebt Aufschlüsse über die simultane Approximation zweier Größen durch rationale Zahlen mit gleichem Nenner. Die hier abgeleiteten allgemeinen Theoreme über gewisse

1) Vgl. in letzterer Hinsicht: Lord Kelvin, Baltimore lectures on molecular dynamics, London 1904, S. 618 u. flgde.

Ungleichungen (§ 5) endlich bilden in ihrer Anwendung auf Parallelepipede und Oktaeder, bez. auf Kreiscylinder und Doppelkegel die Grundlage für die zweckmäßigsten Algorithmen zur Ermittlung der Fundamentaleinheiten in den kubischen Zahlkörpern von positiver bz. negativer Diskriminante.

§ 1. Analytische Formulirung des Problems und Reduktion auf den Fall von Körpern mit Mittelpunkt.

1. Es sei K ein beliebiger konvexer Körper. Wir führen rechtwinklige Koordinaten ξ, η, ζ mit einem Punkte O als Anfangspunkt ein, den wir uns im Inneren von K denken. Es sei J das Volumen von K. Sind λ, μ, ν irgend welche Werte, so werde der größte Wert des linearen Ausdrucks $\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta$ für die Punkte ξ, η, ζ im ganzen Bereiche von K mit $H(\lambda, \mu, \nu)$ bezeichnet. Diese Funktion H definirt den Körper K vollständig, sie heißt die Stützebenenfunktion von K. Sie genügt den Bedingungen

$$\left.\begin{array}{l} H(0,0,0) = 0,\ H(\lambda,\mu,\nu) > 0 \\ H(t\lambda, t\mu, t\nu) = tH(\lambda,\mu,\nu) \end{array}\right\} (\lambda, \mu, \nu \neq 0, 0, 0;\ t > 0),$$

$$H(\lambda_1 + \lambda_2, \mu_1 + \mu_2, \nu_1 + \nu_2) \leqq H(\lambda_1, \mu_1, \nu_1) + H(\lambda_2, \mu_2, \nu_2),$$

und jede Funktion $H(\lambda, \mu, \nu)$, die diesen Bedingungen genügt, ist die Stützebenenfunktion eines konvexen Körpers mit O im Inneren[1]).

2. Bedeutet P einen Punkt ξ, η, ζ, so bezeichnen wir den Punkt $-\xi, -\eta, -\zeta$ als Gegenpunkt von P und mit P'.

Die Gegenpunkte zu den sämmtlichen Punkten von K bilden den konvexen Körper K' mit der Stützebenenfunktion

$$H'(\lambda, \mu, \nu) = H(-\lambda, -\mu, -\nu),$$

das Spiegelbild von K in Bezug auf den Punkt O.

Die Funktion $\frac{1}{2}(H(\lambda, \mu, \nu) + H(-\lambda, -\mu, -\nu))$ bildet alsdann die Stützebenenfunktion für einen gewissen konvexen Körper, den wir mit $\frac{1}{2}(K + K')$ bezeichnen und der in O einen Mittelpunkt hat. Dieser Körper ist der Bereich aller solchen Punkte, welche irgendwie als Mitte einer Verbindungsstrecke eines Punktes von K mit einem Punkte von K' auftreten.

Ist z. B. K ein Tetraeder, so wird $\frac{1}{2}(K + K')$ ein Oktaeder mit Flächen parallel den Flächen des Tetraeders.

Das Volumen von $\frac{1}{2}(K + K')$ ist stets größer als das Volumen von K, wenn K ein Körper ohne Mittelpunkt ist (l. c. § 7). Hat

1) Math. Ann. Bd. 57, S. 447.

K selbst einen Mittelpunkt, so entsteht K' und weiter $\frac{1}{2}(K+K')$ durch bloße Translation aus K.

3. Es sei

$$(1)\quad \xi = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z,\ \eta = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z,\ \zeta = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z$$

eine beliebige lineare Substitution mit einer von Null verschiedenen Determinante, deren Betrag Δ heiße. Wir betrachten das Zahlengitter in x, y, z, d. i. das parallelepipedische System ($\mathfrak{G}$) aller derjenigen Punkte G, für welche die Bestimmungsstücke x, y, z sämmtlich ganze Zahlen sind. Den Bereich

$$0 \leqq x < 1,\ 0 \leqq y < 1,\ 0 \leqq z < 1$$

nennen wir das Grundparallelepiped des Gitters ($\mathfrak{G}$), sein Volumen ist Δ. Durch Parallelverschiebung dieses Bereichs von O nach jedem einzelnen Punkte des Gitters erhalten wir eine lückenlose einfache Ueberdeckung des Raumes.

Wir denken uns ferner mit dem Körper K diese Translationen des Gitters, die Parallelverschiebungen vom Nullpunkte O nach den einzelnen Gitterpunkten G ausgeführt, und wir nehmen an, daß alle so entstehenden Körper K_a (den Körper $K = K_0$ inbegriffen) gesondert sind, d. h. unter einander höchstens in den Begrenzungen zusammenstoßen.

Zu diesem Ende wird bereits hinreichend sein, daß speciell der Körper K in keinen anderen der Körper K_a eindringt. Ist nun G ein beliebiger, von O verschiedener Gitterpunkt, so muß es dann irgend eine Ebene geben, welche K von K_a sondert so, daß die ihnen etwa gemeinsamen Punkte in die Ebene fallen und im Uebrigen K ganz auf einer Seite, K_a ganz auf der anderen Seite dieser Ebene bleibt. Sind λ, μ, ν die Richtungskosinus des von O auf die Ebene gefällten Lotes, so hat die Ebene von O einen Abstand $\geqq H(\lambda, \mu, \nu)$ und von G einen Abstand $\geqq H(-\lambda, -\mu, -\nu)$; die dazu parallele Ebene durch G hat daher von O einen Abstand

$$\geqq H(\lambda, \mu, \nu) + H(-\lambda, -\mu, -\nu).$$

Der Gitterpunkt G liegt also außerhalb oder auf der Grenze desjenigen Körpers $\mathfrak{K} = K + K'$, der durch Dilatation des Körpers $\frac{1}{2}(K+K')$ vom Mittelpunkte O aus im Verhältnisse $2:1$ entsteht. Daraus entnehmen wir insbesondere die Folgerung:

Aus einem konvexen Körper K entstehen durch die Translationen eines Gitters ($\mathfrak{G}$) lauter geson-

derte Körper dann und nur dann, wenn die entsprechende Tatsache für den zu K gehörigen konvexen Körper $\frac{1}{2}(K+K')$ mit Mittelpunkt statthat.

4. Die Begrenzung von $\mathfrak{K} = K+K'$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}$. Wir definiren eine Funktion $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ für beliebige reelle Argumente, indem wir für die Punkte ξ, η, ζ auf der Fläche $\mathfrak{F}$ die Gleichung $\varphi(\xi, \eta, \zeta) = 1$, ferner allgemein

$$\varphi(t\xi, t\eta, t\zeta) = t\varphi(\xi, \eta, \zeta)$$

bei positivem t und $\varphi(0,0,0) = 0$ festsetzen.

Daß $\mathfrak{K}$ ein konvexer Körper ist, findet in der allgemeinen Funktionalungleichung

$$(2) \qquad \varphi(\xi_1+\xi_2,\ \eta_1+\eta_2,\ \zeta_1+\zeta_2) \leqq \varphi(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)+\varphi(\xi_2, \eta_2, \zeta_2),$$

und daß $\mathfrak{K}$ in O einen Mittelpunkt hat, in der Funktionalgleichung

$$\varphi(-\xi, -\eta, -\zeta) = \varphi(\xi, \eta, \zeta)$$

seinen Ausdruck.

Wir setzen ferner mit Rücksicht auf die Substitution (1):

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = f(x, y, z).$$

Damit alle Körper K_a gesondert liegen, muß alsdann für jedes von 0, 0, 0 verschiedene ganzzahlige System x, y, z die Ungleichung

$$(3) \qquad f(x, y, z) \geqq 1 \qquad (x, y, z \neq 0, 0, 0)$$

bestehen.

5. Im unendlichen Raume ist nunmehr einem jeden Gitterpunkt G einerseits genau ein Volumen $= \varDelta$ und andererseits ein mit K kongruenter Körper vom Volumen J zugeordnet, also muß jedenfalls

$$(4) \qquad J \leqq \varDelta$$

sein, und wir werden sagen können, der von den Körper K_a erfüllte Raum verhält sich zu dem ganzen unendlichen Raume wie $J:\varDelta$.

Wir bemerken insbesondere, daß die Körper K_a den Raum lückenlos erfüllen, wenn $J = \varDelta$ ist. Da nun das Volumen J^* von $\frac{1}{2}(K+K')$ ebenfalls noch $\leqq \varDelta$, aber, wenn K keinen Mittelpunkt hat, $> J$ ist, so schließen wir, daß eine lückenlose Ueberdeckung des Raumes durch die Körper K_a notwendig das Vorhandensein eines Mittelpunktes in K verlangt.

Die Aufgabe, die wir uns zu stellen haben, ist nun, die Koefficienten $\alpha_1, \ldots \gamma_3$ der Substitution (1)

derart zu wählen, daß, während die sämmtlichen Ungleichungen (3) erfüllt sind, dabei der Betrag der Determinante Δ möglichst klein ausfalle.

§ 2. Hülfssatz über ganzzahlige Substitutionen.

6. Es seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ irgend drei von O verschiedene Punkte des Gitters in x, y, z, welche in drei unabhängigen, d. h. nicht in eine Ebene fallenden Richtungen von O aus liegen, so entsteht die Frage, wie man von den vier Punkten $O, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ aus dieses ganze Gitter ($\mathfrak{G}$) aufbauen kann.

Zu jedem Punkte $P(x, y, z)$ im Raume gehören bestimmte Werte $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, so daß der Vektor OP mit den Vektoren $O\mathfrak{A}$, $O\mathfrak{B}$, $O\mathfrak{C}$ durch eine Relation

$$OP = \mathfrak{x}\,.\,O\mathfrak{A} + \mathfrak{y}\,.\,O\mathfrak{B} + \mathfrak{z}\,.\,O\mathfrak{C}$$

verbunden ist, und sind danach x, y, z gewisse lineare Formen in $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ mit ganzzahligen Koefficienten. Den Bereich

$$0 \leqq \mathfrak{x} < 1,\ 0 \leqq \mathfrak{y} < 1,\ 0 \leqq \mathfrak{z} < 1$$

bezeichnen wir kurz als das Parallelepiped $O(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ und die Bestimmungsstücke $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ nennen wir die zu diesem Parallelepiped gehörigen Koordinaten.

Das Gitter ($\mathfrak{G}$) besitzt diese Grundeigenschaft: Sind G_0, G_1, G_2 irgend drei Punkte des Gitters, so gehört derjenige Punkt G_3, für den Vektor $G_2G_3 = G_0G_1$ ist, stets ebenfalls zum Gitter. Auf Grund dieses parallelogrammatischen Charakters des Gitters können wir durch die folgenden Forderungen drei gewisse Gitterpunkte A, B, C völlig eindeutig fixiren (Fig. 1):

1) es soll A von O verschieden sein und auf der Strecke $O\mathfrak{A}$ möglichst nahe an O liegen;

2) es soll B in der Ebene $O\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ außerhalb der Geraden $O\mathfrak{A}$ auf derselben Seite von ihr wie $\mathfrak{B}$ zunächst möglichst nahe an dieser Geraden und nächstdem derart liegen, daß von O nach einem Punkte des Strahles $O\mathfrak{B}$ ein Vektor

$$OB + X.OA$$

hinführt, wobei $0 \leqq X < 1$ ist;

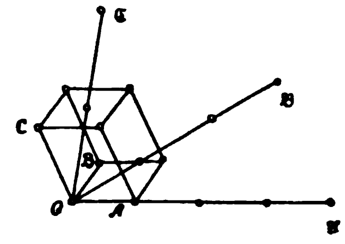


Fig. 1.

3) es soll C außerhalb der Ebene $O\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ nach derselben Seite

hin wie $\mathfrak{C}$ zunächst möglichst nahe an dieser Ebene und nächstdem so liegen, daß von O nach einem Punkte des Strahles $O\mathfrak{C}$ ein Vektor

$$OC + X.OA + Y.OB$$

hinführt, wobei $0 \leqq X < 1$, $0 \leqq Y < 1$ ist.

7. Nachdem A, B, C ermittelt sind, haben wir für jeden Punkt P im Raume eine bestimmte Vektorenrelation:

$$OP = X.OA + Y.OB + Z.OC.$$

Bei ganzzahligen X, Y, Z finden wir in P jedesmal einen Gitterpunkt aus ($\mathfrak{G}$) und sind infolgedessen x, y, z gleich linearen ganzzahligen Formen in X, Y, Z. Nach der Bestimmungsweise von A, B, C aber kann es keinen Gitterpunkt x, y, z außer dem Nullpunkte geben, für den $0 \leqq Z < 1$, $0 \leqq Y < 1$, $0 \leqq X < 1$ ist, und giebt es infolgedessen überhaupt keinen Gitterpunkt x, y, z außer denjenigen, für welche auch X, Y, Z ganzzahlige Werte haben, d. h. auch X, Y, Z sind lineare ganzzahlige Formen in x, y, z. Mithin ist nicht bloß die Determinante der Formen x, y, z in X, Y, Z, sondern auch deren reciproker Wert eine ganze Zahl und also diese Determinante ± 1, mithin das Gitter ($\mathfrak{G}$) völlig identisch mit dem Zahlengitter in X, Y, Z. Wir kommen damit zu folgendem Satze:

Sind x, y, z irgend welche lineare ganzzahlige Formen in $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ mit einer von Null verschiedenen Determinante, so kann man stets (und nur auf eine Weise) drei lineare ganzzahlige Formen X, Y, Z in x, y, z mit einer Determinante ± 1 einführen, daß Relationen

$$X = a_1 \mathfrak{x} + a_2 \mathfrak{y} + a_3 \mathfrak{z}, \quad Y = b_2 \mathfrak{y} + b_3 \mathfrak{z}, \quad Z = c_3 \mathfrak{z}$$

entstehen, wobei die ganzzahligen Koefficienten den Bedingungen

$$a_1 > 0,\ b_2 > 0,\ c_3 > 0; \quad 0 \leqq \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{c_3},\ \frac{b_3}{c_3} < 1$$

genügen.

Die Einführung der Variablen X, Y, Z anstatt x, y, z nennen wir die Reduktion des Zahlengitters ($\mathfrak{G}$) in Bezug auf das Parallelepiped $O(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ und ferner bezeichnen wir $O(ABC)$ als reducirtes Grundparallelepiped.

§ 3. Zusammenrücken einer gitterförmigen Lagerung in drei Richtungen.

8. Wir denken uns die 9 Koefficienten $\alpha_1, \dots \gamma_3$ in (1), welche ein Gitter (𝔊) in Bezug auf den Körper K orientiren, als stetig veränderliche Größen, während alle Ungleichungen (3) bestehen sollen, also kein Gitterpunkt außer O in's Innere des Bereichs $\mathfrak{K} = K + K'$ falle. Nach (4) muß dabei stets $\Delta \geqq J$ bleiben. Wir wollen nun zunächst zeigen:

Ein Minimum von Δ kann jedenfalls nur eintreten, während irgend drei Gitterpunkte in drei unabhängigen Richtungen von O aus auf die Begrenzung von $\mathfrak{K}$ zu liegen kommen.

In der Tat, nehmen wir an, auf der Begrenzung $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{K}$ liegen entweder a) gar keine Gitterpunkte oder b) nur ein Paar Gitterpunkte an den Enden eines Durchmessers durch O oder c) mehrere Paare von Gitterpunkten, aber nur in einer einzigen Ebene durch O. Wir wählen dann drei Gitterpunkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ aus, die nicht mit O in einer Ebene liegen, entweder im Falle a) beliebig oder im Falle b) so, daß $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{F}$ liegt, oder im Falle c) so, daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{F}$ liegen. Wir führen nunmehr nach der in § 2 dargelegten Methode die Reduktion des Gitters (𝔊) in Bezug auf das Parallelepiped $O(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C})$ aus, und es sei $O(A\,B\,C)$ das neu einzuführende reducirte Grundparallelepiped.

Wir variiren die Substitution (1) in der Weise, daß wir A und B festhalten, dagegen C geradlinig auf den Punkt O zurücken lassen. Dabei verringert sich der Wert von Δ, des Volumens des Grundparallelepided, während die auf $\mathfrak{F}$ bereits vorhandenen Gitterpunkte völlig unberührt bleiben. Mit Rücksicht auf die Bedingung $\Delta \geqq J$ wird die Variation schließlich auf einen Zustand auslaufen müssen, wobei irgend ein weiterer Gitterpunkt außerhalb der Ebene $O\,A\,B$ auf $\mathfrak{F}$ auftritt.

Da dieses Verfahren sich bei den dreierlei Umständen a), b), c) ausführen läßt, so können wir in der Tat das Gitter (𝔊) unter Erhaltung der Relationen (3) und kontinuirlicher Verringerung von Δ so lange variiren, bis wir auf $\mathfrak{F}$ drei Gitterpunkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ in drei unabhängigen Richtungen von O aus vorfinden.

9. Mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ zugleich liegen auch deren Gegenpunkte $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}'$ auf $\mathfrak{F}$, und mit diesen sechs Punkten enthält $\mathfrak{K}$ als konvexer Körper den ganzen Bereich des Oktaeders $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}'\,\mathfrak{B}'\,\mathfrak{C}'$, welches diese sechs Punkte als Ecken hat. Wir wollen dieses Oktaeder

kurz das durch $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ bestimmte Oktaeder nennen und mit Okt $(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C})$ bezeichnen.

Enthält dieses Oktaeder außer O und den Ecken noch irgend einen weiteren Gitterpunkt G, so gehört dieser auch zu $\mathfrak{K}$ und befindet sich daher notwendig ebenfalls auf der Fläche $\mathfrak{F}$. Es liege G etwa außerhalb der Ebene $O\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}$, so wird das Okt $(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,G)$ von kleinerem Volumen als das Okt $(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C})$ sein. Daraus entnehmen wir das Resultat:

Werden unter allen auf der Begrenzung von $\mathfrak{K}$ irgend vorhandenen Gitterpunkten drei nicht mit O in einer Ebene gelegene Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ derart ausgewählt, daß das Okt $(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C})$ ein möglichst kleines Volumen hat, so enthält dieses Oktaeder gewiß keinen Gitterpunkt außer den Ecken und dem Mittelpunkt.

§ 4. Gitteroktaeder.

10. Ein Oktaeder $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}'\,\mathfrak{B}'\,\mathfrak{C}'$ mit O als Mittelpunkt, dessen sechs Ecken Gitterpunkte sind, (die nicht in eine Ebene fallen), und welches außer O und den Ecken keinen Gitterpunkt enthält, soll ein Gitteroktaeder heißen. Wir fragen jetzt, wie können wir von einem solchen Oktaeder aus das ganze gegebene Gitter $(\mathfrak{G})$ herstellen.

Zu jedem Punkte $P(x, y, z)$ gehören bestimmte Größen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, mit denen

$$OP = \mathfrak{x}\,.\,O\mathfrak{A} + \mathfrak{y}\,.\,O\mathfrak{B} + \mathfrak{z}\,.\,O\mathfrak{C}$$

gilt. Der Bereich des Okt $(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C})$ ist dann durch

(5) $$|\mathfrak{x}| + |\mathfrak{y}| + |\mathfrak{z}| \leqq 1$$

definirt.

Wir führen nach § 2 die Reduktion des Zahlengitters in Bezug auf das Parallelepiped $O(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C})$ aus. Es sei $O(A\,B\,C)$ das reducirte Grundparallelepiped und X, Y, Z seien die dazu gehörigen neuen Gitterkoordinaten, für welche sich Relationen

(6) $$X = a_1\mathfrak{x} + a_2\mathfrak{y} + a_3\mathfrak{z}, \quad Y = b_2\mathfrak{y} + b_3\mathfrak{z}, \quad Z = c_3\mathfrak{z}$$

mit den Bedingungen

$$a_1 > 0; \quad b_2 > 0, \ 0 \leqq \frac{a_2}{b_2} < 1; \quad c_3 > 0, \ 0 \leqq \frac{a_3}{c_3}, \ \frac{b_3}{c_3} < 1$$

herausstellen, während das vorgelegte Gitter $(\mathfrak{G})$ sich genau mit

den sämmtlichen ganzzahligen Systemen X, Y, Z deckt. Für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ haben wir bez.

$$X, Y, Z = a_1, 0, 0; \quad a_2, b_2, 0; \quad a_3, b_3, c_3.$$

Da innerhalb der Strecke $O\mathfrak{A}$ im Gitteroktaeder kein Gitterpunkt liegt, so finden wir zunächst $A = \mathfrak{A}$, $a_1 = 1$.

Sodann lautet die Ungleichung (5) für $\mathfrak{z} = 0$, also in der Ebene $O\mathfrak{A}\mathfrak{B}$:

$$\left|X - \frac{a_2}{b_2} Y\right| + \left|\frac{Y}{b_2}\right| \leqq 1.$$

Wenn nun $b_2 > 1$, also $\geqq 2$ wäre, so könnten wir $Y = 1$, und, da $0 \leqq a_2 < b_2$ ist, die Größe $X = 0$ bez. $= 1$ derart annehmen, daß $\left|X - \frac{a_2}{b_2}\right| \leqq \frac{1}{2}$ ist; dann würde die Ungleichung hier erfüllt sein, und hätten wir damit in der Ebene $O\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ einen von $O, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ verschiedenen und dem Oktaeder angehörigen Gitterpunkt gefunden, was der Natur eines Gitteroktaeders widerspricht. Also muß $b_2 = 1$, $a_2 = 0$ sein, und wir finden demnach $B = \mathfrak{B}$.

Die Ungleichung (5) lautet nunmehr

$$\left|X - \frac{a_3}{c_3} Z\right| + \left|Y - \frac{b_3}{c_3} Z\right| + \left|\frac{Z}{c_3}\right| \leqq 1. \tag{7}$$

Wir unterscheiden mehrere Fälle. Ist $c_3 > 1$ und **ungerade** $= 2d+1$, so setzen wir $Z = 1$ und können $X = 0$ bez. 1 und $Y = 0$ bez. 1 so annehmen, daß $\left|X - \frac{a_3}{c_3}\right| < \frac{1}{2}$, $\left|Y - \frac{b_3}{c_3}\right| < \frac{1}{2}$ ist. Dann wird die Summe links in der Ungleichung (7)

$$\leqq \frac{d}{2d+1} + \frac{d}{2d+1} + \frac{1}{2d+1} = 1;$$

wir hätten also einen von O und den Ecken verschiedenen Gitterpunkt im Okt $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ gefunden, was nach Voraussetzung nicht sein darf.

Ist $c_3 > 1$ und **gerade** $= 2d$, so können wir analog $Z = 1$ und $X = 0$ bez. 1, $Y = 0$ bez. 1 derart wählen, daß $\left|X - \frac{a_3}{c_3}\right| \leqq \frac{1}{2}$, $\left|Y - \frac{b_3}{c_3}\right| \leqq \frac{1}{2}$ ist. Dabei wird, wofern nicht in diesen beiden Ungleichungen zugleich das Gleichheitszeichen gilt, die Summe links in (7):

$$\leqq \frac{(d-1) + d + 1}{2d} = 1$$

ausfallen, und wäre Okt $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ wieder nicht ein Gitteroktaeder. In dem eben erwähnten besonderen Falle aber hätten wir $a_3 = d$, $b_3 = d$, $c_3 = 2d$ und, wenn $d > 1$ wäre, würde der Gitterpunkt $X, Y, Z = 1, 1, 2$ innerhalb der Strecke $O\mathfrak{C}$, also im Inneren des Okt $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ liegen.

Danach erkennen wir, daß für a_3, b_3, c_3 allein die beiden Wertsysteme 0, 0, 1 oder 1, 1, 2 in Frage kommen.

In dem ersteren Falle werden die Gleichungen (6)

$$X = \mathfrak{x}, \quad Y = \mathfrak{y}, \quad Z = \mathfrak{z}$$

und ist das ursprüngliche Zahlengitter $(\mathfrak{G})$ in x, y, z völlig identisch mit dem Zahlengitter in $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$. In diesem Falle bezeichnen wir das Okt $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ als Gitteroktaeder erster Art.

Im zweiten Falle haben wir

$$X = \mathfrak{x} + \mathfrak{z}, \quad Y = \mathfrak{y} + \mathfrak{z}, \quad Z = 2\mathfrak{z}.$$

Ganzzahlige Werte X, Y, Z entstehen einmal, wenn $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ ganze Zahlen sind, und ferner, wenn $\mathfrak{x} - \frac{1}{2}$, $\mathfrak{y} - \frac{1}{2}$, $\mathfrak{z} - \frac{1}{2}$ ganze Zahlen sind. Insbesondere ist der Punkt C^*:

$$\mathfrak{x} = \tfrac{1}{2}, \quad \mathfrak{y} = \tfrac{1}{2}, \quad \mathfrak{z} = \tfrac{1}{2},$$

d. i. der Mittelpunkt des Parallelepipeds $O(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C})$, ein Punkt des Gitters in x, y, z. Das ganze ursprüngliche Gitter $(\mathfrak{G})$ besteht hier einmal aus dem Gitter in $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ und sodann aus den Punkten, die wir aus dem letzteren Gitter durch die Translation von O nach C^* ableiten. In diesem Falle bezeichnen wir das Okt $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ als Gitteroktaeder zweiter Art. Das Volumen des Parallelepipeds $O(A\,B\,C)$ ist hier die Hälfte des Volumens von $O(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C})$.

11. Wir können nunmehr folgenden Satz zur Charakterisirung der Gitteroktaeder aussprechen:

Sind x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 die Koordinaten von drei Gitterpunkten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, so ist das Oktaeder mit den Ecken $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}'$ ein Gitteroktaeder erster Art, wenn die Determinante aus jenen Koordinaten ± 1 ist, und ein Gitteroktaeder zweiter Art, wenn jene Determinante ± 2 ist und zudem

$$\tfrac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3), \quad \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3), \quad \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3)$$

gleich ganzen Zahlen sind.

12. Wir fügen noch folgende Bemerkung hinzu. Die linke Seite in (7) wird, wenn wir uns $0 \leq a_3 \leq b_3 \leq c_3$ und $c_3 \geq 2$ denken, sogar < 1 durch wenigstens eines der Systeme $X, Y, Z = 0, 0, 1$;

0, 1, 1; 1, 1, 1, es sei denn, daß $c_3 = 2d+1$ und dazu $a_3, b_3 = d, d$; $d, d+1$; $d+1, d+1$ oder $c_3 = 2d$ und dazu $a_3, b_3 = d-1, d$; $d, d+1$ bez. $= d, d$ ist. In den letzteren Fällen hat die linke Seite von (7) für das System $X, Y, Z = 1, 1, 2$ den Wert $\frac{4}{2d+1}$ (<1 für $c_3 > 3$) oder $\frac{4}{2d}$ (<1 für $c_3 > 4$) bez. $\frac{2}{2d}$ (<1 für $c_3 > 2$). Wir finden danach unter den eben genannten vier Systemen X, Y, Z immer wenigstens ein solches, wofür die linke Seite von (7) sich <1 erweist, außer wenn

$$a_3, b_3, c_3 = 0, 1, 2;\ 1, 1, 2;\ 1, 2, 2;\ 1, 1, 3;\ 1, 2, 3;\ 2, 2, 3;\ 1, 2, 4;\ 2, 3, 4$$

ist.

§ 5. Reduktion der unendlich vielen Ungleichungen des Problems auf eine endliche Anzahl.

13. Wir nehmen wieder an, daß kein Gitterpunkt außer O im Inneren von $\mathfrak{K}$ liegt, daß aber auf der Begrenzung $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{K}$ drei Gitterpunkte A, B, C — wir ändern damit etwas die Bezeichnung — vorhanden sind, die ein Gitteroktaeder erster oder zweiter Art bestimmen. Wir führen die Koordinaten X, Y, Z zum Parallelepiped $O(A\,B\,C)$ ein und setzen die in 4. für $\mathfrak{K}$ definirte Funktion

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = F(X, Y, Z).$$

Die dort angegebenen Funktionalbedingungen gehen dann in

$$F(tX, tY, tZ) = tF(X, Y, Z), \quad t > 0,$$

(8) $$F(X_1, Y_1, Z_1) + F(X_2, Y_2, Z_2) \geqq F(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2, Z_1 + Z_2),$$

(9) $$F(-X, -Y, -Z) = F(X, Y, Z)$$

über. Indem die Punkte A, B, C auf $\mathfrak{F}$ liegen, haben wir

(10) $$F(1, 0, 0) = 1, \quad F(0, 1, 0) = 1, \quad F(0, 0, 1) = 1.$$

Weiter soll nun auf Grund unserer Voraussetzung die Ungleichung

(I) $$F(X, Y, Z) \geqq 1 \qquad (X, Y, Z \neq 0, 0, 0)$$

für jedes von 0, 0, 0 verschiedene ganzzahlige Wertsystem X, Y, Z gelten, und soll überdies, falls Okt $(A\,B\,C)$ ein Gitteroktaeder zweiter Art vorstellt, die Ungleichung

(II) $$F(X + \tfrac{1}{2},\ Y + \tfrac{1}{2},\ Z + \tfrac{1}{2}) \geqq 1$$

für jedes beliebige ganzzahlige System X, Y, Z (das System 0, 0, 0 hier inbegriffen), gelten.

14. Wir wollen jetzt zeigen, daß infolge des Bestehens der drei Gleichungen (10) von allen diesen Ungleichungen gewisse in endlicher Anzahl vorhandene das Bestehen aller übrigen nach sich ziehen.

In der Tat, greifen wir von den Ungleichungen (I) zunächst diejenigen besonderen heraus, in denen die Zahlen X, Y, Z nur Werte 0 oder ± 1 haben, das sind die folgenden:

$$(11)\quad F(\pm 1, \pm 1, 0) \geqq 1,\ F(\pm 1, 0, \pm 1) \geqq 1,\ F(0, \pm 1, \pm 1) \geqq 1,$$

$$(12)\quad F(\pm 1, \pm 1, \pm 1) \geqq 1$$

für alle möglichen Werte der einzelnen Vorzeichen ± 1.

Sollte nun, während alle Bedingungen (10), (11), (12) bereits statthaben, irgend eine der Ungleichungen (I) nicht gelten, so sei $G\ (X, Y, Z = a, b, c)$ ein Gitterpunkt, für den

$$F(a, b, c) < 1$$

ist; wir können uns etwa $0 \leqq a \leqq b \leqq c\ (c \geqq 2)$ vorstellen, da wir die Rollen von $\pm X, \pm Y, \pm Z$ vertauschen können. Das Okt $(A B G)$ gehört dann mit allen Punkten, die außerhalb der Ebene $O A B$ liegen, ganz zum Inneren von $\mathfrak{K}$. Dieses Oktaeder ist durch

$$\left|X - \frac{a}{c} Z\right| + \left|Y - \frac{b}{c} Z\right| + \left|\frac{Z}{c}\right| \leqq 1$$

bestimmt. Aehnlich wie in 10. schließen wir nun, daß in diesem Oktaeder, falls nicht gerade a, b, c von der Form $d, d, 2d$ ist, stets wenigstens einer von den Gitterpunkten $Z = 1,\ X = 0$ oder 1, $Y = 0$ oder 1 auftritt. Der betreffende Gitterpunkt dürfte aber nach einer der Ungleichungen (11), (12) nicht ins Innere von $\mathfrak{K}$ fallen. Mithin erkennen wir, daß zu den Ungleichungen (11) und (12) nur noch die folgenden

$$(13)\ F(\pm 1, \pm 1, \pm 2) \geqq 1,\ F(\pm 1, \pm 2, \pm 1) \geqq 1,\ F(\pm 2, \pm 1, \pm 1) \geqq 1$$

hinzuzunehmen sind, um die Gesammtheit der Ungleichungen (I) sicherzustellen. Wir haben damit den Satz gewonnen:

Ist Okt $(A B C)$ ein Gitteroktaeder erster Art, so haben die Bedingungen (10), (11), (12), (13) die Gesammtheit der unendlich vielen Ungleichungen (I) zur Folge.

Ist das Okt $(A B C)$ ein Gitteroktaeder zweiter Art, so haben wir unter den Ungleichungen (II), indem wir X, Y, Z

die Werte 0 und -1 beilegen, insbesondere die Ungleichungen:

$$(14) \qquad F(\pm \tfrac{1}{2}, \pm \tfrac{1}{2}, \pm \tfrac{1}{2}) \geqq 1.$$

Wir werden nun zeigen:

Ist Okt$(A\,B\,C)$ ein Gitteroktaeder zweiter Art, so reichen die Gleichungen (10) und die Ungleichungen (14) bereits aus, um die Gesammtheit der unendlich vielen Ungleichungen (I) und (II) nach sich zu ziehen.

Zunächst folgen aus (14) alle Ungleichungen (I), nämlich speciell die Ungleichungen (11), (12), (13). Denn wir schließen aus (14) mit Rücksicht auf (8):

$$F(1,1,1) \geqq 2,$$
$$F(1,1,0) + F(0,0,1) \geqq F(1,1,1) \geqq 2, \quad F(1,1,0) \geqq 1,$$
$$F(1,1,2) + F(0,0,-1) \geqq F(1,1,1), \quad F(1,1,2) \geqq 1,$$

und ähnlich bei Aenderung der Vorzeichen der einzelnen Variabeln und bei den Permutationen ihrer Reihenfolge.

Was sodann die Ungleichungen (II) anbelangt, so nehmen wir an, es seien die Ungleichungen (14) erfüllt, es bestünde aber noch für einen Gitterpunkt $G(X, Y, Z = a + \tfrac{1}{2}, b + \tfrac{1}{2}, c + \tfrac{1}{2})$, wobei a, b, c ganze Zahlen sind, die Ungleichung

$$F\left(\frac{2a+1}{2}, \frac{2b+1}{2}, \frac{2c+1}{2}\right) < 1;$$

wir können ohne wesentliche Beschränkung uns etwa

$$0 \leqq \frac{2a+1}{2} \leqq \frac{2b+1}{2} \leqq \frac{2c+1}{2}$$

und $2c+1 \geqq 3$ denken. Nun enthält das Okt $(A\,B\,G)$, d. i. der Bereich

$$\left|X - \frac{2a+1}{2c+1} Z\right| + \left|Y - \frac{2b+1}{2c+1} Z\right| + \left|\frac{2Z}{2c+1}\right| \leqq 1$$

den Punkt $X = \tfrac{1}{2}$, $Y = \tfrac{1}{2}$, $Z = \tfrac{1}{2}$; denn für diesen Punkt wird die hier links stehende Summe

$$\frac{(c-a)+(c-b)+1}{2c+1} \leqq 1;$$

also müßte auch $F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) < 1$ sein im Widerspruch mit einer der Ungleichungen (14). Die Ungleichungen (14) haben demnach in der Tat mit Rücksicht auf die drei Gleichungen (10) alle Ungleichungen (I) und (II) zur Folge.

15. Nach der Bemerkung in 12. finden wir, wenn für ein ganzzahliges System $G(a, b, c)$ die Umstände $0 \leqq a \leqq b \leqq c$ und $c \geqq 2$ statthaben und a, b, c nicht gerade mit einem der Systeme

$$0,1,2;\ 1,1,2;\ 1,2,2;\ 1,1,3;\ 1,2,3;\ 2,2,3;\ 1,2,4;\ 2,3,4$$

übereinstimmt, wenigstens einen von den Gitterpunkten 0, 0, 1; 0, 1, 1; 1, 1, 1; 1, 1, 2 sogar im Inneren des Okt ($A\,B\,G$) gelegen und kann daher G auch nicht auf der Begrenzung von $\mathfrak{K}$ liegen, sondern muß dafür notwendig

$$F(a, b, c) > 1$$

ausfallen.

§ 6. Die benachbarten Körper in einer dichtesten Lagerung.

16. Nach den letzten Ausführungen ist klar, daß bei kontinuirlicher Variation der Koefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \dots \gamma_3$ in (1) d. h. des Gitters ($\mathfrak{G}$) keine einzige der Ungleichungen (I) bez. der Ungleichungen (I) und (II) verletzt wird, so lange nur die drei Gleichungen (10) und die in endlicher Anzahl vorhandenen Ungleichungen (11), (12), (13) bez. (14) in Kraft bleiben. Unter beständiger Wahrung dieser Bedingungen (10)—(13) bez. (10), (14) suchen wir nun weiter $\alpha_1, \alpha_2, \dots \gamma_3$ kontinuirlich derart zu variiren, daß Δ sich verringert oder wenigstens nicht zunimmt und dabei in möglichst vielen unabhängigen von den fraglichen Ungleichungen das Gleichheitszeichen sich einstellt.

17. Wir nehmen als ersten Fall an, daß Okt ($A\,B\,C$) ein Gitteroktaeder erster Art ist und können dazu voraussetzen, daß auch im Verlaufe der vorzunehmenden Variationen niemals drei Gitterpunkte auf $\mathfrak{F}$ auftreten sollen, die ein Gitteroktaeder zweiter Art bestimmen.

Zunächst möge in keiner der Ungleichungen (11), (12), (13) das Gleichheitszeichen gelten. Wir projiciren den ganzen Bereich des Körpers $\mathfrak{K}$ in Richtung OC auf irgend eine diese Richtung nicht enthaltende Ebene durch O. Dadurch entsteht in dieser Ebene eine gewisse convexe Figur $\mathfrak{P}$ mit O als Mittelpunkt; $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien darin die Projektionen von A und B (Fig. 2). Im Allgemeinen wird es nun möglich sein, unter Festhaltung von B und C den Punkt A auf der Begrenzung von $\mathfrak{K}$ kontinuirlich so zu bewegen, daß währenddessen $\mathfrak{A}$ geradlinig auf O zuwandert und

damit $\varDelta$ kleiner wird. Eine solche Variation ist nur in dem Falle zunächst nicht ausführbar, wenn A innerhalb einer auf der Fläche $\mathfrak{F}$ verlaufenden, mit OC parallelen Strecke liegt, die sich dann natürlich in einen Randpunkt von $\mathfrak{P}$ projicirt. In diesem Falle würden wir A zuvörderst nach einem Endpunkte jener Strecke hin wandern lassen, wobei $\varDelta$ sich nicht ändert, um hernach, wenn inzwischen kein neuer Gitterpunkt auf $\mathfrak{F}$ aufgetreten ist, $\varDelta$ in der beschriebenen Weise zu verringern. Da nun $\varDelta$ nicht unter die von vorn herein gegebene Grenze J, das Volumen von K, sinken kann, muß der dargelegte Prozeß notwendig einmal auf einen Zustand auslaufen, wobei in einer der Ungleichungen (11), (12), (13) das Zeichen $=$ eintritt.

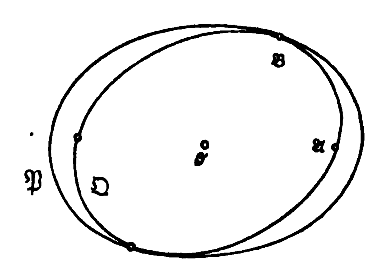


Fig. 2.

Wenn dabei z. B. $F(1,1,2) = 1$ würde, so fänden wir nach dem Satze aus 11. in $-1,0,0;\ 0,-1,0;\ 1,1,2$ drei Gitterpunkte auf $\mathfrak{F}$, die ein Gitteroktaeder zweiter Art bestimmen, was wir ausgeschlossen haben. Hiernach kommt gegenwärtig keine der Ungleichungen (13) in Frage. Wir machen nun ferner zunächst die Annahme, daß bei den vorzunehmenden Variationen auch stets die Ungleichungen

$$F(\pm 1, \pm 1, \pm 1) > 1$$

gewahrt bleiben. Dann kommen einstweilen nur die Ungleichungen (11) für das Eintreten des Gleichheitszeichens in Betracht. Da wir die Bezeichnungen Y und Z, auch X mit $-X$ vertauschen können, so dürfen wir annehmen, daß der Gitterpunkt $S(-1,0,1)$ auf der Fläche $\mathfrak{F}$ erscheint, daß also

$$F(-1,0,1) = 1$$

wird. Diese Gleichung gewährleistet vermöge

$$F(1,0,1) + F(-1,0,1) \geqq F(0,0,2) = 2$$

die Ungleichung $F(1,0,1) \geqq 1$, d. h. solange C und S auf $\mathfrak{F}$ bleiben, kann $1,0,1$ gewiß nicht ins Innere von $\mathfrak{K}$ fallen.

Die weiteren von den Ungleichungen (11) mögen noch das Zeichen $>$ behalten haben. Wir können nun mit dem Punkte B operiren wie vorhin mit A, indem wir wieder die Parallelprojek-

tion von $\mathfrak{K}$ in Richtung OC verwenden und können ohne Zunahme von Δ erzielen, daß in einer neuen der Ungleichungen (11) das Zeichen $=$ eintritt. Indem wir noch X und Z vertauschen, auch Y durch $-Y$ ersetzen können, dürfen wir annehmen, es trete jetzt der Gitterpunkt $R(0, 1, -1)$ in $\mathfrak{F}$ ein. Durch die Lage von R und C auf $\mathfrak{F}$ wird zugleich gesichert, daß $0, 1, 1$ nicht ins Innere von $\mathfrak{K}$ fällt.

Nun möge noch $F(\pm 1, \pm 1, 0) > 1$ geblieben sein. Die Strecken $S'A$ und RB sind beide parallel und gleich lang mit OC. Wir führen jetzt jene Parallelprojektion von $\mathfrak{K}$ in Richtung OC auf eine Ebene, die uns für den ganzen Körper $\mathfrak{K}$ die Figur $\mathfrak{P}$ ergab, speciell nur für alle solchen zu OC parallelen Sehnen von $\mathfrak{K}$ aus, welche an Länge $\geqq OC$ sind. Dadurch erhalten wir in jener Ebene eine neue Figur $\mathfrak{Q}$ mit O als Mittelpunkt, die ganz in der früheren Figur $\mathfrak{P}$ enthalten ist und insbesondere die Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aufnimmt (Fig. 2). Dieser Figur $\mathfrak{Q}$ kommt, weil $\mathfrak{K}$ ein konvexer Körper ist, ebenfalls die Eigenschaft zu, mit irgend zwei Punkten stets die ganze sie verbindende Strecke zu enthalten, und stellt mithin $\mathfrak{Q}$ wieder ein konvexes Oval vor.

Liegt $\mathfrak{B}$ auf dem *Rande* von $\mathfrak{Q}$, so bedenken wir, daß solchen Punkten des Randes von $\mathfrak{Q}$, welche Häufungsstellen von nicht zu $\mathfrak{Q}$ zählenden Punkten aus $\mathfrak{P}$ sind, mit OC parallele Sehnen in $\mathfrak{K}$ *genau* von der Länge OC entsprechen und daß andererseits solchen Punkten des Randes von $\mathfrak{Q}$, die auch zum Rande von $\mathfrak{P}$ gehören, mit OC parallele Geraden entsprechen, die *nur die Begrenzung* von $\mathfrak{K}$ treffen. Infolgedessen können wir irgend eine kontinuirliche Veränderung von $\mathfrak{B}$ auf dem Rande von $\mathfrak{Q}$, während A und C festbleiben sollen, immer so bewerkstelligen, daß dabei sowohl B wie der damit in bestimmter Weise verbundene Punkt R fortwährend auf der Begrenzung von $\mathfrak{K}$ verbleiben. Wir können nun im Allgemeinen $\mathfrak{B}$ auf dem Rande von $\mathfrak{Q}$ kontinuirlich der Geraden $O\mathfrak{A}$ nähern und damit Δ verringern. Nur wenn $\mathfrak{B}$ innerhalb einer diesem Rande angehörigen, zu $O\mathfrak{A}$ parallelen Strecke liegt, müssen wir zuvor $\mathfrak{B}$ nach einem Endpunkte dieser Strecke führen, eine Operation, während der Δ sich nicht ändert. Wir bemerken, daß bei der letzteren Sachlage die Fläche $\mathfrak{F}$ sicher eine geradlinige Strecke aufzuweisen hat, nämlich, falls $\mathfrak{B}$ zugleich dem Rande von $\mathfrak{P}$ angehört, die Strecke RB, anderenfalls aber in einer Stützebene an $\mathfrak{K}$ durch B die ganze Strecke, als deren Projektion hier jene erwähnte Strecke auf dem Rande von $\mathfrak{Q}$ erscheint.

Sollte $\mathfrak{B}$ im *Inneren* von $\mathfrak{Q}$ liegen, so würden durch B und R jedenfalls zwei verschiedene Stützebenen an $\mathfrak{K}$ gehen; für diese

müßten dann in gewissen Umgebungen von B und R die in Richtung OC gemessenen Abstände durchweg $\geqq OC$ sein, also wären die Ebenen parallel, und könnten wir B in seiner Ebene so verändern, daß $\mathfrak{B}$ geradlinig auf O zuschreitet. Freilich würde unsere Folgerung hier mit der anderen Annahme in Widerspruch kommen, wonach C auf $\mathfrak{F}$ selbst liegen sollte.

Nach dieser Ausführung können wir nun, ohne daß Δ wächst, zu einem Zustande fortschreiten, wobei schließlich noch in einer der Ungleichungen $F(\pm 1, \pm 1, 0) \geqq 1$ das Zeichen $=$ eintritt. Würden wir $F(1, 1, 0) = 1$ erhalten, so hätten wir in $-1, 0, 1$; $0, -1, 1$; $1, 1, 0$ drei Gitterpunkte auf $\mathfrak{F}$, die ein Gitteroktaeder zweiter Art bestimmen. Da wir solches vorläufig ausgeschlossen haben, so bleibt nur die Annahme übrig, daß noch der Gitterpunkt $T(1, -1, 0)$ auf $\mathfrak{F}$ auftritt.

18. Wenn die sechs Gitterpunkte A, B, C, R, S, T sämmtlich auf $\mathfrak{F}$ liegen, so ersehen wir aus

$$F(1, 1, 2) + F(-1, 0, 1) + F(0, -1, 1) \geqq 4F(0, 0, 1),$$
$$F(1, -1, 2) + F(-1, 1, 0) \geqq 2F(0, 0, 1),$$
$$F(-1, -1, 2) + F(1, -1, 0) \geqq 2F(0, -1, 1),$$
$$F(1, 1, 1) + F(-1, 0, 1) + F(0, -1, 1) \geqq 3F(0, 0, 1)$$

u. s. f., daß von den Ungleichungen (11), (12), (13) nur noch die Erfüllung der folgenden

$$F(-1, 1, 1) \geqq 1, \quad F(1, -1, 1) \geqq 1, \quad F(1, 1, -1) \geqq 1$$

besonders zu fordern ist. Würde $F(1, 1, -1) = 1$ sein, so hätten wir in $0, 0, 1$; $1, -1, 0$; $1, 1, -1$ drei Gitterpunkte auf $\mathfrak{F}$, die ein Gitteroktaeder zweiter Art bestimmen. Gegenwärtig haben wir danach in diesen drei Ungleichungen das Zeichen $>$ zu verlangen.

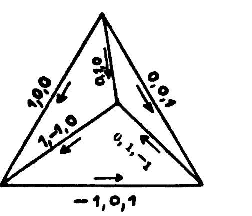
19. Wir berücksichtigen jetzt die in 17. zunächst ausgeschaltete Möglichkeit, daß in einer der Ungleichungen $F(\pm 1, \pm 1, \pm 1) \geqq 1$ das Gleichheitszeichen eintritt, schließen aber immer noch aus, daß auf $\mathfrak{F}$ drei Gitterpunkte auftreten, die ein Gitteroktaeder zweiter Art bestimmen.

Nehmen wir z. B. an, daß neben A, B, C noch der Gitterpunkt $D(1, 1, 1)$ auf $\mathfrak{F}$ liege, so sind wegen

$$F(-1, -1, 1) + F(1, 1, 1) \geqq 2F(0, 0, 1)$$

u. s. f. alle Ungleichungen (12) sichergestellt. Die Strecke AD ist parallel und gleich $B'C$. Wir verfahren unter Zuhülfenahme einer Parallelprojektion von $\mathfrak{K}$ in dieser Richtung wesentlich nach der

in 17. dargelegten Methode zur Verringerung von Δ, und wir dürfen nun ferner in einer der Ungleichungen (11) das Gleichheitszeichen als gültig annehmen. Würde dabei etwa $F(1, -1, 0) = 1$ eintreten, so hätten wir in $0, 0, -1$; $1, 1, 1$; $1, -1, 0$ drei Gitterpunkte auf $\mathfrak{F}$, die ein Gitteroktaeder zweiter Art bestimmen, was nicht sein sollte. Wir nehmen nun etwa $N(1, 1, 0)$ auf $\mathfrak{F}$ gelegen an. Alsdann sind die Strecken ON, CD, $A'B$ parallel und gleich lang; wir verwenden eine Parallelprojektion von $\mathfrak{K}$ in Richtung ON und dürfen endlich noch etwa $L(0, 1, 1)$ auf $\mathfrak{F}$ gelegen annehmen. Die beistehende Figur zeigt uns, daß durch die Substitution



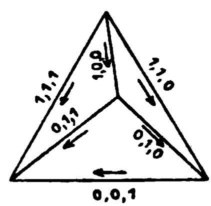


Fig. 3.

$$X^* = Z, \quad Y^* = X - Y, \quad Z^* = Y - Z$$

dieser Fall auf den schon in 17. behandelten zurückführt.

20. Wir nehmen jetzt zweitens an, daß das Okt (ABC) ein Gitteroktaeder zweiter Art ist, und haben alsdann neben den drei Gleichungen (10) die Ungleichungen (14)

$$F(\pm\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}) \geqq 1$$

vorauszusetzen.

Zunächst möge in keiner dieser Ungleichungen das Zeichen $=$ gelten. Wir verfahren wesentlich nach der in 17. entwickelten Methode. Wir verwenden eine Parallelprojektion von $\mathfrak{K}$ in Richtung OC und können $\alpha_{11}, \ldots \gamma_3$ so variiren, daß Δ abnimmt oder konstant bleibt und schließlich in einer dieser Ungleichungen das Gleichheitszeichen eintritt. Es möge etwa der Gitterpunkt N $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ und sein Gegenpunkt N' auf die Fläche $\mathfrak{F}$ fallen; in den übrigen Ungleichungen (14) aber möge noch das Zeichen $>$ bleiben. Nun ist CB parallel der Ebene durch O, A und N (Fig. 4). Wir verwenden eine Parallelprojektion von $\mathfrak{K}$ in Richtung CB, halten A und die Strecke CB nach Richtung und Länge und damit auch den Punkt N fest

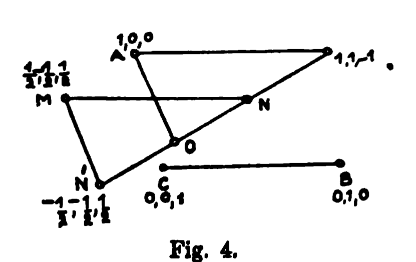


Fig. 4.

und können durch Variation von B und so, daß $\varDelta$ abnimmt oder sich nicht ändert, einen Zustand erzielen, wobei eine neue der Ungleichungen (14) als Gleichung erfüllt ist; es trete etwa der Gitterpunkt $L(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ in die Fläche $\mathfrak{F}$ ein. — Dieser letzte Prozeß wäre nun genau so anzuwenden gewesen, wenn die Fläche $\mathfrak{F}$ neben N auch bereits $M(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ enthalten hätte, da die Strecke MN parallel und gleich CB ist. Daraus leuchtet sofort ein, daß wir überhaupt auch einen Zustand erreichen können, wobei drei von den vier Paaren von Gitterpunkten $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}$, etwa die drei Paare L, L', M, M', N, N', auf $\mathfrak{F}$ fallen.

Vermöge der Substitution

$$X^* = Y+Z, \quad Y^* = X+Z, \quad Z^* = X+Y$$

erhalten nun A, B, C, L, M, N und der Gitterpunkt $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ die neuen Koordinaten

$$X^*, Y^*, Z^* = 0,1,1;\ 1,0,1;\ 1,1,0;\ 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1;\ 1,1,1.$$

Das ursprüngliche Zahlengitter ($\mathfrak{G}$) wird mit dem Zahlengitter in X^*, Y^*, Z^* identisch; und damit kein Gitterpunkt außer O im Inneren von $\mathfrak{K}$ liegt, bleibt nur noch die eine Bedingung zu erfüllen, daß der Punkt $X^*, Y^*, Z^* = 1, 1, 1$ nicht ins Innere von $\mathfrak{K}$ fällt.

21. Wir sind durch diese Ueberlegungen zu folgendem Resultate gelangt:

Um für einen gegebenen konvexen Körper K das Minimum (oder die verschiedenen existirenden Minima) von $\varDelta$ zu finden, genügt es, solche Anordnungen des Gitters ($\mathfrak{G}$) in Betracht zu ziehen, wobei von diesem Gitter

entweder (I) auf die Begrenzung von $\mathfrak{K} = K+K'$ die Punkte

$$1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1;\ 0,1,-1;\ -1,0,1;\ 1,-1,0$$

und die Punkte $-1,1,1;\ 1,-1,1;\ 1,1,-1$ außerhalb $\mathfrak{K}$ fallen,

oder (II) auf die Begrenzung von $\mathfrak{K}$ die Punkte

$$1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1;\ 0,1,1;\ 1,0,1;\ 1,1,0$$

fallen und der Punkt $1,1,1$ außerhalb $\mathfrak{K}$ liegt,

oder (III) auf die Begrenzung von $\mathfrak{K}$ die Punkte

$$1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1;\ 0,1,1;\ 1,0,1;\ 1,1,0 \text{ und } 1,1,1$$

fallen.

Aus einer beliebigen Anordnung des Gitters (𝔊) von dem hier bezeichneten Charakter, welche ein Minimum von $\varDelta$ liefert, können unter Umständen, — jedoch nur in solchen Fällen, wo auf der Begrenzung von $\mathfrak{K}$ geradlinige Strecken vorkommen, — andere Anordnungen von (𝔊), welche nicht jenen Charakter tragen, durch kontinuirliche Variation ohne Aenderung des Wertes von $\varDelta$ hervorgehen und diese würden dann in gleicher Weise dichteste gitterförmige Lagerungen für den Grundkörper K bestimmen.

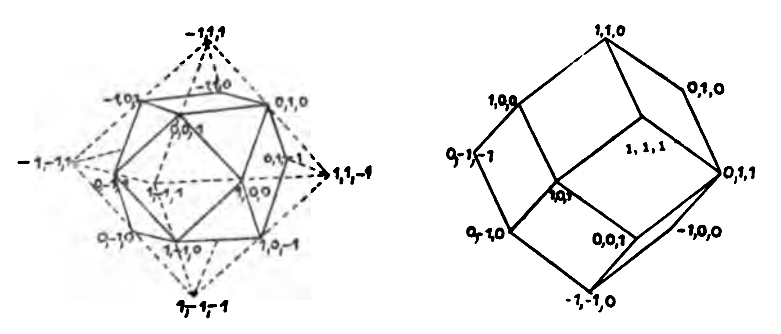


Fig. 5.

Die in (I) aufgeführten sechs Gitterpunkte mit ihren Gegenpunkten in Bezug auf O bilden die Ecken eines Kubooktaeders, die in (III) genannten sieben Gitterpunkte mit ihren Gegenpunkten in Bezug auf O die Ecken eines Rhombendodekaeders (Fig. 5).

§ 7. Arithmetische Aequivalenz bei positiven ternären quadratischen Formen.

22. Ehe wir in der Behandlung unseres allgemeinen Problems weitergehen, wollen wir das Beispiel der dichtesten Lagerung von Kugeln näher ins Auge fassen.

Es sei K eine Kugel vom Radius $\frac{1}{2}$, für den Körper $\mathfrak{K} = K + K'$ also $\varphi(\xi, \eta, \zeta) = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{\frac{1}{2}}$, so haben wir in

$$\begin{aligned}\varphi^2 &= (\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z)^2 + (\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z)^2 + (\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma\ z)^2 \\ &= e_{11} x^2 + 2 e_{12} xy + 2 e_{13} xz + e_{22} y^2 + 2 e_{23} yz + e_{33} z^2 = h(x, y, z)\end{aligned}$$

eine **positive ternäre quadratische Form** mit einer Determinante $D = \varDelta^2$.

Um die dichteste gitterförmige Lagerung für Kugeln vom Radius $\frac{1}{2}$ zu finden, haben wir nach 21. nur diese zwei Annahmen zu diskutiren:

(II) Die Fläche $h(x, y, z) = 1$ enthält die sechs Gitterpunkte

$$x, y, z = 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1;\ 0,1,1;\ 1,0,1;\ 1,1,0;$$

dann müßte

$$h(x, y, z) = x^2 - xy - xz + y^2 - yz + z^2 = (x - \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}z)^2 + \tfrac{3}{4}(y-z)^2$$

sein, und jene Fläche wäre eine Cylinderfläche, nicht eine Kugel.

(I) Die Fläche $h(x, y, z) = 1$ enthält die sechs Gitterpunkte:

$$x, y, z = 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1;\ 0,1,-1;\ -1,0,1;\ 1,-1,0;$$

dann haben wir

$$h(x, y, z) = x^2 + xy + xz + y^2 + yz + z^2$$

und wird $D = \Delta^2 = \frac{1}{2}$. Demnach gelangen wir zu dem Resultate:

Im Falle der dichtesten gitterförmigen Lagerung von gleichen Kugeln verhält sich der von den Kugeln erfüllte Raum zum ganzen unendlichen Raume wie $\frac{\pi}{6} : \frac{1}{\sqrt{2}}$. Die betreffende Lagerung ist dadurch charakterisirt, daß eine jede Kugel in den 12 Ecken eines Kubooktaeders an andere Kugeln stößt.

Für die dichteste Lagerung von Ellipsoiden gilt offenbar genau der nämliche Satz.

Das entsprechende Problem für zwei Dimensionen hängt analog mit der Transformation von $\xi^2 + \eta^2$ in $x^2 + xy + y^2$ zusammen, und kann man in einer Ebene durch lauter gleiche Kreisflächen, die nicht in einander eindringen und deren Mittelpunkte ein parallelogrammatisches Punktsystem bilden, im Maximum den $\frac{\pi}{4} : \frac{\sqrt{3}}{2}$ ten Teil der ganzen unendlichen Ebene ausfüllen.

23. Ich will jetzt zeigen, daß die Theorie der arithmetischen Aequivalenz der positiven ternären quadratischen Formen, deren Hauptsätze von Seeber und Gauß aufgestellt sind und in der Folge manche andere Ableitung gefunden haben[1]), vollständig und durch einfache Ueberlegungen

---

1) Seeber, Untersuchungen über die Eigenschaften der p. t. qu. Formen, Freiburg i. Br. 1831. — Gauß, Gött. gel. Anz. 1831 (auch Werke Bd. II, S. 188). — Dirichlet, Crelles Journ. Bd. 40, S. 209 (auch Werke Bd. II, S. 27). — Hermite, Crelles Journ. Bd. 40, S. 173, Bd. 79, S. 17. — Selling, Crelles Journ. Bd. 77, S. 143. — Korkine u. Zolotareff, Math. Ann. Bd. 6, S. 366.

allein aus der eben bewiesenen Tatsache über die dichteste Lagerung von Kugeln erschlossen werden kann.

Es sei

$$e_{11}x^2+2e_{12}xy+\cdots+e_{33}z^2 = h(x,y,z) = (f(x,y,z))^2$$

eine beliebige positive ternäre quadratische Form mit der positiven Determinante D. Wir setzen die Form h irgendwie in die Gestalt

$$h = (\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 z)^2+(\beta_1 x+\beta_2 y+\beta_3 z)^2+(\gamma_1 x+\gamma_2 y+\gamma_3 z)^2$$

$= \xi^2+\eta^2+\zeta^2$ und deuten ξ, η, ζ als rechtwinklige Koordinaten im Raume. Der Ausdruck $\sqrt{h} = f(x,y,z)$ stellt alsdann die Entfernung des variablen Punktes P mit den Bestimmungsstücken x, y, z vom Nullpunkte O dar.

24. Wir betrachten das Gitter ($\mathfrak{G}$) der Punkte mit ganzzahligen Werten x, y, z und bestimmen in diesem Gitter einen ersten vom Nullpunkte verschiedenen Gitterpunkt A derart, daß die Entfernung OA so klein als möglich ausfällt, hernach einen zweiten Gitterpunkt B außerhalb der Geraden durch O und A, sodaß die Entfernung OB so klein als möglich wird, endlich einen dritten Gitterpunkt C außerhalb der Ebene durch O, A und B, sodaß die Entfernung OC so klein als möglich wird. Es seien l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2; l_3, m_3, n_3 die x, y, z-Werte von A, B, C und f_1, f_2, f_3 die Entfernungen dieser Punkte von O.

Wir setzen

$$(15)\quad x = l_1X+l_2Y+l_3Z,\ y = m_1X+m_2Y+m_3Z,\ z = n_1X+n_2Y+n_3Z,$$

und es sei d die Determinante dieser Ausdrücke. Die Form h gehe durch diese lineare Substitution in

$$E_{11}X^2+2E_{12}XY+\cdots+E_{33}Z^2 = H(X,Y,Z)$$

über; dabei wird $E_{11} = f_1^2$, $E_{22} = f_2^2$, $E_{33} = f_3^2$. Wir bringen H in die Gestalt

$$H = (A_1X+A_2Y+A_3Z)^2+(B_2Y+B_3Z)^2+(\Gamma_3 Z)^2,$$

sodaß $A_1, B_2, \Gamma_3 > 0$ sind, und setzen

$$\Phi = \left(\frac{A_1X+A_2Y+A_3Z}{f_1}\right)^2+\left(\frac{B_2Y+B_3Z}{f_2}\right)^2+\left(\frac{\Gamma_3 Z}{f_3}\right)^2.$$

25. Die Fläche $\Phi = 1$ stellt im Raume der rechtwinkligen Koordinaten ξ, η, ζ ein Ellipsoid vor mit einer Hauptaxe in der

Linie OA, einer dazu senkrechten Hauptaxe in der Ebene OAB und einer dritten auf dieser Ebene senkrechten Hauptaxe, bez. von den Längen f_1, f_2, f_3. Für jeden von O verschiedenen Gitterpunkt in der Geraden $OA\,(Y=0,\ Z=0)$ ist $H \geqq f_1^2$, $\Phi \geqq 1$, für jeden Gitterpunkt außerhalb dieser Geraden in der Ebene $OAB\,(Z=0)$ ist $H \geqq f_2^2$, $\Phi \geqq 1$, für jeden Gitterpunkt außerhalb der Ebene OAB ist $H \geqq f_3^2$, $\Phi \geqq 1$. Danach liegt kein Gitterpunkt x, y, z außer dem Nullpunkte im Inneren des Ellipsoids $\Phi \leqq 1$.

Konstruiren wir nun den Körper $\Phi \leqq \frac{1}{4}$ und weiter alle Körper, die aus diesem durch die Translationen vom Nullpunkte nach den einzelnen Gitterpunkten x, y, z entstehen, so werden diese sämmtlichen gitterförmig angeordneten Ellipsoide unter einander höchstens Punkte der Begrenzungen gemein haben, und ist daher nach 22. das Verhältniß aus dem Volumen von $\Phi \leqq \frac{1}{4}$ und dem Volumen des Grundparallelepipeds des Gitters (𝔊), also $\frac{\pi}{6} f_1 f_2 f_3 : \sqrt{D}$ sicher $\leqq \frac{\pi}{6} : \frac{1}{\sqrt{2}}$, d. h. wir haben

$$f_1 f_2 f_3 \leqq \sqrt{2D}, \quad E_{11} E_{22} E_{33} \leqq 2D. \tag{16}$$

Andererseits berechnet sich die Determinante von H in x, y, z zu $\left(\frac{A_1 B_2 \Gamma_3}{d}\right)^2$, sodaß

$$A_1 B_2 \Gamma_3 = |d| \sqrt{D}$$

folgt. Nun ist für die Punkte A, B, C bez. $H = f_1^2, f_2^2, f_3^2$, sodaß

$$A_1 = f_1, \ B_2 \leqq f_2, \ \Gamma_3 \leqq f_3$$

entsteht. Demnach gilt

$$f_1 f_2 f_3 \geqq |d| \sqrt{D}.$$

Mit Berücksichtigung von (16) geht hieraus

$$|d| \leqq \sqrt{2}, \tag{17}$$

mithin $d = \pm 1$ hervor. Die Determinante der Substitution (15) ist also ± 1, das Gitter in X, Y, Z ist identisch mit dem Gitter (𝔊) in x, y, z, die Form H arithmetisch äquivalent der gegebenen Form h.

26. Nach der Art, wie die Punkte A, B, C mit ihren Entfernungen OA, OB, OC eingeführt wurden, bestehen für die Form

H die sämmtlichen Ungleichungen

$$(18) \qquad 0 < E_{11} \leqq E_{22} \leqq E_{33},$$

$$(19) \qquad \begin{matrix} H(X,0,0) \geqq E_{11}, & H(X,Y,0) \geqq E_{22}, & H(X,Y,Z) \geqq E_{33}, \\ (X \neq 0) & (Y \neq 0) & (Z \neq 0) \end{matrix}$$

worin X, Y, Z beliebige ganze Zahlen sind. Umgekehrt leuchtet ein, daß mit diesen Ungleichungen, während die Substitution (15) ganzzahlige Koefficienten und eine Determinante ± 1 hat, der hier in Frage kommende Charakter der Gitterpunkte A, B, C vollständig erschöpft wird.

Eine ternäre quadratische Form $H(X, Y, Z)$, welche diese sämmtlichen Ungleichungen (18), (19) erfüllt, heißt **reducirt**.

Analog heißt eine binäre quadratische Form

$$H(X,Y) = E_{11}X^2 + 2E_{12}XY + E_{22}Y^2$$

reducirt, wenn sie allen Ungleichungen

$$\begin{matrix} 0 < E_{11} \leqq E_{22}, & H(X,0) \geqq E_{11}, & H(X,Y) \geqq E_{22} \\ & (X \neq 0) & (Y \neq 0) \end{matrix}$$

genügt, worin X, Y beliebige ganze Zahlen sind. Es leuchtet ein, daß, wenn $H(X, Y, Z)$ eine reducirte ternäre Form ist, die drei daraus durch Nullsetzen je einer Variable entstehenden binären Formen $H(X, Y, 0)$, $H(X, 0, Z)$, $H(0, Y, Z)$ ihrerseits notwendig reducirt sind.

Aus der Menge der Ungleichungen (19) greifen wir insbesondere die folgenden heraus:

$$(20) \qquad H(\pm 1, 1, 0) \geqq E_{22}, \; H(\pm 1, 0, 1) \geqq E_{33}, \; H(0, \pm 1, 1) \geqq E_{33},$$

d. i.

$$E_{11} \geqq 2|E_{12}|, \; E_{11} \geqq 2|E_{13}|, \; E_{22} \geqq 2|E_{23}|,$$

und ferner

$$(21) \qquad H(\pm 1, \pm 1, 1) \geqq E_{33};$$

diese letzteren Ungleichungen (21) sind infolge der Ungleichungen (20) von selbst erfüllt, wenn die Größen E_{12}, E_{13}, E_{23} alle drei positiv oder eine positiv und zwei negativ sind oder darunter wenigstens eine verschwindende auftritt; wenn aber diese Größen alle drei negativ oder zwei von ihnen positiv, eine negativ sind, so liefert (21) die eine neue Bedingung

$$E_{11} + E_{22} \geqq 2|E_{12}| + 2|E_{13}| + 2|E_{23}|.$$

Wir wollen jetzt den Nachweis erbringen, daß die speciellen, in endlicher Anzahl vorhandenen Ungleichungen (18), (20), (21) die sämmtlichen unendlich vielen Ungleichungen (19) nach sich ziehen und also den Charakter von H als reducirte Form bereits völlig bestimmen.

27. Wir betrachten zu dem Ende die Mannigfaltigkeit der sechs unabhängigen Variabeln $E_{11}, E_{12}, \dots E_{33}$ und in dieser denjenigen Bereich ($\mathfrak{H}$), der durch die sämmtlichen Ungleichungen (18), (19) für diese Variabeln definirt ist, wobei wir noch die Bedingung $E_{11} > 0$ durch $E_{11} \geqq 0$ ersetzen wollen. Jedem Punkte $E_{11}, E_{12}, \dots E_{33}$ in dieser reducirten Kammer ($\mathfrak{H}$) entspricht eine niemals negative ternäre Form H. Da die Ungleichungen (18), (19) linear und homogen in den Variabeln $E_{11}, E_{12}, \dots E_{33}$ sind, so besitzt ($\mathfrak{H}$) die Eigenschaft, mit irgend zwei Punkten (Formen) $H^{(0)}, H^{(1)}$ stets die ganze sie verbindende Strecke, d. h. die Koefficientensysteme der Formen $(1-t)H^{(0)} + tH^{(1)}$ für alle Parameterwerte $t \geqq 0$ und $\leqq 1$ zu enthalten, stellt also einen konvexen Körper in der Mannigfaltigkeit der $E_{11}, E_{12}, \dots E_{33}$ dar. Nach den allgemeinen Grundsätzen über die Begrenzung eines konvexen Körpers [1]) genügt es nun zur Definition des Bereichs ($\mathfrak{H}$), von den Ungleichungen (18), (19) nur jede solche ausdrücklich zu fordern, für welche im Bereiche ($\mathfrak{H}$) ein Punkt gefunden werden kann, der die betreffende Ungleichung mit dem Zeichen $=$, alle davon verschiedenen der Ungleichungen (18), (19) aber mit dem Zeichen $>$ ($<$) erfüllt.

Jeder Punkt H in ($\mathfrak{H}$), der nicht einer wesentlich positiven Form entspricht, ist zufolge der angegebenen Eigenschaft von ($\mathfrak{H}$) gewiß Häufungsstelle von wesentlich positiven reducirten Formen und aus der Ungleichung (16) für diese letzteren Formen geht dann die nämliche Ungleichung auch für H hervor; daher ist für H dann notwendig $D = 0$, $E_{11} = 0$. Die letztere Relation hat wegen (20) noch $E_{12} = 0$, $E_{13} = 0$ zur Folge, und ist die Ungleichung $E_{11} \geqq 0$ hiernach bei der Definition von ($\mathfrak{H}$) entbehrlich. Jeder Punkt von ($\mathfrak{H}$) aber, für welchen $E_{11} > 0$ ist, liefert gewiß eine wesentlich positive Form.

28. Greifen wir nunmehr eine in dem eben besprochenen Sinne notwendige der Ungleichungen (18), (19) heraus; es sei dieses etwa eine Ungleichung

$$H(a, b, c) \geqq E_{33},$$

---

1) Geometrie der Zahlen, Leipzig 1896.

wo a, b, c ganze Zahlen sind und $c \neq 0$ ist. Dann giebt es also im Bereich ($\mathfrak{H}$) irgend eine wesentlich positive Form $H = (E_{11}, E_{12}, \ldots E_{33})$, deren Koefficienten diese Ungleichung mit dem Zeichen $=$, alle davon verschiedenen der Ungleichungen (18), (19) aber mit dem Zeichen $>$ erfüllen.

Bezeichnen wir wie in 24. mit $OABC$ das Grundparallelepiped des Gitters in X, Y, Z, so liegt wegen $c \neq 0$ der Gitterpunkt G ($X = a$, $Y = b$, $Z = c$) außerhalb der Ebene OAB und bietet hier dieselbe Entfernung $\sqrt{H}$ von O wie C dar. Wir könnten daher bei der Aufsuchung einer beliebigen mit H äquivalenten reducirten Form den Punkt G an die Stelle von C treten lassen, und nach (17) muß alsdann die Determinante aus den Koordinaten von A, B, G notwendig ± 1 sein, d. h. wir haben $c = \pm 1$.

Aus der am Schlusse von 22. hinzugefügten Bemerkung über die dichteste gitterförmige Lagerung von Kreisflächen in der Ebene schließen wir analog, daß zur Charakterisirung einer reducirten binären Form

$$H(X, Y) = E_{11} X^2 + 2 E_{12} XY + E_{22} Y^2$$

jedenfalls die Ungleichungen

$$0 \leqq E_{11} \leqq E_{22}, \quad H(X, 1) \geqq E_{22}$$

ausreichen.

Wir ersehen daraus zunächst, daß wir bei der Definition einer reducirten ternären Form von den Ungleichungen (19) gewiß nur die folgenden nötig haben

$$H(X, 1, 0) \geqq E_{22}, \quad H(X, Y, 1) \geqq E_{33}.$$

Nehmen wir jetzt an, es sei $b \neq 0$. Da in den hier aufgeführten Ungleichungen die Größe E_{33} herausfällt, so können wir in der Form $H(X, Y, Z)$ an Stelle des Koefficienten E_{33} den Wert $E_{33}^* = E_{22}$ setzen und die dadurch entstehende neue Form H^* wird ebenfalls reducirt sein. Für diese Form H^* ist nun

$$H^*(a, b, c) = E_{22}^*.$$

Da wir $b \neq 0$ haben, so können wir bei der Aufsuchung einer beliebigen mit H^* äquivalenten reducirten Form den Punkt G an die Stelle von B treten lassen, während wir A und C unverändert beibehalten, und es muß nunmehr die Determinante aus den Koordinaten von A, G, C notwendig ± 1, also $b = \pm 1$ sein.

Der analoge Schluß für binäre Formen zeigt, daß eine reducirte binäre Form $H(X, Y) = (E_{11}, E_{12}, E_{22})$ völlig durch die Un-

gleichungen

$$0 \leqq E_{11} \leqq E_{22}, \quad H(\pm 1, 1) \geqq E_{22}$$

charakterisirt ist.

Mit Rücksicht hierauf brauchen wir nunmehr für eine reducirte ternäre Form $H(X, Y, Z)$ von den Ungleichungen (19) nur noch die folgenden in Betracht zu ziehen:

$$H(\pm 1, 1, 0) \geqq E_{22}, \quad H(\pm 1, 0, 1) \geqq E_{33}, \quad H(X, \pm 1, 1) \geqq E_{33}.$$

Nehmen wir nun an, es sei z. B. $c = 1$, $b = -1$ und $a \neq 0$. Wir ersetzen in H^* die Koefficienten $E^*_{22}, E^*_{23}, E^*_{33}$ durch $E^*_{22} - \varepsilon$, $E^*_{23} - \frac{1}{2}\varepsilon$, $E^*_{33} - \varepsilon$, wobei $\varepsilon > 0$ sei. Die neu entstehende Form H^{**} erfüllt in völlig unveränderter Weise die Beziehungen

$$E^{**}_{22} = E^{**}_{33}, \quad H^{**}(a, b, c) = E^{**}_{33},$$

$$H^{**}(\pm 1, 1, 0) \geqq E^{**}_{22}, \quad H^{**}(\pm 1, 0, 1) \geqq E^{**}_{33}, \quad H^{**}(X, -1, 1) \geqq E^{**}_{33}.$$

Wir setzen $\varepsilon \leqq E^*_{22} - E^*_{11}$ voraus, und es bleibt auch $E^{**}_{11} \leqq E^{**}_{22}$. Sollte nun, wenn wir ε von 0 an bis zu der hier genannten Grenze kontinuirlich wachsen lassen, schließlich einmal in irgend einer Ungleichung $H^{**}(X, 1, 1) \geqq E^{**}_{33}$ das Gleichheitszeichen eintreten, so könnten wir für die betreffende immer noch reducirte Form H^{**} die Punkte $1, 0, 0$; $X, 1, 1$; $a, -1, 1$ an die Stelle von A, B, C treten lassen; die Determinante aus den Koordinaten dieser Punkte aber wäre $= 2$ im Widerspruch mit der Bedingung (17). Also muß H^{**} auch noch bis zu $\varepsilon = E^*_{22} - E^*_{11}$ reducirt bleiben. Bei diesem Werte von ε haben wir nun $E^{**}_{11} = E^{**}_{22}$. Also kann für H^{**} jetzt der Punkt G an die Stelle von A treten, während B und C ihre Rollen beibehalten, und muß endlich die Determinante aus den Koordinaten von G, B, C, also $a = \pm 1$ sein. Damit ist in der Tat die in 26. aufgestellte Behauptung erwiesen.

29. Die erlangten Sätze sprechen wir in folgender Weise aus:

Zu einer beliebig gegebenen ternären positiven quadratischen Form $h(x, y, z)$ kann man immer eine ganzzahlige lineare Substitution mit der Determinante ± 1 bestimmen, durch welche $h(x, y, z)$ in eine Form

$$H(X, Y, Z) = E_{11} X^2 + 2 E_{12} XY + \cdots + E_{33} Z^2$$

übergeht, die den Ungleichungen

$$0 < E_{11} \leqq E_{22} \leqq E_{33}, \quad 2|E_{12}| \leqq E_{11}, \quad 2|E_{13}| \leqq E_{11}, \quad 2|E_{23}| \leqq E_{22}$$

und zudem, wenn $E_{12}E_{13}E_{23} < 0$ ist, noch der Ungleichung

$$2|E_{12}| + 2|E_{13}| + 2|E_{23}| \leqq E_{11} + E_{22}$$

genügt.

Die Form H behält diesen Charakter, wenn man darin noch irgendwie X durch $\pm X$, Y durch $\pm Y$, Z durch $\pm Z$ ersetzt. Abgesehen von diesen möglichen Abänderungen ist jene Substitution und diese reducirte mit h äquivalente Form H völlig bestimmt, wofern in keiner der genannten Ungleichungen das Gleicheitszeichen statthat. In jedem Falle aber sind die Werte E_{11}, E_{22}, E_{33} eindeutig bestimmt. Dabei folgen aus den angenommenen Ungleichungen die sämmtlichen Ungleichungen:

$$H(X, Y, Z) \geqq E_{11}, \quad H(X, Y, Z) \geqq E_{22}, \quad H(X, Y, Z) \geqq E_{33}$$
$$(X, Y, Z \neq 0, 0, 0) \qquad (Y, Z \neq 0, 0) \qquad (Z \neq 0)$$

für ganzzahlige X, Y, Z.

Endlich gilt dabei die Beziehung (Theorem von Gauß):

$$E_{11}E_{22}E_{33} \leqq 2D.$$

In dieser Ungleichung tritt bei gegebenem D das Gleichheitszeichen nur ein, wenn

$$H = \sqrt[3]{2D}(X^2 + Y^2 + Z^2 + XY + XZ + YZ), \text{ bez.}$$
$$= \sqrt[3]{2D}(X^2 + Y^2 + Z^2 - XY - YZ)$$

ist bez. daraus durch Permutation und Vorzeichenänderung der Variabeln hervorgeht, welche speciellen reducirten Formen sämmtlich unter einander äquivalent sind (vgl. auch Fig. 3 in 19).

§ 8. Die weiteren Bedingungen für eine dichteste Lagerung.

30. Wir nehmen jetzt die Behandlung des Problems der dichtesten Lagerung für einen beliebigen konvexen Grundkörper K wieder auf. Die Größe Δ, welche wir für K unter Erfüllung gewisser Ungleichungen zu einem Minimum zu machen suchen, ist eine Funktion der neun Variabeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \gamma_3$, die uns zur Fest-

legung eines Gitters dienen. Bei einem Minimum von Δ können wir nach 21. gewisse 6 bez. 7 Gleichungen als erfüllt voraussetzen. Es fehlen uns daher noch 3 bez. 2 weitere Gleichungen zur Charakterisirung eines Minimums von Δ, die wir jetzt ermitteln wollen.

31. Wir verfolgen zuerst die Umstände des Falles (I) in 21.: Es sollen die Punkte

$$\begin{matrix} \mathfrak{L}, & \mathfrak{M}, & \mathfrak{N}, & \mathfrak{R}, & \mathfrak{S}, & \mathfrak{T} \\ 1,0,0; & 0,1,0; & 0,0,1; & 0,1,-1; & -1,0,1; & 1,-1,0 \end{matrix}$$

auf der Fläche $\mathfrak{F}$, der Begrenzung von $\mathfrak{K}$, und die Punkte $-1,1,1$; $1,-1,1$; $1,1,-1$ außerhalb $\mathfrak{K}$ liegen. Ferner setzen wir voraus, daß nicht auf $\mathfrak{F}$ drei Gitterpunkte vorhanden sind, die ein Gitteroktaeder zweiter Art bestimmen.

Können nun überhaupt außer den genannten 6 Gitterpunkten und ihren 6 Gegenpunkten noch andere Gitterpunkte auf der Fläche $\mathfrak{F}$ auftreten? Nach 15. können neben den Punkten $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ auf der Fläche $\mathfrak{F}$ überhaupt nur solche Gitterpunkte da sein, deren Koordinaten abgesehen von der Reihenfolge und den Vorzeichen eines der folgenden Systeme ergeben:

$$\begin{gathered} 0,1,1;\ 1,1,1;\ 0,1,2;\ 1,1,2;\ 1,2,2; \\ 1,1,3;\ 1,2,3;\ 2,2,3;\ 1,2,4;\ 2,3,4. \end{gathered}$$

Nun leiten wir aus der allgemeinen Funktionalungleichung (8) für einen konvexen Körper insbesondere die folgenden Ungleichungen ab:

$$F\left(\begin{smallmatrix}2\\-2\end{smallmatrix}, 3, \pm 4\right) + F(-1,1,0) + F(-1,0,0) \geqq 4\, F\left(\begin{smallmatrix}0\\-1\end{smallmatrix}, 1, \pm 1\right),$$

$$F\left(-1, \begin{smallmatrix}2\\-2\end{smallmatrix}, \pm 4\right) + F(1,-1,0) + F(0,-1,0) \geqq 4\, F\left(0, \begin{smallmatrix}0\\-1\end{smallmatrix}, \pm 1\right),$$

$$F(a,b,c) + a\, F(-1,0,1) + b\, F(0,-1,1) \geqq (a+b+c)\, F(0,0,1),$$

$$(a,b,c = 2,2,3;\ 1,2,3;\ 1,1,3;\ 1,2,2;\ 1,1,2),$$

$$F\left(\begin{smallmatrix}2\\-1\end{smallmatrix}, -2, 3\right) + F(1,-1,0) \geqq 3\, F\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}, -1, 1\right),$$

$$F(-2,-2,3) + F(-1,0,0) + F(0,-1,0) \geqq 3\, F(-1,-1,1),$$

$$F(1,-2,3) + F(1,-1,0) + F(1,0,0) \geqq 3\, F(1,-1,1),$$

$$F(-1,2,3) + 2\, F(0,-1,1) + F(1,0,0) \geqq 5\, F(0,0,1),$$

$$F(-1,1,3)+F(1,-1,0) \geqq 3\,F(0,0,1),$$

$$F(-1,2,2)+F(-1,0,0) \geqq 2\,F(-1,1,1),$$

$$F(1,-2,2)+F(1,0,0) \geqq 2\,F(1,-1,1),$$

$$F(1,-1,2)+F(1,-1,0) \geqq 2\,F(1,-1,1),$$

$$F(0,1,2)+F(0,-1,1) \geqq 3\,F(0,0,1);$$

auf Grund dieser Ungleichungen sowie der weiteren, die daraus durch Permutation der Variabeln hervorgehen, scheiden von den genannten Systemen sofort eine Reihe als außerhalb des Körpers $\mathfrak{K}$ gelegen aus. Es bleibt die Lage auf $\mathfrak{F}$ nur noch für diejenigen Gitterpunkte fraglich, deren Koordinaten abgesehen von der Reihenfolge eines der Systeme

$$-1,-1,3;\ -1,-1,2;\ 0,-1,2;\ 1,1,1;\ 0,1,1$$

ergeben. Wenn aber einer dieser Gitterpunkte auf $\mathfrak{F}$ liegt, so erlangt man nach 11. entweder durch die Systeme $0,0,-1;\ 1,-1,0;$ $-1,-1,3$ oder $1,0,0;\ 0,1,0;\ -1,-1,2$ oder $1,0,0;\ -1,1,0;$ $0,-1,2$ oder $-1,0,0;\ 0,-1,1$: $1,1,1$ oder $1,-1,0;\ 1,0,-1;$ $0,1,1$ drei Gitterpunkte auf $\mathfrak{F}$, die ein Gitteroktaeder zweiter Art bestimmen. Wir haben demnach jetzt anzunehmen, daß die Fläche $\mathfrak{F}$ neben $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{T}$ und den Gegenpunkten keine weiteren Gitterpunkte aufweist.

Wir legen durch jeden der Punkte $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{T}$ eine Stützebene an $\mathfrak{K}$; die Gleichungen dieser Ebenen seien:

$$
(22)\qquad
\begin{aligned}
L &\equiv X+\lambda_2 Y+\lambda_3 Z = 1,\\
M &\equiv \mu_1 X+Y+\mu_3 Z = 1,\\
N &\equiv \nu_1 X+\nu_2 Y+Z = 1,\\
R &\equiv (\varrho_2-\varrho_1)X+\varrho_2 Y-(1-\varrho_3)Z = 1,\\
S &\equiv -(1-\sigma_3)X+(\sigma_3-\sigma_2)Y+\sigma_3 Z = 1,\\
T &\equiv \tau_1 X-(1-\tau_1)Y+(\tau_1-\tau_3)Z = 1.
\end{aligned}
$$

Ein jeder Ausdruck L, M, N, R, S, T muß im ganzen Bereiche von $\mathfrak{K}$ im Intervalle $\geqq -1$ und $\leqq 1$ liegen. Die Form L wird für jene sechs Gitterpunkte bez.

$$1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_2-\lambda_3, -1+\lambda_3, 1-\lambda_2;$$

mithin sind λ_2, λ_3 beide $\geqq 0$ und $\leqq 1$. Die Form R wird für die sechs Punkte bez.

$$\varrho_2 - \varrho_1, \varrho_2, -1 + \varrho_2, 1, -1 + \varrho_1, -\varrho_1;$$

mithin sind ϱ_2, ϱ_1 beide $\geqq 0$ und $\leqq 1$. Das nämliche gilt von μ_3, μ_1; ν_1, ν_2; σ_3, σ_2; τ_1, τ_3.

Wir denken uns nun die X, Y, Z-Koordinaten in ihrer augenblicklichen Bedeutung festgehalten und variiren dagegen das Gitter ($\mathfrak{G}$) kontinuirlich, indem wir die Punkte $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ an die Stellen verlegen, deren X, Y, Z-Koordinaten

$$1 + \varepsilon X_1, \varepsilon Y_1, \varepsilon Z_1; \ \varepsilon X_2, 1 + \varepsilon Y_2, \varepsilon Z_2; \ \varepsilon X_3, \varepsilon Y_3, 1 + \varepsilon Z_3$$

sind, unter ε einen positiven Parameter verstanden. Dabei sollen die Punkte $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{T}$ in den betreffenden Stützebenen oder auf deren dem Nullpunkte abgewandten Seiten bleiben, d. h. es sollen die Ungleichungen

$$L_1 \geqq 0, M_2 \geqq 0, N_3 \geqq 0, R_2 - R_3 \geqq 0, -S_1 + S_3 \geqq 0, \ T_1 - T_2 \geqq 0$$

gelten; wir bezeichnen hier die Werte der Formen $L, M, \ldots T$ für das System X_i, Y_i, Z_i durch Anhängen des Index i. Nach den vorausgeschickten Bemerkungen wird dabei jedenfalls kein Gitterpunkt ins Innere von $\mathfrak{K}$ eintreten, so lange ε eine gewisse Grenze nicht übersteigt.

Der Wert der Determinante $\varDelta$ verändert sich bei dieser Variation von $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ aus $\varDelta(0)$ in

$$\varDelta(\varepsilon) = \varDelta(0)(1 + \varepsilon(X_1 + Y_2 + Z_3) + \varepsilon^2(\ ) + \varepsilon^3(\ )).$$

Wenn nun nicht $X_1 + Y_2 + Z_3 \geqq 0$ eine notwendige Folge der obigen sechs Ungleichungen ist, so würden wir ε als positive Größe weiter so klein wählen können, daß hierbei $\varDelta$ sich verringert. Für ein Minimum von $\varDelta$ ist danach notwendig, daß die linke Seite dieser letzten Ungleichung eine homogene lineare Kombination der linken Seiten jener früheren sechs Ungleichungen mit nicht negativen Koefficienten ist, d. h. bei einem Minimum von $\varDelta$ müssen die drei Gleichungen

$$(23) \qquad \begin{aligned} X &= lL - sS + tT, \\ Y &= rR + mM - tT, \\ Z &= -rR + sS + nN \end{aligned}$$

mit gewissen (und zwar durchweg nicht negativen) Faktoren l, m, n, r, s, t zu erfüllen sein.

32. Wir betrachten jetzt die Umstände des Falles (II) in 21.: Es sollen die Punkte

$$\begin{array}{cccccc} \mathfrak{L}, & \mathfrak{M}, & \mathfrak{N}, & \mathfrak{R}, & \mathfrak{S}, & \mathfrak{T} \\ 1,0,0; & 0,1,0; & 0,0,1; & 0,1,1; & 1,0,1; & 1,1,0 \end{array}$$

auf der Fläche $\mathfrak{F}$ und der Punkt 1, 1, 1 außerhalb $\mathfrak{K}$ liegen.

Wir legen durch jeden der Punkte $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{T}$ eine Stützebene an $\mathfrak{K}$; die Gleichungen dieser Ebenen seien:

$$(24)\qquad \begin{aligned} L &\equiv X - \lambda_2 Y - \lambda_3 Z = 1, \\ M &\equiv -\mu_1 X + Y - \mu_3 Z = 1, \\ N &\equiv -\nu_1 X - \nu_2 Y + Z = 1, \\ R &\equiv -\varrho_1 X + \varrho_2 Y + (1-\varrho_2) Z = 1, \\ S &\equiv (1-\sigma_3) X - \sigma_2 Y + \sigma_3 Z = 1, \\ T &\equiv \tau_1 X + (1-\tau_1) Y - \tau_3 Z = 1. \end{aligned}$$

In $\mathfrak{K}$ müssen die Ausdrücke L, M, N, R, S, T durchweg $\geqq -1$ und $\leqq 1$ bleiben. Die Form L wird für jene sechs Gitterpunkte bez.

$$1,\ -\lambda_2,\ -\lambda_3,\ -\lambda_2-\lambda_3,\ 1-\lambda_3,\ 1-\lambda_2;$$

mithin ist $0 \leqq \lambda_2 \leqq 1$, $0 \leqq \lambda_3 \leqq 1$ und $\lambda_2 + \lambda_3 \leqq 1$. Die Form R wird für die sechs Punkte bez.

$$-\varrho_1,\ \varrho_2,\ 1-\varrho_2,\ 1,\ -\varrho_1+1-\varrho_2,\ -\varrho_1+\varrho_2;$$

mithin ist $0 \leqq \varrho_2 \leqq 1$ und entweder $0 \leqq \varrho_1 \leqq 1$ oder $0 \leqq -\varrho_1$ und dabei zugleich $-\varrho_1 \leqq \varrho_2$ und $-\varrho_1 \leqq 1-\varrho_2$. Entsprechende Umstände gelten für μ_3, μ_1; ν_1, ν_2; σ_3, σ_2; τ_1, τ_3.

Wir variiren nun $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ derart, daß ihre neuen Orte in Bezug auf das alte X, Y, Z-Koordinatensystem werden:

$$1+\varepsilon X_1,\ \varepsilon Y_1,\ \varepsilon Z_1;\ \varepsilon X_2,\ 1+\varepsilon Y_2,\ \varepsilon Z_2;\ \varepsilon X_3,\ \varepsilon Y_3,\ 1+\varepsilon Z_3,$$

wobei ε ein Parameter sei. Dabei soll jeder der sechs Punkte $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{T}$ in der für ihn konstruirten Stützebene an $\mathfrak{K}$ bleiben, d. h. es sollen die Gleichungen

$$L_1 = 0,\ M_2 = 0,\ N_3 = 0,\ R_2 + R_3 = 0,\ S_1 + S_3 = 0,\ T_1 + T_2 = 0$$

für die bezüglichen Systeme $X_\iota, Y_\iota, Z_\iota$ gelten.

Falls nun auf der Fläche $\mathfrak{F}$ außer $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{T}$ und den Gegenpunkten keine weiteren Gitterpunkte vorhanden sind, treten bei hinreichend kleinem Werte von $|\varepsilon|$ während der hier vorzu-

nehmenden Variation des Gitters keine Gitterpunkte in $\mathfrak{K}$ ein, und zeigt eine ähnliche Ueberlegung wie in 31., *daß für ein Minimum von Δ das Bestehen der drei Gleichungen*

$$(25)\qquad \begin{aligned} X &= lL+sS+tT, \\ Y &= rR+mM+tT, \\ Z &= rR+sS+nN \end{aligned}$$

mit irgend welchen Faktoren l, m, n, r, s, t erforderlich ist.

Wofern jedoch noch weitere Gitterpunkte auf $\mathfrak{F}$ vorhanden sind, so können wir, wie nun gezeigt werden soll, die Formen $L, M, \ldots T$ jedenfalls immer derart *wählen*, daß während der fraglichen Variation bei hinreichend kleinem $|\varepsilon|$ kein Gitterpunkt ins Innere von $\mathfrak{K}$ eintritt, und finden wir dann wieder für ein Minimum von Δ die Gleichungen (25) als notwendig.

In der Tat, wir berücksichtigen die Bemerkung in 15. und gebrauchen zudem die folgenden Ungleichungen sowie die entsprechenden Beziehungen bei Permutation der Variabeln:

$$F\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{-1}, \genfrac{}{}{0pt}{}{2}{-2}, \pm 4\right) + F(1,1,0) + F(0,1,0) \geqq 4F\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{0}, \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{0}, \pm 1\right),$$

$$F\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{-1}, \genfrac{}{}{0pt}{}{2}{-1}, \pm 3\right) + F(1,1,0) \geqq 3F\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{0}, \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{0}, \pm 1\right),$$

$$F(-a,-b,c) + aF(1,0,1) + bF(0,1,1) \geqq (a+b+c)\,F(0,0,1),$$

$$(-a, -b, c = -1, -2, 3;\ -1, -2, 2;\ -1, -1, 2),$$

$$F(-2,2,3) + 2F(-1,-1,0) + 3F(-1,0,-1) \geqq 7F(-1,0,0),$$

$$F(1,2,3) + F(1,1,0) + F(1,0,0) \geqq 3F(1,1,1),$$

$$F(1,-1,3) + F(0,1,1) + F(-1,0,0) \geqq 4F(0,0,1),$$

$$F(1,2,2) + F(1,0,0) \geqq 2F(1,1,1),$$

$$F(-1,2,2) + \tfrac{1}{2}F(1,1,0) + \tfrac{1}{2}F(1,0,1) \geqq \tfrac{5}{2}F(0,1,1),$$

$$F(1,1,2) + F(1,1,0) \geqq 2F(1,1,1),$$

$$F(0,-1,2) + F(0,1,1) \geqq 3F(0,0,1).$$

Danach können nur noch diejenigen Gitterpunkte als auf $\mathfrak{F}$ gelegen in Frage kommen, deren Koordinaten, von der Reihenfolge abgesehen, eines der folgenden Systeme ergeben

$$-1, 1, 2;\ 0, 1, 2;\ -1, 1, 1;\ 0, -1, 1.$$

Wenn $F(-1,1,2) = 1$ ist, so haben wir nach dem Ausdrucke von L in (24) notwendig $L = X$, und wir können daher $S = L$

und $T = L$ wählen; dann folgt oben $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$. Der Körper $\mathfrak{K}$ befindet sich ganz im Bereiche $-1 \leqq X \leqq 1$, und die in den begrenzenden Ebenen $X = \pm 1$ gelegenen Gitterpunkte bleiben bei der vorzunehmenden Variation in diesen Ebenen. — Gleichzeitig könnte in der Ebene $X = 0$ als ein weiterer Gitterpunkt auf $\mathfrak{F}$ der Punkt $0, 1, 2$ oder $0, 2, 1$ oder $0, -1, 1$ auftreten; zu dem Ende müßte $\varrho_2 = 1$ bez. $\varrho_2 = 0$ bez. $\nu_2 = 0$ sein, und könnten wir dann $M = R$ bez. $N = R$ bez. $R = N$ wählen mit dem Erfolge, daß die anzuschließende Variation jenen Gitterpunkt nicht ins Innere von $\mathfrak{K}$ führt.

Wenn $F(-1, 1, 1) = 1$ ist, so finden wir wieder $L = X$ und treffen genau die nämlichen Bemerkungen wie soeben zu.

Wenn $F(0, 1, 2) = 1$ ist, so folgt mit Notwendigkeit $N = -Y + Z$, und können wir $S = N$ und $T = -N$ wählen, um den Zweck, den wir im Auge haben, zu erreichen. — Gleichzeitig könnte in der Ebene $-Y + Z = 0$ der Gitterpunkt $-1, 1, 1$ auf $\mathfrak{F}$ auftreten, in welchem Falle wir unter Vorwegnahme dieser Beziehung wie hier zuletzt verfahren.

Wenn $F(0, -1, 1) = 1$ ist, so folgt $\mu_2 = 0$, $\nu_2 = 0$ und bildet der Schnitt von $\mathfrak{K}$ mit der Ebene $X = 0$ das Viereck mit den Ecken $0, \pm 1, \pm 1$; wir können dann $R = N$ wählen, wobei mit $0, 0, 1$ und $0, 1, 1$ auch $0, -1, 1$ in der Ebene $N = 1$ verbleiben wird. — Finden sich zwei Punkte wie $1, -1, 0$ und $-1, 0, 1$ gleichzeitig auf $\mathfrak{F}$, so folgt $L = X$, und können wir wie vorhin im Falle $F(-1, 1, 1) = 1$ vorgehen.

33. Wir betrachten endlich den Fall III aus 21.: Es sollen die sieben Gitterpunkte

$$\mathfrak{L},\quad \mathfrak{M},\quad \mathfrak{N},\quad \mathfrak{R},\quad \mathfrak{S},\quad \mathfrak{T},\quad \mathfrak{Q}$$
$$1, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, 1;\ 0, 1, 1;\ 1, 0, 1;\ 1, 1, 0 \text{ und } 1, 1, 1$$

auf $\mathfrak{F}$ liegen.

Wir gebrauchen in Bezug auf die ersten 6 Punkte dieselben Bezeichnungen wie in 32., und ferner sei

$$(26) \qquad Q \equiv \varkappa_1 X + \varkappa_2 Y + \varkappa_3 Z = 1 \qquad (\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 = 1)$$

die Gleichung einer Stützebene an $\mathfrak{K}$ durch den Punkt $\mathfrak{Q}$. Der Ausdruck Q wird für jene 7 Gitterpunkte bez.

$$\varkappa_1,\ \varkappa_2,\ \varkappa_3,\ \varkappa_2 + \varkappa_3,\ \varkappa_1 + \varkappa_3,\ \varkappa_1 + \varkappa_2,\ \varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 = 1,$$

sodaß $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ sämmtlich $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind. Ferner wird für den Punkt $\mathfrak{Q}$ der Ausdruck $R = 1 - \varrho_1$, sodaß jetzt notwendig $0 \leqq \varrho_1 \leqq 1$ ist, und analog für σ_2, τ_3.

Wir variiren nun die Punkte $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ in

$$1+\varepsilon X_1,\ \varepsilon Y_1,\ \varepsilon Z_1;\quad \varepsilon X_2,\ 1+\varepsilon Y_2,\ \varepsilon Z_2;\quad \varepsilon X_3,\ \varepsilon Y_3,\ 1+\varepsilon Z_3,$$

und es sollen dabei $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ in den bezüglichen Stützebenen an $\mathfrak{K}$ verbleiben, also für die Systeme X_i, Y_i, Z_i die Relationen gelten

$$(27)\qquad \begin{gathered} L_1 = 0,\ M_2 = 0,\ N_3 = 0,\ Q_1+Q_2+Q_3 = 0, \\ R_2+R_3 = 0,\ S_1+S_3 = 0,\ T_1+T_2 = 0, \end{gathered}$$

Eine ähnliche Ueberlegung wie in 32. zeigt, wofern bei hinreichend kleinem Betrage von ε durch jene Variationen kein Gitterpunkt ins Innere von $\mathfrak{K}$ eindringt, *daß für ein Minimum von Δ das Bestehen der drei Gleichungen*

$$(28)\qquad \begin{aligned} X &= lL+sS+tT+qQ, \\ Y &= rR+mM+tT+qQ, \\ Z &= rR+sS+nN+qQ \end{aligned}$$

mit irgend welchen Konstanten l, m, n, q, r, s, t notwendig ist. Die ausgesprochene Bedingung ist ohne Weiteres erfüllt, falls $\mathfrak{F}$ überhaupt keine Gitterpunkte neben $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ und den Gegenpunkten enthält, und anderenfalls kann ihr wenigstens immer durch geeignete Wahl der Ausdrücke L, M, N, Q, R, S, T genügt werden.

In der Tat, wie die in 32. entwickelten Ungleichungen dartun, könnten jetzt als Gitterpunkte auf $\mathfrak{F}$ außer den bereits dort betrachteten Punkten noch die Punkte $1, 2, 3$; $1, 2, 2$; $1, 1, 2$ und die daraus durch Permutation der Koordinaten entstehenden Systeme in Betracht kommen. Vermöge der Substitution

$$X^* = -X,\quad Y^* = Y-X,\quad Z^* = Z-X$$

nun gehen die Wertsysteme X, Y, Z:

$$\begin{gathered} 1,0,0;\ 0,1,0;\ 0,0,1;\ 0,1,1;\ 1,0,1;\ 1,1,0;\ 1,1,1; \\ 1,2,3;\ 1,2,2;\ 1,1,2;\ -1,1,0;\ 0,-1,1 \end{gathered}$$

in die Wertsysteme X^*, Y^*, Z^*:

$$\begin{gathered} -1,-1,-1;\ 0,1,0;\ 0,0,1;\ 0,1,1;\ -1,-1,0;\ -1,0,-1;\ -1,0,0; \\ -1,1,2;\ -1,1,1;\ -1,0,1;\ 1,2,1;\ 0,-1,1 \end{gathered}$$

über, und es erledigt sich das Auftreten irgend eines der zuletzt genannten Gitterpunkte auf $\mathfrak{F}$ wesentlich wie in 32. das Auftreten eines der Punkte $-1, 1, 2$; $-1, 1, 1$; $-1, 0, 1$.

Als einzige neue Möglichkeit kommt in Frage, daß zwei Punkte wie $1, -1, 0$ und $1, 1, 2$ gleichzeitig sich auf $\mathfrak{F}$ vorfinden. Dazu müssen wir $\lambda_2 = 0$, $\mu_1 = 0$, $\nu_1 + \nu_2 = 1$, $\varkappa_3 = 0$ haben. Wir können jedenfalls eine Relation

$$l_0 L + m_0 M + n_0 N = q_0 Q$$

mit Koefficienten l_0, m_0, n_0, q_0, die nicht sämmtlich Null sind, herstellen. Da die Rollen der Paare $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}, \mathfrak{Q}'$ sowie der Elemente in jedem Paare hier vertauschbar sind, dürfen wir annehmen, es seien $|l_0|$, $|m_0|$, $|n_0|$ sämmtlich $\leqq |q_0|$. Durch Verwendung der Punkte $1, 1, 1$ und $0, 0, -1$ erhalten wir aus der letzten Gleichung

$$l_0(1-\lambda_3) + m_0(1-\mu_3) = q_0, \quad l_0\lambda_3 + m_0\mu_3 = n_0.$$

Für $\lambda_3 = 0$ würde $L = X$ folgen, welchen Fall wir wie in 32. erledigen könnten. Wir denken uns daher $\lambda_3 > 0$ und ebenso $\mu_3 > 0$. Alsdann zeigen die zwei Gleichungen hier, daß l_0, m_0 und weiter n_0 dasselbe Vorzeichen wie q_0 haben, und wir richten $l_0 + m_0 = n_0 + q_0 = 1$ ein. Nun können wir

$$T = l_0 L + m_0 M = -n_0 N + q_0 Q \tag{29}$$

wählen. Dabei wird in der Tat $T = 1$ eine Stützebene an $\mathfrak{K}$ durch den Punkt $\mathfrak{T}$, und bei der in Rede stehenden Variation folgt durch die Gleichungen (27):

$$l_0 L_2 + m_0 M_1 = 0, \; -n_0(N_1 + N_2 + N_3) - q_0 Q_3 = 0,$$

sodaß einerseits nicht L_2 und M_1, andererseits nicht $N_1 + N_2 + N_3$ und Q_3 zwei von Null verschiedene Werte mit gleichem Vorzeichen sein können. Nun wird für den Punkt $1, -1, 0$ bei jener Variation: $L = 1 - \varepsilon L_2$, $-M = 1 - \varepsilon M_1$, sodaß wenigstens eine dieser zwei Größen $\geqq 1$ bleibt, und für den variirten Punkt $1, 1, 2$ wird $N = 1 + \varepsilon(N_1 + N_2 + N_3)$, $Q = 1 + \varepsilon Q_3$, sodaß wenigstens eine dieser zwei Größen $\geqq 1$ bleibt.

§ 9. Dichteste Lagerung von Tetraedern.

34. Wir wenden jetzt unsere Ergebnisse speciell auf die dichteste Lagerung von Tetraedern oder von Oktaedern an. Es sei

$$\varphi = -\xi + \eta + \zeta, \quad \chi = \xi - \eta + \zeta, \quad \psi = \xi + \eta - \zeta, \quad \omega = -\xi - \eta - \zeta,$$

so gilt

(30) $$\varphi+\chi+\psi+\omega=0$$

und definiren die Ungleichungen

$$\varphi \leqq \tfrac{1}{4}, \quad \chi \leqq \tfrac{1}{4}, \quad \psi \leqq \tfrac{1}{4}, \quad \omega \leqq \tfrac{1}{4}$$

den Bereich eines Tetraeders; in diesem Bereiche sind andererseits $\varphi, \chi, \psi, \omega$ stets $\geqq -\tfrac{3}{4}$. Dieses Tetraeder nehmen wir jetzt für den Grundkörper K, sein Volumen ist $J = \tfrac{1}{24}$. Der zugehörige Körper $\tfrac{1}{2}(K+K')$ mit Mittelpunkt, der in Bezug auf genau dieselben Gitter ($\mathfrak{G}$) wie K solche Anordnungen gestattet, wobei die Körper um die verschiedenen Gitterpunkte gesondert liegen, ist dann das Oktaeder

$$-\tfrac{1}{2} \leqq \varphi \leqq \tfrac{1}{2}, \; -\tfrac{1}{2} \leqq \chi \leqq \tfrac{1}{2}, \; -\tfrac{1}{2} \leqq \psi \leqq \tfrac{1}{2}, \; -\tfrac{1}{2} \leqq \omega \leqq \tfrac{1}{2};$$

diese acht Ungleichungen können in die eine Bedingung

$$|\xi|+|\eta|+|\zeta| \leqq \tfrac{1}{2}$$

zusammengefaßt werden. Das Volumen dieses Oktaeders $\tfrac{1}{2}(K+K')$ ist $\tfrac{1}{6}$. Wir substituiren nun

$$\xi=\alpha_1 X+\alpha_2 Y+\alpha_3 Z, \quad \eta=\beta_1 X+\beta_2 Y+\beta_3 Z, \quad \zeta=\gamma_1 X+\gamma_2 Y+\gamma_3 Z,$$

wobei die Determinante der drei linearen Ausdrücke $\neq 0$ sei, und wir fragen nach dem Minimum für den absoluten Betrag Δ dieser Determinante, während vom ganzen Zahlengitter in X, Y, Z bloß der Nullpunkt ins Innere des Oktaeders $\mathfrak{K} = K+K'$ fällt.

Wir bringen nach einander die verschiedenen Regeln des § 8 zur Anwendung. Von dem einen in 33. am Schlusse berührten Ausnahmefalle abgesehen, der, wie sich zeigen wird, hier nicht in Betracht kommt, können wir die jedesmal einzuführenden 6 oder 7 Stützebenen an $\mathfrak{K}$ immer als Seitenflächen dieses Oktaeders gewählt voraussetzen, wir können also annehmen, daß jede einzelne der Formen $L, M, N, \ldots$ mit einem von den Ausdrücken $\pm\varphi, \pm\chi, \pm\psi, \pm\omega$ übereinstimmt.

35. Wir wollen vorweg einen speciellen Fall behandeln, wie er in 32. zur Sprache kam. Es mögen die Umstände des Falles (II) dort gelten, und dabei sei $\omega = Z$. Der Schnitt von $\mathfrak{K}$ mit der Ebene $Z=0$ ist alsdann ein Sechseck mit O als Mittelpunkt, bei dem die Diagonalen den Seiten parallel sind. Auf diesem Sechsecke liegen die Gitterpunkte $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{T}\,(1,0,0;\ 0,1,0;\ 1,1,0)$. Wir können annehmen, daß die Ausdrücke L, M, T, in irgend einer Reihenfolge genommen, mit $\pm\varphi, \pm\chi, \pm\psi$ übereinstimmen, denn wenn zwei jener Punkte in einer und derselben Seite des Sechsecks liegen

sollten, so müßten die drei Punkte sämmtlich Ecken des Sechsecks werden.

Die Gleichung (30) ergiebt nun mit Rücksicht auf die Ausdrücke (24): $\mu_1 = 1 - \tau_1, \lambda_2 = \tau_1$, und die Gleichungen (25) führen dann zu $\tau_1 = \frac{1}{2}$, sodaß die 3 Gitterpunkte $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{T}$ mit ihren Gegenpunkten die Mitten der Seiten des Sechsecks bilden. Durch kontinuirliche Variation von $\mathfrak{N}(0, 0, 1)$ auf der Seitenfläche $Z = 1$, wobei Δ sich nicht ändert, können wir insbesondere folgende Ausdrücke erzielen:

$$L = X - \tfrac{1}{2} Y - \tfrac{1}{2} Z, M = -\tfrac{1}{2} X + Y - \tfrac{1}{2} Z, T = \tfrac{1}{2} X + \tfrac{1}{2} Y,$$

$$N = R = S = Z;$$

dabei liegen in der Seitenfläche $Z = 1$ von $\mathfrak{R}$ die fünf Gitterpunkte

$$-1, -1, 1;\ 0, 0, 1;\ 1, 1, 1;\ 1, 0, 1;\ 0, 1, 1.$$

Variiren wir nun $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ in

$$1 + \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon;\ -\varepsilon, 1 - \varepsilon, -\varepsilon;\ -\varepsilon, -2\varepsilon, 1,$$

während ε positiv sei,. so tritt bei hinreichend kleinem ε kein Gitterpunkt ins Innere von $\mathfrak{R}$ ein und Δ geht in $\Delta(1 - \varepsilon^2)$ über Also liegt hier kein Minimum von Δ vor.

36. Nach Beseitigung dieses speciellen Falles gehen wir zuerst auf die Umstände des Falles (I) gemäß 31. ein, wobei die Punkte $1, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, 1;\ 0, 1, -1;\ -1, 0, 1;\ 1, -1, 0$ auf $\mathfrak{F}$ und $-1, 1, 1;\ 1, -1, 1;\ 1, 1, -1$ außerhalb $\mathfrak{R}$ liegen sollen.

Da für die 6 Ausdrücke L, M, N, R, S, T in (22) nur die vier Paare $\pm\varphi, \pm\chi, \pm\psi, \pm\omega$ in Betracht kommen, so müssen unter diesen Ausdrücken entweder irgend drei oder zweimal je zwei anzugeben sein, die bis auf den Faktor ± 1 übereinstimmen.

Nach den Bedingungen für die Koefficienten in (22) kann nicht $L = -M$ sein. — Die Annahme $L = R$ führt zu $L = X + Y$. Der Schnitt von $\mathfrak{R}$ mit der Ebene $X + Y = 0$ ist dann ein Sechseck mit nur zwei Paaren von Gitterpunkten auf dem Rande, durch $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{T}$ repräsentirt, und wir können, sei es durch alleinige Variation von $\mathfrak{N}$ oder von $\mathfrak{T}$, den Wert von Δ verringern.

Stellen wir uns die Figur des Tetraeders aus den Vektoren $1, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, 1;\ 0, 1, -1;\ -1, 0, 1;\ 1, -1, 0$ vor (Fig. 3 links in 19.) und beachten, wie darin die Rollen der einzelnen Vektoren vertauscht werden können, so leuchtet ein, daß wir nach den letzten Bemerkungen jetzt überhaupt die Gleichheit für irgend zwei der Ausdrücke $\pm L, \dots \pm T$ ausschließen können, falls die zugehörigen

Systeme $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}', \ldots \mathfrak{T}, \mathfrak{T}'$ zwei solchen Vektoren in jenem Tetraeder entsprechen, die entweder sich in einer Ecke mit ihren Richtungen aneinanderschließen oder auf gegenüberliegenden Kanten Platz finden. Danach brauchen wir nur noch die folgenden Annahmen zu diskutiren:

1) $L = M = N$. — Daraus folgt $L = X + Y + Z$. Es sei dieser Ausdruck etwa $= \omega$, so ergeben sich ganz entsprechende Umstände wie in dem Falle $\omega = Z$, der in 35. vorweggenommen wurde, und ist Δ hier nicht ein Minimum.

2) $L = M, R = -S$. — Hierbei folgt

$$L = X + Y + \lambda_3 Z, R = \varrho_3 (X + Y) - (1 - \varrho_3) Z.$$

Aus der dritten Gleichung in (23):

$$Z = -rR + sS + nN$$

geht dann entweder $R = -Z$ hervor, welcher Fall sich ähnlich wie in 35. erledigt, oder $N \equiv 0 \pmod{X + Y, Z}$. In letzterem Falle wäre die Determinante von L, R, N Null, während wir uns diese Formen hier als drei verschiedene Ausdrücke $\pm\varphi, \pm\chi, \pm\psi, \pm\omega$ denken müssen, um nicht auf schon erledigte Fälle zurückzukommen.

3) $L = N$, $R = -S$. — Hier wird

$$N = X + \nu_2 Y + Z,\ R = \varrho_3 (X + Y) - (1 - \varrho_3) Z,$$

und die soeben erwähnte Gleichung für Z erfordert entweder $N = X + Y + Z$, oder $R = -Z$, welche Fälle schon Erledigung fanden.

37. Wir betrachten zweitens die Umstände des Falles (II) gemäß 32., wobei die Punkte $1, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, 1$; $0, 1, 1$; $1, 0, 1$; $1, 1, 0$ auf $\mathfrak{F}$ und $1, 1, 1$ außerhalb $\mathfrak{K}$ liegen sollen.

Nach den Bedingungen für die Koefficienten in den Ausdrücken (24) kann nicht $L = M$ sein. — Die Annahme $L = -M$ führt zu $L = X - Y$ und ist hier wesentlich wie der in 35. vorausgeschickte Specialfall zu erledigen. — Ferner kann nicht $L = R$, nicht $L = -S$ und nicht $L = -T$ sein. — Die Annahme $R = -S$ führt auf $R = -X + Y$.

Mit Rücksicht auf die Vertauschbarkeit der Rollen der drei Paare L, R; M, S; N, T bleiben hiernach nur die folgenden verschiedenen Fälle zu diskutiren, wobei wir bei der Behandlung jedes einzelnen Falles annehmen, daß die Umstände der vorhergegangenen Fälle ausgeschlossen sind:

1) $R = S = N$. — Hier folgt $N = Z$ und wäre dieses der Fall aus 35.

2) $R = S = T$. — Wir haben danach $R = \frac{1}{3}(X+Y+Z)$. Die Relationen (25) führen zu $\lambda_2 = \lambda_3, \mu_1 = \mu_3, \nu_1 = \nu_2$. Gemäß (30) muß dann $\pm L \pm M \pm N = R$ sein, und diese Bedingung zieht notwendig die Ausdrücke

$$L = X - \tfrac{1}{2} Y - \tfrac{1}{2} Z, M = -\tfrac{1}{2} X + Y - \tfrac{1}{2} Z, N = -\tfrac{1}{2} X - \tfrac{1}{2} Y + Z$$

nach sich. Variiren wir dann die Punkte $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ in

$$1, \varepsilon, -\varepsilon;\ \varepsilon, 1, -\varepsilon;\ 0, 0, 1,$$

so tritt bei hinreichend kleinem Betrage von ε kein Gitterpunkt ins Innere von $\mathfrak{K}$ ein, nnd Δ geht in $\Delta(1-\varepsilon^2)$ über; also ist hier kein Minimum von Δ vorhanden.

3) $R = -L$, $S = -M$. — Wir erhalten

$$L = X - \lambda_2 Y - (1-\lambda_2) Z,\ M = -\mu_1 X + Y - (1-\mu_1) Z.$$

Für den Punkt $1, 1, 1$ ist $L = 0$, $M = 0$ und muß für ihn daher $N \neq 0$ sein, da wir in L, M, N drei der Ausdrücke $\pm\varphi, \pm\chi, \pm\psi, \pm\omega$ haben; mithin folgt $\nu_1 + \nu_2 < 1$ und fällt daher N auch von $-T$ verschieden aus. Wir müssen nun $\pm L \pm M \pm N = T$ haben. Da $1, 1, 1$ nicht im Inneren von $\mathfrak{K}$ liegt, folgt daraus notwendig $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = 0$, also $N = Z$.

4) $R = -L$, $S = N$. — Hier folgt

$$-R = X - \lambda_2 Y - (1-\lambda_2) Z,\ N = -\nu_2 Y + Z,$$

und die dritte Gleichung in (25):

$$Z = rR + sS + nN$$

erfordert $N = Z$.

5) $R = M$, $S = L$. — Wir haben dann

$$M = -\mu_1 X + Y,\ L = X - \lambda_2 Y,$$

und aus der ersten Gleichung in (25): $X = lL + sS + tT$ würde $L = X$ oder $T = \tau_1 X + (1-\tau_1) Y$ folgen. In letzterem Falle aber wäre die Determinante von L, M, T Null, während diese Formen hier drei der Ausdrücke $\pm\varphi, \pm\chi, \pm\psi, \pm\omega$ darstellen sollen.

6) $R = M$, $S = N$. — Hier wäre

$$R = -\mu_1 X + Y,\ N = -\nu_2 Y + Z,$$

und die im Falle 4) genannte Gleichung für Z würde $N = Z$ oder $R = Y$ erfordern.

7) $R = S$, $T = N$. — Wir erhalten hiernach

$$N = -\nu_1 X - (1-\nu_1) Y + Z, \quad R = \varrho_2 (X+Y) + (1-\varrho_2) Z, \quad \varrho_2 \leqq \tfrac{1}{2}$$

und aus der Relation für Z folgt dann $R = Z$ oder aber $N = -\frac{1}{2} X - \frac{1}{2} Y + Z$. In letzterem Falle führen die Gleichungen (25) und die Beziehung $\pm L \pm M \pm N = R$ weiter zu den Ausdrücken

$$L = X - \tfrac{1}{4} Y - \tfrac{1}{8} Z, \quad M = -\tfrac{1}{4} X + Y - \tfrac{1}{8} Z,$$
$$R = S = \tfrac{1}{4} X + \tfrac{1}{4} Y + \tfrac{3}{4} Z.$$

Variiren wir nun die Punkte $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ in

$$1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon, -\tfrac{3}{2}\varepsilon, -\varepsilon; \; -\tfrac{3}{2}\varepsilon, 1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon, -\varepsilon; \; \varepsilon, \varepsilon, 1+\varepsilon,$$

so tritt bei hinreichend kleinem Betrage von ε kein Gitterpunkt ins Innere von $\mathfrak{K}$ ein, und $\varDelta$ geht in $\varDelta(1-\varepsilon^2)$ über. Also ist hier $\varDelta$ nicht ein Minimum.

8) $R = S$, $T = L$. — Hier wird

$$S = \varrho_2 (X+Y) + (1-\varrho_2) Z, \quad L = X - \lambda_3 Z,$$

und aus $X = lL + sS + tT$ folgt notwendig $L = X$ oder $S = Z$.

Auf diese Weise hat auch die Betrachtung des Falles (II) zu keinem Falle eines Minimums von $\varDelta$ geführt.

38. Wir betrachten endlich die Umstände des Falles (III) gemäß 33, wobei auf $\mathfrak{F}$ die sieben Punkte $1,0,0$; $0,1,0$; $0,0,1$; $0,1,1$; $1,0,1$; $1,1,0$; $1,1,1$ liegen sollen.

Die Annahme $R = S$ würde jetzt, da hier ϱ_1 und $\sigma_2 \geqq 0$ sind, $R = Z$ zur Folge haben. — Beachten wir noch, daß die Rollen der vier Punkte $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{Q}'$ durchaus vertauschbar sind, so können wir uns auf die Diskussion folgender Annahmen beschränken und dabei ferner $L, M, N, -Q$ als mit $\pm\varphi, \pm\chi, \pm\psi, \pm\omega$ identisch voraussetzen:

1) $L = -R$, $M = -S$, $N = -T$. — Hier würde für den Punkt $1,1,1$ sich $L = 0$ herausstellen und ebenso $M = 0$, $N = 0$, was unmöglich ist.

2) $L = S$, $M = R$, $N = -T$. — Hier hätten wir

$$L = X - \lambda_2 Y, \quad M = -\mu_1 X + Y, \quad N = -\nu_1 X - (1-\nu_1) Y + Z$$

und aus $\pm L \pm M \pm N = Q$ und nach (26) folgt notwendig $Q = Z$.

3) $L = S$, $M = T$, $N = R$. — In diesem Falle erhalten wir zunächst

$$L = X - \lambda_2 Y,\ M = Y - \mu_2 Z,\ N = -\nu_1 X + Z.$$

Würde $0, 1, -1$ auf $\mathfrak{F}$ liegen, so müßte $N = Z$ sein; der am Schlusse von 33. behandelte Ausnahmefall kommt danach hier nicht in Frage.

Aus $\pm L \pm M \pm N = Q$ folgt $(1-\nu_1)+(1-\lambda_2)+(1-\mu_2) = 1$. Die Relationen (28) in 33. ergeben sodann $\lambda_2 = \mu_2 = \nu_1$. Mithin kommen wir hier wesentlich zu folgenden Ausdrücken für die Formen $\varphi, \chi, \psi, \omega$:

$$(31)\qquad \begin{gathered} \varphi = X - \tfrac{2}{3} Y,\ \chi = Y - \tfrac{2}{3} Z,\ \psi = -\tfrac{2}{3} X + Z, \\ \omega = -\tfrac{1}{3} X - \tfrac{1}{3} Y - \tfrac{1}{3} Z. \end{gathered}$$

Bei diesen Ausdrücken wird $\Delta = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{8}{27}\right) = \frac{19}{108}$. Daß in diesem einzig übrig gebliebenen Falle Δ in der Tat ein Minimum sein muß, versteht sich von selbst und kann leicht verificirt werden.

39. Beachten wir noch, daß in den Ausdrücken (31) für $\varphi, \chi, \psi, \omega$ die eine Form ω und für die anderen die cyklische Folge φ, χ, ψ bevorzugt erscheint, so können wir endlich das Resultat aussprechen:

Gegebene Tetraeder (Oktaeder) in unendlicher Anzahl, die sämmtlich mit einem unter ihnen, dem Tetraeder

$$-\xi+\eta+\zeta \leqq \tfrac{1}{2},\ \xi-\eta+\zeta \leqq \tfrac{1}{2},\ \xi+\eta-\zeta \leqq \tfrac{1}{2},\ -\xi-\eta-\zeta \leqq \tfrac{1}{2}$$

(dem Oktaeder

$$|\xi|+|\eta|+|\zeta| \leqq \tfrac{1}{2})$$

kongruent und parallel orientirt sind, können sich auf acht Arten in dichtester gitterförmiger Lagerung befinden. Diese Lagerungen werden erhalten, indem $\pm\xi, \pm\eta, \pm\zeta$ oder $\pm\xi, \pm\zeta, \pm\eta$ irgendwie mit solchen Vorzeichen, deren Produkt $+1$ ist, gleich

$$-\tfrac{5}{6} X + \tfrac{1}{6} Y + \tfrac{1}{6} Z,\ \tfrac{1}{6} X - \tfrac{5}{6} Y + \tfrac{1}{6} Z,\ \tfrac{1}{6} X + \tfrac{1}{6} Y - \tfrac{5}{6} Z$$

gesetzt werden und das Zahlengitter in X, Y, Z als Ort für die Schwerpunkte der Körper genommen wird. Der von den Tetraedern (Oktaedern) erfüllte Raum verhält sich dabei zu dem von ihnen freigelassenen

Raume bez. zu dem ganzen unendlichen Raume wie

$$\frac{1}{24}\left(\frac{1}{6}\right):\frac{29}{216}\left(\frac{1}{108}\right):\frac{19}{108}.$$

Die Fig. 6 zeigt für den durch die Ausdrücke (31) charakterisirten Fall der dichtesten Lagerung von Tetraedern oder Oktaedern die Lage der Gitterpunkte in dem halben, durch die Flächen $\varphi = 1$, $\chi = 1$, $\psi = 1$, $\omega = -1$ gebildeten Netze des Oktaeders $\mathfrak{K}$.

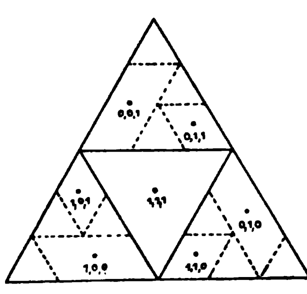


Fig. 6.

40. Wir geben diesem Satze ferner die folgende rein arithmetische Einkleidung:

Sind ξ, η, ζ drei lineare Formen in den Variabeln x, y, z mit beliebigen reellen Koefficienten und einer von Null verschiedenen Determinante, deren Betrag Δ ist, so kann man stets für x, y, z solche ganzzahlige Werte, die nicht sämmtlich Null sind, finden, daß

$$|\xi| + |\eta| + |\zeta|,$$

also der Betrag jedes der vier Ausdrücke

$$-\xi+\eta+\zeta,\quad \xi-\eta+\zeta,\quad \xi+\eta-\zeta,\quad -\xi-\eta-\zeta$$

dabei $\leqq \sqrt[3]{\frac{108}{19}\Delta}$ ausfällt.

An Stelle des Zeichens $\leqq$ hier genügt das Zeichen $<$, falls ξ, η, ζ nicht gerade so beschaffen sind, daß $\pm\xi$, $\pm\eta$, $\pm\zeta$, mit irgend welchen Vorzeichen und in irgend welcher Reihenfolge, durch eine lineare ganzzahlige Substitution mit einer Determinante ± 1 in die Ausdrücke

$$-\tfrac{2}{6}X+\tfrac{3}{6}Y+\tfrac{1}{6}Z,\quad \tfrac{1}{6}X-\tfrac{2}{6}Y+\tfrac{3}{6}Z,\quad \tfrac{3}{6}X+\tfrac{1}{6}Y-\tfrac{2}{6}Z$$

transformirt werden können.

41. Es seien ξ, η, ζ wiederum drei lineare Formen in x, y, z mit beliebigen reellen Koefficienten und einer von Null verschiedenen Determinante, deren Betrag Δ ist. Setzen wir

$$\omega_1 = \xi+\zeta,\quad \omega_2 = -\xi+\zeta,\quad \omega_3 = \eta-\zeta,\quad \omega_4 = -\eta-\zeta,$$

so entsteht

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = 0.$$

Eine Anwendung des Satzes aus 40. auf diese vier Ausdrücke $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ ergiebt, daß es stets möglich ist, für x, y, z ganzzahlige, von $0, 0, 0$ verschiedene Werte zu finden, wofür

$$|\xi| + |\zeta|, \ |\eta| + |\zeta|$$

beide $\leqq \sqrt[3]{\frac{54}{19}\Delta}$ ausfallen.

Mit Hülfe der Ungleichungen

$$\frac{|\xi^2 \zeta|}{4} \leqq \left(\frac{2\left|\frac{\xi}{2}\right| + |\zeta|}{3}\right)^3, \ \frac{|\eta^2 \zeta|}{4} \leqq \left(\frac{2\left|\frac{\eta}{2}\right| + |\zeta|}{3}\right)^3$$

folgt daraus weiter

$$|\xi^2 \zeta| \leqq \frac{8}{19}\Delta, \ |\eta^2 \zeta| \leqq \frac{8}{19}\Delta.$$

Wir bemerken noch, daß in dem Grenzfalle, für den allein in dem letzten Satze das Zeichen = nötig war, das betreffende System x, y, z hier immer derart ausgesucht werden kann, daß dafür weder $\xi = \pm 2\zeta$ noch $\eta = \pm 2\zeta$ gilt, und wird dadurch in diesen weiteren Ungleichungen das Zeichen = entbehrlich.

Wenden wir das Ergebniß insbesondere auf die Ausdrücke

$$\xi = x - az, \ \eta = y - bz, \ \zeta = \frac{z}{t}$$

an, wobei a, b zwei beliebige reelle Größen sind und t ein positiver Parameter $\left(> \frac{54}{19}\right)$ sei, so kommen wir zu dem Satze:

S i n d a, b i r g e n d z w e i r e e l l e G r ö ß e n, s o k a n n m a n s t e t s s o l c h e g a n z e Z a h l e n x, y, z f i n d e n, daß $z > 0$, $|x - az|$, $|y - bz|$ b e l i e b i g k l e i n u n d d a b e i

$$\left|\frac{x}{z} - a\right| < \sqrt{\frac{8}{19}} \cdot \frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}, \ \left|\frac{y}{z} - b\right| < \sqrt{\frac{8}{19}} \cdot \frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}$$

s i n d.

Die Konstante $\sqrt{\frac{8}{19}}$ ist $= 0{,}648\ldots$

§ 10. Bemerkung zu einem Aufsatze von Lord Kelvin.

42. In den Baltimore lectures, appendix H, S. 618 u. flgde behandelt Lord Kelvin die dichtesten gitterförmigen Lagerungen von kongruenten und parallel orientirten konvexen Körpern und geht dabei von der Annahme aus, daß in einer dichtesten Lagerung vier sich gegenseitig berührende Körper auftreten. Dieser Umstand ereignet sich in der Tat im Falle (I) (vgl. 21., also z. B. für Kugeln) bei den Körpern, die sich um die vier Punkte 0, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1 lagern; im Falle (III) (also z. B. für Oktaeder) bei den Körpern um die vier Punkte 0, 0, 0; 1, 0, 0; 1, 1, 0; 1, 1, 1. Die Annahme ist aber nicht zutreffend m Falle (II).

Dieser Fall (II) tritt z. B. ein, wenn das von den 12 Ebenen

$$\begin{aligned} X - \delta Y - \delta Z &= \pm \tfrac{1}{2}, \\ -\delta X + Y - \delta Z &= \pm \tfrac{1}{2}, \\ -\delta X - \delta Y + Z &= \pm \tfrac{1}{2}, \\ \varepsilon X + \tfrac{1}{2} Y + \tfrac{1}{2} Z &= \pm \tfrac{1}{2}, \\ \tfrac{1}{2} X + \varepsilon Y + \tfrac{1}{2} Z &= \pm \tfrac{1}{2}, \\ \tfrac{1}{2} X + \tfrac{1}{2} Y + \varepsilon Z &= \pm \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

begrenzte Polyeder, wobei $0 < \delta < \frac{1}{2}$ und $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ sei, den Grundkörper abgiebt; bei hinreichend kleinen Werten von δ und von ε ist leicht zu sehen, daß dieses Polyeder durch die Parallelverschiebungen vom Nullpunkte nach allen Punkten mit ganzzahligen Koordinaten X, Y, Z ein System von Körpern in dichtester gitterförmiger Lagerung erzeugt.

Untersuchungen über Entladungserscheinungen in Geißler'schen Röhren.

Von

Eduard Riecke.

Vorgelegt in der Sitzung vom 23. Juli 1904.

I. Ueber Evacuation Geissler'scher Röhren durch den elektrischen Strom.

Bei Gelegenheit von Untersuchungen über Entladungserscheinungen in einer Geißler'schen Röhre war mir aufgefallen, daß der Druck in der Röhre scheinbar von selber immer tiefer sank. Bei einer ersten Beobachtungsreihe, die von einem Anfangsdrucke von 0,252 mm ausgieng, sank der Druck während der Beobachtungen allmälig bis auf 0,083 mm. Es handelt sich bei diesen höheren Drucken offenbar um denselben Vorgang, auf dem auch das Hartwerden der Röntgenröhren beruht. Ich kam bald zu der Ueberzeugung, daß die Druckverminderung lediglich eine Folge des durchgehenden Stromes ist; damit erhob sich natürlich die Frage, wie die Druckverminderung mit der Stärke und Dauer des Stromes zusammenhängt. Leider war bei der ersten Beobachtungsreihe versäumt worden, die Stromdauer zu bestimmen. Es waren in Bezug hierauf nur ziemlich unsichere Schätzungen möglich, und aus diesen ergab sich, daß der Durchgang einer Amperesekunde durch die Röhre eine Abnahme des Druckes um etwa 0,003 mm zur Folge hatte.

Bei einer zweiten Beobachtungsreihe wurden nicht blos die Stromstärken, sondern auch die Zeiten des Stromdurchganges genau gemessen. Die Röhre war frisch mit Stickstoff gefüllt worden. Ueber die äußeren Verhältnisse, unter denen die Beobachtungen angestellt wurden, und über die Abnahmen des Druckes giebt die folgende Tabelle Aufschluß.

Tabelle I.

Nummer d. Beobacht.	Tag der Beobacht.	Temp. ° Cels.	Druck in mm Quecksilber vor Beginn der Messung	Druck in mm Quecksilber nach Beendigung der Messung
I.	11./II. 04	16.9	0.789	0.770
II.	12./II.	17.1	0.768	0.777
III.	17./II.	19.1	0.769	0.774
IV.	18./II.	17.9	0.422	0.425
V.	19./II.	17.5	0.422	0.425
VI.	22./II.	17.9	0.423	0.421
VII.	23./II.	20.1	0.425	0.428
VIII.	24./II.	21.2	0.426	0.429
IX.	25./II.	18.6	0.426	0.424
X.	26./II.	18.9	0.423	0.425
XI.	29./II.	17.5	0.229	0.231
XII.	1./III.	18.3	0.230	0.233
XIII.	2./III.	17.0	0.229	0.231
XIV.	3./III.	17.4	0.230	0.233
XV.	4./III.	16.6	0.230	0.232
XVI.	7./III.	16.2	0.231	0.231
XVII.	8./III.	18.3	0.231	0.232
XVIII.	9./III.	18.0	0.229	0.229
XIX.	10./III.	17.6	0.227	0.227
XX.	11./III.	17.2	0.223	0.225
XXI.	12./III.	16.4	0.223	0.221
XXII.	14./III.	17.4	0.219	0.219
XXIII.	15./III.	20.0	0.1186	0.1161
XXIV.	16./III.	19.7	0.1147	0.1108
XXV.	17./III.	18.4	0.1103	0.1048
XXVI.	18./III.	19.1	0.1041	0.0973
XXVII.	19./III.	18.4	0.0986	0.0940
XXVIII.	21./III.	18.2	0.0943	0.0879
XXIX.	22./III.	18.5	0.0874	0.0824
XXX.	23./III.	19.0	0.0816	0.0768
XXXI.	24./III.	16.9	0.0760	0.0722
XXXII.	25./III.	18.6	0.0716	0.0669
XXXIII.	26./III.	19.6	0.0661	0.0629
XXXIV.	28./III.	19.1	0.0628	0.0592
Neue Füllung mit N.				
XXXV.	4./V.	16.7	0.0453	0.0425
XXXVI.	11./V.	15.8	0.0428	0.0351
XXXVII.	18./V.	21.7	0.0358	0.0315
XXXVIII.	19./V.	19.8	0.0311	0.0294.

Zwischen der XXXIV. und der XXXV. Beobachtung war durch ein Versehen Stickstoff in die Röhre eingeströmt, der Druck war dadurch auf 0,23 mm gestiegen und wurde durch Auspumpen wieder erniedrigt.

Bei der Betrachtung dieser Tabelle wiederholt sich die Bemerkung, zu welcher die erste Beobachtungsreihe Veranlassung gegeben hatte. Während der Beobachtungen nimmt der Druck in der Röhre ab. Allerdings ist dies nicht wie früher von Anfang an der Fall. Bei den Drucken von 0.780 bis 0.216 zeigt sich keine sichere Verminderung; erst von dem Drucke 0.117 an tritt die Abnahme in unzweideutiger Weise hervor.

Man wird zuerst fragen, ob diese Abnahme wirklich nur eine Folge der Strömung ist, oder ob nicht auch abgesehen hiervon eine Druckverminderung, etwa in Folge von Gasadsorptionen, vorhanden ist. In der That ist in einer Reihe von Fällen eine solche Abnahme von einer Beobachtung zur anderen zu bemerken. Im Mittel beträgt diese Abnahme in 24 Stunden 0.0004 mm, also in 1 Stunde 0.000017 mm. Die Dauer einer Beobachtungsreihe betrug etwa 5/4 Stunden; während derselben würde also jene freiwillige Abnahme des Druckes nur 0.00002 mm betragen haben, was neben den wirklich beobachteten Druckabnahmen völlig verschwindet. Um die möglicher Weise auch ohne Strom vorhandene Druckabnahme genauer zu bestimmen, wurden Druckbeobachtungen in größeren Zeitintervallen ausgeführt; in der Zwischenzeit blieb die Pumpe unberührt stehen. Wir geben einige Beispiele solcher Messungen.

30./III. 04	Druck in der Pumpe	0.0585 mm	Temp. ° Cels.	16.5
2./IV. 04	„ „ „ „	0.0584 mm	„ „	15.1
15./IV. 04	„ „ „ „	0.0449 mm	„ „	21.0
29./IV. 04	„ „ „ „	0.0446 mm	„ „	17.0
4./V. 04	„ „ „ „	0.0453 mm	„ „	16.4
4./V. 04	„ „ „ „	0.0425 mm	„ „	17.1
10./V. 04	„ „ „ „	0.0425 mm	„ „	16.2
12./V. 04	„ „ „ „	0.0350 mm	„ „	14.0
18./V. 04	„ „ „ „	0.0358 mm	„ „	21.5
19./V. 04	„ „ „ „	0.0294 mm	„ „	20.0
1./VI. 04	„ „ „ „	0.0300 mm	„ „	22.0
15./VI. 04	„ „ „ „	0.0307 mm	„ „	22.4.

Die Drucke sind nicht auf 0° reduciert.

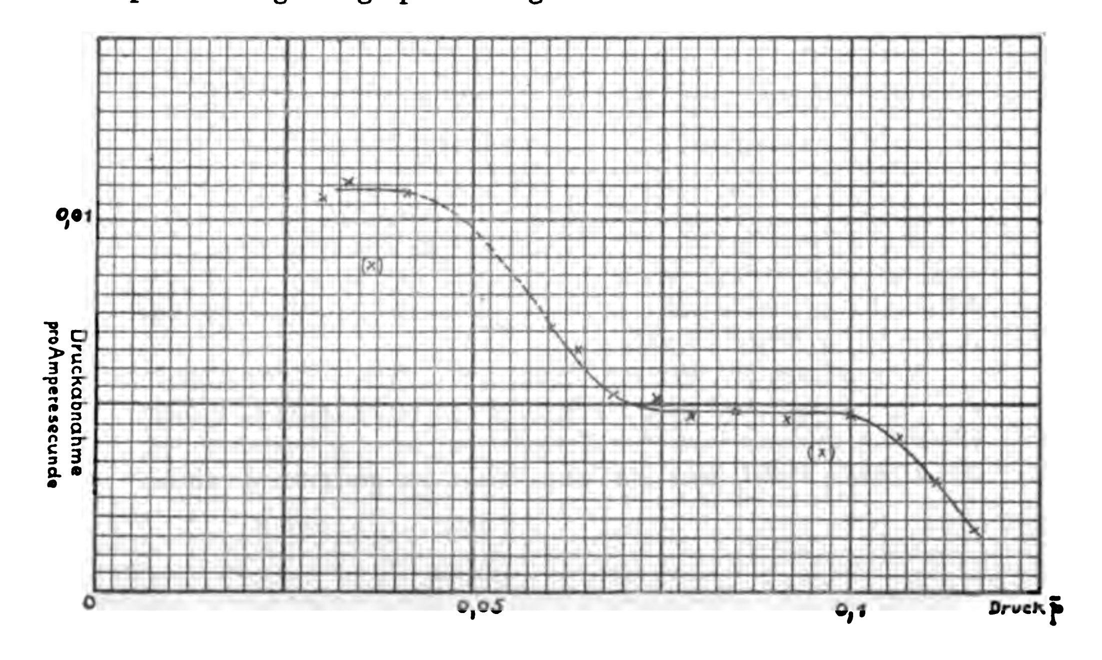
Diese Messungen gestatten keinen Schluß auf eine freiwillig eintretende Abnahme des Druckes, und wir werden daher die bei

den Zahlen der Tabelle I auftretenden Abnahmen als alleinige Wirkung des elektrischen Stromes betrachten. Dann ergiebt sich die folgende Zusammenstellung.

Tabelle II.

Nummer der Beobachtungen	Druckabnahme δ (mm Hg)	Anzahl der Amperesekunden Σit	$\delta_1 = \frac{\delta}{\Sigma it}$	Mittlerer Druck $\bar{p}$
XXIII.	0.0025	1.475	0.00169	0.117
XXIV.	0.0039	1.317	0.00296	0.112
XXV.	0.0055	1.333	0.00413	0.107
XXVI.	0.0068	1.403	0.00485	0.100
XXVII.	0.0046	1.191	0.00386	0.096
XXVIII.	0.0064	1.377	0.00465	0.091
XXIX.	0.0050	1.029	0.00486	0.085
XXX.	0.0048	0.971	0.00466	0.079
XXXI.	0.0038	0.758	0.00501	0.074
XXXII.	0.0047	0.861	0.00546	0.068
XXXIII.	0.0032	0.493	0.00649	0.064
XXXIV.	0.0036	0.507	0.00710	0.061
Neue Füllung mit N.				
XXXV.	0.0028	0.257	0.0109	0.044
XXXVI.	0.0077	0.899	0.0086	0.039
XXXVII.	0.0043	0.388	0.0111	0.033
XXXVIII.	0.0017	0.160	0.0106	0.030.

Der Zusammenhang zwischen der durch eine Amperesekunde erzeugten Druckabnahme δ_1 und zwischen dem mittleren Drucke $\bar{p}$ ist in Figur 1 graphisch dargestellt.



Von den Beobachtungen fallen zwei ganz aus der Reihe der übrigen heraus; von ihnen soll im Folgenden abgesehen werden. Für die übrigen existieren zwei Intervalle, innerhalb derer die Werthe ϑ_1 von dem Mittelwerthe des Druckes unabhängig sind. Das eine reicht von 0.1 mm—0.075 mm, und der ihm entsprechende Werth von ϑ_1 ist 0.00463; das andere Intervall liegt zwischen $\bar{p} = 0.044$ und $\bar{p} = 0.030$; der zugehörige Werth von ϑ_1 ist 0.0109. Es mögen zunächst die Mengen von Stickstoff berechnet werden, die diesen Druckabnahmen entsprechen.

Das Volumen Ω des ganzen Pumpenraumes kann auf das Volumen V des Pumpenstiefels reduciert werden. Zu diesem Zwecke ist es nur nöthig, das Verhältniß der Drucke zu bestimmen, die in der Pumpe vor und nach einem Pumpenzuge vorhanden sind. Aus einer Reihe von Beobachtungen ergaben sich für dieses Verhältniß die Werthe:

1.787 1.818 1.800 1.831 1.831 1.781

im Mittel:

1.808.

Daraus folgt:

$$\Omega = 2.24 \times V,$$

und mit $V = 1060$ ccm:

$$\Omega = 2380 \text{ ccm}.$$

Für die Menge des durch eine Amperesekunde absorbierten Stickstoffs gilt dann die Gleichung:

$$m = \frac{0.00125 \times \vartheta_1}{760\left(1 + \frac{t}{273}\right)} \times 2380,$$

wo t die Temperatur bezeichnet. Hiernach wird für

$$\vartheta_1 = 0.00463 \quad \text{und} \quad t = 18.6^\circ : m_1 = 17.0 \times 10^{-6},$$
$$\vartheta_1 = 0.0109 \quad \text{und} \quad t = 19.4^\circ : m_2 = 39.8 \times 10^{-6}.$$

Der Strom Eins in elektromagnetischem Maaße scheidet hiernach in dem Druckintervalle 0.1—0.075 mm in einer Sekunde 1.70×10^{-4} g Stickstoff, in dem Intervalle 0.044—0.030 mm 3.98×10^{-4} g Stickstoff aus.

Wir nehmen an, daß der Strom der positiven Elektricität in der Entladungsröhre durch Ionen des Stickstoffs, die im Sinne des Stromes nach der Kathode wandern, getragen werde. Jener Strom bildet aber nur einen Theil der gesamten durch die

Bewegung der positiven und der negativen Theilchen unterhaltenen Strömung; überdies muß man aus den Beobachtungen den Schluß ziehen, daß nicht alle Ionen, welche Träger positiver Ladungen sind, zur Abscheidung kommen. Wir werden daher annehmen, daß die an der Kathode abgeschiedenen Ionen des Stickstoffes nur einen Bruchtheil x des Stromes mit sich führen. Wenn die gesamte Stärke des Stromes eine elektromagnetische Einheit beträgt, so ist die Ladung der Ionen, die in einer Sekunde an der Kathode abgeschieden werden, gleich $3x \times 10^{10}$ elektrostatischen Einheiten. Wenn wir diese Zahl durch die Masse der in einer Sekunde abgeschiedenen Ionen dividieren, so ist dieses Verhältniß gleich dem Verhältniß zwischen Ladung und Masse bei dem einzelnen Ion. Die Masse des Ion sei μ, seine Werthigkeit n, das elektrische Elementarquantum ε, dann ergiebt sich für das Verhältniß von Ladung und Masse:

$$\frac{n\varepsilon}{\mu} = \frac{3x \times 10^{10}}{m}.$$

Setzen wir für m die zuvor berechneten Werthe m_1 und m_2, so erhalten wir für das Druckintervall 0.1—0.075 mm:

$$\frac{n_1 \varepsilon}{\mu_1} = x_1 \times 0.176 \times 10^{15},$$

für das Intervall 0.044—0.030 mm:

$$\frac{n_2 \varepsilon}{\mu_2} = x_2 \times 0.075 \times 10^{15}.$$

Für das Wasserstoffion ist das Verhältniß von Ladung und Masse:

$$\frac{\varepsilon}{\mu_H} = 0.29 \times 10^{15}.$$

Die Zahlen x_1 und x_2 sind jedenfalls kleiner als 1, n_1 und n_2 mindestens gleich 1; die Masse der Stickstoffionen, welche den Transport der positiven Elektricität besorgen, ist also, wie von vornherein zu erwarten ist, größer als die Masse des Wasserstoffatomes. Für das Verhältniß zwischen der Masse des Stickstoffions und der Masse des Wasserstoffions ergiebt sich in dem Druckintervalle 0.1—0.075 mm:

$$\frac{\mu_1}{\mu_H} = 1.65 \times \frac{n_1}{x_1},$$

in dem Intervalle 0.044—0.030 mm:

$$\frac{\mu_2}{\mu_H} = 3.87 \times \frac{n_2}{x_2}.$$

Machen wir endlich noch die Annahme, daß das Stickstoffion im ersten Falle aus a_1, im zweiten Falle aus a_2 Stickstoffatomen bestehe, so erhalten wir die Gleichungen:

In dem Druckintervalle 0.1—0.075 mm:

$$x_1 \times \frac{a_1}{n_1} = 0.118,$$

in dem Intervall 0,044—0,030 mm:

$$x_2 \times \frac{a_2}{n_2} = 0.276.$$

Bei größeren Drucken werden keine Ionen ausgeschieden, es ist dann auch der von den ausgeschiedenen Ionen getragene Stromtheil, d. h. der Werth von x gleich Null. Aus den Beobachtungen kann man folgern, daß x von einem Drucke von etwa 0.122 mm an einen positiven Werth annimmt, der mit abnehmendem Drucke steigt. Für das Verhältniß a/n, die Zahl der mit einem Elementarquantum verbundenen Stickstoffatome ist daraus nichts bestimmtes zu entnehmen. Wäre diese Zahl gleich Eins, d. h. wäre mit jedem Stickstoffatome ein Elementarquantum verbunden, so würden in dem Druckintervalle 0.1—0.075 mm nur 11.8 %, in dem Intervalle 0.044—0.030 mm 27.6 % des Stromes von den ausgeschiedenen Ionen getragen werden.

Die Ausscheidung des Stickstoffes durch den Strom ist mit einer eigenthümlichen Erscheinung an der Kathode verbunden. An der äußeren Peripherie der leuchtenden Kathodenschicht entstehen, diese umgebend, farbige oder dunkle Ringe. Bei höherem Drucke sind diese Ringe außerordentlich fein; sie dehnen sich bei konstantem Druck aber wachsender Stromstärke etwas aus. Wenn also bei einer Beobachtungsreihe 4 verschiedene, allmälig zunehmende Stromstärken benutzt wurden, so zeigten sich auf der Kathode bei höherem Drucke 4 sehr feine Ringe mit Newtonschen Farben. Nimmt der Druck ab, so zieht sich die leuchtende Kathodenschicht zusammen; dem entsprechend verengern sich die Ringe; zugleich verlieren sich die Farben und die Ringe erscheinen in einem, zuletzt in Schwarz übergehenden Grau.

Außer auf der Kathodenfläche selber erscheinen Newtonsche Ringe auch auf der cylindrischen Wand der Röhre unmittelbar vor der Kathode. Die Ebene dieser, sehr lebhaft gefärbten Ringe ist der Kathodenfläche parallel.

Zur Elektronentheorie.

II. Grundlagen für eine allgemeine Dynamik des Elektrons.

Von

A. Sommerfeld in Aachen.

Vorgelegt in der Sitzung vom 23. Juli 1904 durch W. Voigt.

§ 10. *Allgemeine Bemerkungen zur Berechnung der mechanischen Kraft.*

Die in meiner ersten Note [1]) gegebene Darstellung des Feldes eines beliebig bewegten Elektrons ist so einfach, daß es von hieraus möglich wird, die auf ein Elektron wirkende resultirende Kraft und Drehkraft bei beliebiger Bewegung zu berechnen und somit die Dynamik des Elektrons in allgemeinster Weise aufzubauen.

Bekanntlich hängt die elektrische und magnetische Feldstärke $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ mit den Potentialen φ und $\mathfrak{A}$ durch die Gleichungen zusammen:

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{A}}, \quad \mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}.$$

Gehen wir von einem festen zu einem mitbewegten Coordinatensystem über, und bezeichnen wir die Differentiation nach der Zeit in einem mitbewegten Aufpunkte durch $\partial/\partial t$, so haben wir zu ersetzen (vgl. hierzu meine erste Note pag. 110 oben)

$$\dot{\mathfrak{A}} \text{ durch } \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} - (\mathfrak{v} \operatorname{grad}) \mathfrak{A}.$$

Es wird dann

$$\text{41)} \qquad \mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \varphi + \frac{1}{c}(\mathfrak{v} \operatorname{grad}) \mathfrak{A} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}, \quad \mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}.$$

1) Göttinger Nachrichten 1904, Heft 2 pag. 99.

Nach einem Grundprincip der Lorentz'schen Elektronentheorie berechnet sich nun die mechanische Kraft $\mathfrak{f}$ pro Ladungseinheit aus der elektrischen Feldstärke vermehrt um das durch c geteilte Vektorprodukt aus magnetischer Feldstärke und Geschwindigkeit der Ladung. Dabei kommt für uns als diejenige Ladung, auf welche die Kraft $\mathfrak{f}$ wirkt, nur die eigene Ladung des Elektrons in Betracht, deren Geschwindigkeit in der früheren Bezeichnung

$$\mathfrak{v} + [\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}]$$

ist, unter $\mathfrak{r}$ den Fahrstrahl vom Mittelpunkte des Elektrons nach dem Sitz der Ladung, unter $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ (ausführlicher geschrieben $\mathfrak{v}_t$ und $\mathfrak{w}_t$) Translations- und Rotationsgeschwindigkeit des Elektrons zur Zeit t verstanden. Es wird daher

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{H}] + \frac{1}{c}[[\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}]\,\mathfrak{H}]$$

$$= -\operatorname{grad}\varphi + \frac{1}{c}(\mathfrak{v}\operatorname{grad})\mathfrak{A} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\operatorname{rot}\mathfrak{A}] + \frac{1}{c}[[\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}]\operatorname{rot}\mathfrak{A}].$$

Man überzeugt sich leicht, daß

$$(\mathfrak{v}\operatorname{grad})\mathfrak{A} + [\mathfrak{v}\operatorname{rot}\mathfrak{A}] = \operatorname{grad}(\mathfrak{v}\mathfrak{A}).$$

In dem Ausdrucke von $\mathfrak{f}$ tritt daher der Gradient der Größe $\varphi - \frac{1}{c}(\mathfrak{v}\mathfrak{A})$ auf, welche teils als Convektionspotential (Searle), teils als elektrokinetisches Potential (Schwarzschild) bezeichnet wird. Man hat nämlich

$$\text{42)} \qquad \mathfrak{f} = -\operatorname{grad}\left(\varphi - \frac{1}{c}(\mathfrak{v}\mathfrak{A})\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}[[\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}]\operatorname{rot}\mathfrak{A}].$$

Von der Kraft $\mathfrak{f}$ pro Ladungseinheit gehen wir zu der resultirenden Kraft $\mathfrak{F}$ für die Gesamtladung ε des Elektrons über. Bei gleichförmiger Volumladung und einem Radius a ist die Dichte

$$\varrho = \frac{3\varepsilon}{4\pi a^3},$$

und daher, wenn dS die Integration über das Volumen des Elektrons bedeutet:

$$\text{43)} \qquad \mathfrak{F} = \frac{3\varepsilon}{4\pi a^3}\int \mathfrak{f}\,dS.$$

Bei gleichförmiger Oberflächenladung andrerseits wird die Dichte der Flächenbelegung

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{4\pi a^2}.$$

Es ist indessen wichtig zu beachten, daß die Oberflächenschicht ähnlich wie in der gewöhnlichen Potentialtheorie eine singuläre Fläche für die Ausdrücke von φ und $\mathfrak{A}$ wird, in der die Differentialquotienten von φ und $\mathfrak{A}$ und daher auch die Größen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{f}$ einen Sprung erleiden können. Wir vermeiden alle hieraus entstehenden Schwierigkeiten, wenn wir die resultirende Kraft zunächst für eine Kugelfläche vom Radius $r \gtrless a$ berechnen, auf der wir uns dieselbe Ladung ε wie auf der Oberfläche des Elektrons ausgebreitet denken, und wenn wir erst nachträglich zur Grenze $r = a$ übergehen. Mit Rücksicht hierauf wird der Wert von $\mathfrak{F}$ bei Oberflächenladung folgendermaßen zu berechnen sein:

43′) $$\mathfrak{F} = \lim_{r=a} \frac{\varepsilon}{4\pi r^2} \int \mathfrak{f}\, d\sigma,$$

wo $d\sigma$ die Integration über die Kugelfläche vom Radius r andeutet, während $\mathfrak{f}$ mit denjenigen Werten von φ und $\mathfrak{A}$ zu berechnen ist, die von einer geladenen Kugelfläche vom Radius a ausgehen. Ueberzeugender und näher liegend als das soeben vorgeschlagene Limes-Verfahren würde bei Oberflächenladung vielleicht das folgende sein: Wir ersetzen die unendlich dünne geladene Schicht vom Radius a durch eine endliche Kugelschale vom inneren und äußeren Radius $a - \delta$ und $a + \delta$. Verteilen wir abermals die Ladung ε gleichförmig auf diese Kugelschale, so wird die Dichte

$$\varrho = \frac{3\varepsilon}{4\pi\{(a+\delta)^3 - (a-\delta)^3\}} = \frac{\varepsilon}{8\pi(a^2\delta + \cdot\cdot)},$$

wobei die nicht hingeschriebenen Glieder höhere Potenzen von δ enthalten. Sodann bilden wir mit den Werten von φ und $\mathfrak{A}$, die der unendlich dünnen Ladungsschicht entsprechen, das Raumintegral von $\varrho\mathfrak{f}$ über diese endliche Kugelschale und erhalten schließlich, indem wir zur Grenze $\delta = 0$ übergehen:

43″) $$\mathfrak{F} = \lim_{\delta=0} \frac{\varepsilon}{8\pi(a^2\delta + \cdot\cdot)} \int \mathfrak{f}\, dS.$$

Ich habe mich überzeugt, daß der so berechnete Wert von $\mathfrak{F}$ vollständig mit dem nach (43′) bestimmten übereinstimmt. Da

seine Ableitung aber wesentlich umständlicher ist, so ziehe ich für die Darstellung das Limes-Verfahren (43') vor.

In ähnlicher Weise ergiebt sich aus $\mathfrak{f}$ eine resultirende Drehkraft $\mathfrak{N}$. Wir definiren diese bei Volum- oder Oberflächenladung durch die Formeln:

$$44)\qquad \mathfrak{N} = \frac{3\varepsilon}{4\pi a^3}\int [\mathfrak{r}\mathfrak{f}]\,dS,$$

$$44')\qquad \mathfrak{N} = \lim_{r=a} \frac{\varepsilon}{4\pi r^2}\int [\mathfrak{r}\mathfrak{f}]\,d\sigma.$$

Die Ausdrücke (43) und (44) genügen, um bei einer beliebig vorgelegten erzwungenen Bewegung des Elektrons die von seinem eigenen Felde hervorgebrachten Kraftwirkungen zu bestimmen. Es entsteht nun aber weiter die Frage nach den freien oder natürlichen Bewegungen des Elektrons, sei es unter dem Einfluß gegebener äußerer Kräfte, sei es ohne diesen Einfluß. Indem wir für's Erste von dem Vorhandensein äußerer Kräfte absehen, fragen wir insbesondere nach den kräftefreien Bewegungen des Elektrons.

Nach den Grundsätzen der gewöhnlichen Mechanik würde man, wenn m die träge Masse, Θ das (bei einer Kugel für alle Axen gleiche) Trägheitsmoment des Elektrons bedeutet, die kräftefreie Bewegung aus den Gleichungen zu bestimmen haben:

$$m\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{F},\quad \Theta\frac{d\mathfrak{w}}{dt} = \mathfrak{N}.$$

Die Elektronentheorie wagt es aber, den überkommenen Massenbegriff zu analysiren und auf die elektrischen Begriffe zurückzuführen, wozu die Beobachtungen von Kaufmann über Bequerelstrahlen und ihre theoretische Deutung durch Abraham die Unterlage liefern. Die Elektronentheorie leugnet daher das Vorhandensein wirklicher Maße oder wirklichen Trägheitsmomentes und ersetzt die vorstehenden Gleichungen durch die folgenden:

$$45)\qquad \mathfrak{F} = 0,\quad \mathfrak{N} = 0.$$

Die Bewegung des Elektrons erfolgt so, daß sich in jedem Augenblicke die an ihm angreifenden Kräfte $\mathfrak{f}$ das Gleichgewicht halten, sowohl in Bezug auf Verschiebung wie auf Drehung.

Greifen außer den Kräften $\mathfrak{f}$ des eigenen Feldes noch äußere Kräfte $\mathfrak{f}_e$ an dem Elektron an, herrührend z. B. von einem von

der Bewegung des Elektrons unabhängigen elektromagnetischen Felde oder von der Bewegung anderer Elektronen, so wird man auch diese am Elektron zu einer resultirenden Kraft und Drehkraft $\mathfrak{F}_a$ und $\mathfrak{N}_a$ zusammensetzen. Derselbe Gedankengang wie oben liefert dann statt (45) die Gleichungen:

45′) $$\mathfrak{F} + \mathfrak{F}_a = 0, \quad \mathfrak{N} + \mathfrak{N}_a = 0.$$

Die Ausdrücke von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{N}$, die zur Bestimmung der Bewegung dienen sollen, enthalten die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$, und zwar nicht nur die Werte dieser Geschwindigkeiten zur Zeit t, sondern auch (vermöge unserer Integraldarstellung von φ und $\mathfrak{A}$) diejenigen für alle früheren Zeitpunkte $t - \tau$, soweit dieselben nach den Ausführungen des § 7 in Betracht kommen. Die Gleichungen 45) und 45′) sind daher nicht Differentialgleichungen im gewöhnlichen Sinne, sondern Funktionalgleichungen (oder nach der Bezeichnungsweise von Hilbert Integralgleichungen). Wollen wir sie als Differentialgleichungen schreiben, was formal leicht geschehen kann, so finden wir Differentialgleichungen von unendlich hoher Ordnung.

Schon aus diesem Umstande erhellt die außerordentlich viel größere Mannigfaltigkeit der möglichen Bewegungsformen der Elektronenmechanik im Gegensatz zu derjenigen der gewöhnlichen Mechanik. Als „Anfangsbedingungen" kommen hier nicht nur Lage und Geschwindigkeit, sondern der ganze vorangehende Bewegungszustand während eines Zeitintervalles in Betracht, welches zwar im Allgemeinen sehr klein, aber immerhin endlich ist (nämlich von der Größenordnung $2a/|c - v|$ derjenigen Zeit, in welcher ein Lichtstrahl das Elektron in der Bewegungsrichtung überstreicht). Um eine bestimmte Bewegung des Elektrons einzuleiten, genügt es also nicht, seine Lage und Geschwindigkeit vorzugeben, sondern man müßte während des genannten Intervalles das Elektron zwangsweise der einzuleitenden Bewegung entsprechend führen, um sicher zu sein, daß es diese Bewegung selbsttätig weiter verfolgt.

Man versteht daher, daß in der Elektronentheorie beispielsweise die Galilei'sche Trägheitsbewegung keineswegs die einzige kräftefreie Bewegung ist, sondern daß außerdem kräftefreie Schwingungen von mannigfaltigstem Charakter um die Ruhe oder relativ gegen die gleichförmige Bewegung möglich sind. Den Beweis hierfür hat bereits Herglotz[1]) in einer außerordentlich

1) Zur Elektronentheorie, Göttinger Nachr. 1903, Heft 6.

eindringenden Arbeit geliefert, wobei er sich im Allgemeinen auf die kleinen Schwingungen des Elektrons relativ gegen die gleichförmige Rotation beschränkt.

Den deutlichsten Begriff dieser Schwingungsmöglichkeiten liefert § 20 der vorliegenden Note, in dem die kräftefreien Drehbewegungen bei ruhendem Mittelpunkt behandelt werden. Hier wird zunächst das Bewegungsgesetz in Form einer Integralgleichung aufgestellt; von derselben geht man zu einer von Integralzeichen freien Funktionalgleichung oder zu einer Differentialgleichung von unendlich hoher Ordnung über. Die möglichen Perioden der freien Drehschwingungen, welche in unendlicher Anzahl vorhanden sind, bestimmen sich dann durch eine transcendente Gleichung.

Bekanntlich ist die Berechnung der mechanischen Kraft $\mathfrak{F}$ von Poincaré zurückgeführt worden auf das Raumintegral des Strahlungsvektors (des Poynting'schen Energieflusses):

$$\mathfrak{S} = c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}],$$

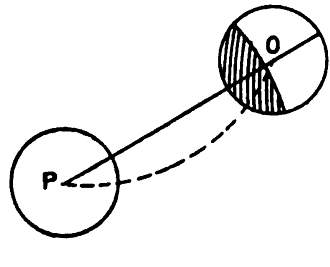
welches Raumintegral nach mechanischen Analogien als Bewegungsgröße oder als Impuls des Elektrons bezeichnet werden kann. Von Abraham[1]) systematisch ausgebaut, hat dieser Begriff in den einfachsten Bewegungsfällen (quasistationäre Bewegung) zu wichtigen und eleganten Folgerungen geführt, die wir im Folgenden (§§ 16 und 18) als erste Näherungen wiederfinden werden. Bei allgemeineren Fragen aber halte ich diesen Impulsbegriff nicht für den geeignetsten Ausgangspunkt und zwar aus zwei Gründen:

Einmal ist der Energiefluß $\mathfrak{S}$ (ähnlich wie die Energie selbst) eine quadratische Größe, die sich aus dem Produkte von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ berechnet. Für eine solche Größe gilt aber nicht, wie für die Feldstärken oder für ihre Potentiale, die Möglichkeit der Superposition verschiedener Zustände; auch hat man für sie direkt keine ähnlich einfachen Differentialgleichungen wie die Maxwellschen für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$. Denken wir insbesondere an die Resultate unserer ersten Note, so haben wir für φ und $\mathfrak{A}$ bequeme Darstellungen durch ein einfaches Integral nach der Zeit gewonnen, aus denen sich ganz entsprechende Darstellungen für $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{N}$ ergeben. Dagegen würde auf diesem Wege für $\mathfrak{S}$ und für den Impuls eine Darstellung durch das Produkt zweier Zeitintegrale folgen, mit der analytisch nichts anzufangen wäre. Wir würden also das Einfachere aus dem Complicirteren ableiten, wenn wir die Berechnung der Kraft $\mathfrak{F}$ auf den Impulsbegriff gründen.

1) Principien der Dynamik des Elektrons, Ann. d. Phys. 10 (1903), p. 105.

Sodann ist zu beachten, daß wir bei der Berechnung des Impulses, indem wir die Integration des Strahlungsvektors auch über die entfernteren Partien des Raumes ausdehnen, einen Ballast mitnehmen, der mit der eigentlichen Frage nichts zu schaffen hat. In Wirklichkeit hängt die Größe der Kraft $\mathfrak{F}$ nur von den Zuständen des Elektrons in einem kurzen, der Zeit t vorhergehenden Intervalle oder unter Umständen in mehreren solchen Intervallen ab. Die während dieses Intervalles von dem Elektron ausgehenden Wirkungen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit in den Raum fortpflanzen, füllen nur einen beschränkten, dem Elektron benachbarten Raumteil aus. Wenn daher nach der Impulsmethode auch die Zustände in entfernteren Raumteilen zur Berechnung von $\mathfrak{F}$ herangezogen werden, so bedeutet dieses einen Umweg, welcher im Allgemeinen die Durchsichtigkeit der Berechnung beeinträchtigen muß.

Im Uebrigen wird auch nach unserer Methode die Bestimmung von Kraft und Drehmoment in der hier festgehaltenen Allgemeinheit nicht ganz mühelos. Um ein Bild von den naturgemäß auftretenden Schwierigkeiten zu geben, wollen wir etwa die Integration des skalaren Potentials, Gl. 17), über die geladene Oberfläche des Elektrons ins Auge fassen und feststellen, daß je nach dem Werte von τ nur für einen gewissen Teil der Oberfläche $\lambda = 1$, für den Rest $\lambda = 0$ ist, und daß daher die Integration nur über einen je nach dem Werte von τ zu begrenzenden Teil der Oberfläche des Elektrons zu erstrecken ist. Die hier in Betracht kommenden Verhältnisse werden durch die Fig. 2a und b geschildert. Ist $v < c$ (untere Figur, Unterlichtgeschwindigket), so überholt die von der früheren Lage P des Elektrons ausgehende Störung die Bewegung des Elektrons; in der Lage O des Elektrons zur Zeit t wird daher im Allgemeinen nur eine gewisse, dem Punkte P abgewandte Kugelkalotte von der dem Zeitpunkte $t - \tau$ entsprechenden Erregung gedeckt, so daß nur für diese Kugelkalotte $\lambda = 1$ ist. Dagegen wird im Falle $v > c$ (obere Figur, Ueberlichtgeschwindigkeit), wo die Bewegung des Elektrons die von der früheren Lage P ausgehende Erregung ihrerseits überholt, nur eine dem Punkte P zugewandte Kugel-



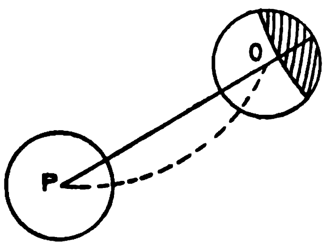


Fig. 2a, Fig. 2b.

kalotte von der Störung erreicht, so daß nur für diese Kalotte $\lambda = 1$ ist.

Um die hiernach erforderlichen Fallunterscheidungen zu vermeiden, empfiehlt es sich, für λ, λ', $\varkappa$, $\varkappa'$ nicht die in § 8 berechneten expliciten Ausdrücke, sondern die entsprechenden ursprünglichen Integraldarstellungen zu verstehen, die von selbst die jedesmal in Frage kommenden Werte 0 oder 1 etc. annehmen und die, nach Art eines Dirichlet'schen discontinuirlichen Faktors, die verschiedenen Wertemöglichkeiten in einen einheitlichen analytischen Ausdruck zusammenfassen.

Ferner werden wir unsere Aufgabe vorläufig beschränken. Wir wollen nämlich, wenn wir die von der Translation herrührende Kraft und Drehkraft betrachten, von einer gleichzeitigen Rotation absehen (§§ 11—18) und umgekehrt bei der dynamischen Untersuchung der Rotation die Translation als verschwindend, d. h. den Mittelpunkt des Elektrons als ruhend voraussetzen (§§ 19 und 20). Die Formeln, die ich für den allgemeinen Fall gleichzeitiger Translation und Rotation erhalten habe, sind einstweilen nicht so einfach, daß ich sie hier mitteilen möchte. Im Uebrigen wird der Charakter der Translation sowie der der Rotation in keiner Weise beschränkt; wir verstehen also unter der Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ eine nach Richtung und Größe beliebig wechselnde Lineargeschwindigkeit und unter der Rotationsgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ eine nach Axe und Größe beliebig wechselnde Winkelgeschwindigkeit.

Auch die Möglichkeit einer Bewegung mit Ueberlichtgeschwindigkeit wird in Erwägung gezogen (§ 13). Dabei zeigt sich das zunächst etwas überraschende Resultat: Ueberlichtgeschwindigkeit bei Volumladung ist möglich, d. h. sie kann durch einen endlichen Kraft- und Energieaufwand unterhalten werden; Ueberlichtgeschwindigkeit bei Oberflächenladung ist unmöglich, d. h. die zu ihrer Unterhaltung erforderliche Kraft ist — gleichviel ob die Bewegung gerade oder krummlinig, beschleunigt oder constant gedacht wird — unendlich groß. Bei Volumladung ist auch der Durchgang durch die Lichtgeschwindigkeit selbst mit keinem Unendlichwerden der Kraft verbunden; bei Oberflächenladung zeigt sich dies Unendlichwerden unmittelbar nach dem Passiren der Lichtgeschwindigkeit. Die soeben geschilderten Unterschiede zwischen Volumladung und Oberflächenladung werden durch die folgende Bemerkung verständlich: die Gefahr einer Ausartung der Kraft des Eigenfeldes wächst mit wachsender Concentration der Ladung. Gehen wir zu der äußersten Concen-

tration, nämlich zur Punktladung über, so wird eine unendlich große Kraft schon bei Unterlichtgeschwindigkeit zu jeder Beschleunigung oder Verzögerung der Bewegung erfordert; (man vgl. die in § 11 abzuleitenden Werte von $\mathfrak{F}$, welche sämtlich mit $a = 0$ unendlich werden). Denken wir uns andrerseits die ursprünglich über das Volumen verteilte Ladung auf die Oberfläche dieses Volumens concentrirt, so wird die Kraft abermals unendlich, aber erst bei Ueberlichtgeschwindigkeit.

Freilich liegt es nahe, auf Grund dieser Erfahrungen der Oberflächenladung überhaupt ihre Existenzberechtigung abzusprechen, ebenso wie man schon in den Anfängen der Elektronentheorie gezwungen war, die punktförmigen Elektronen aufzugeben, oder wie man andrerseits in der Molekularphysik gezwungen war, von der Annahme punktförmiger Atome abzusehen. In der That spricht das unterschiedliche Verhalten von Oberflächen- und Volumladung in der principiellen Frage der Ueberlichtgeschwindigkeit entschieden gegen die Gleichberechtigung beider Annahmen und zu Gunsten der alleinigen Zulassung von Volumladung. Nur der Umstand, daß die Formeln für Oberflächenladung in mancher Hinsicht einfacher werden und zur ersten Orientirung geeigneter sind, veranlaßt uns, im Folgenden beide Annahmen weiter durchzuführen.

§ 11. *Der Translations-Bestandteil der mechanischen Kraft.*

Die Berechnung der resultirenden mechanischen Kraft $\mathfrak{F}$ wird ziemlich einfach, wenn wir reine Translation, d. h. $\mathfrak{w} = 0$ voraussetzen. Mit $\mathfrak{w} = 0$ wird $\mathfrak{A}_2 = 0$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1$ und es verschwindet in der Gl. 42) für $\mathfrak{f}$ das letzte Glied.

a. Oberflächenladung. Nach Gl. 16) und 21) haben wir in diesem Falle bei Einführung von zwei neuen Größen χ und u:

$$46)\quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \frac{\varepsilon c}{2\pi^2 a}\int_0^\infty \chi\, d\tau, \quad \mathfrak{A} = \frac{\varepsilon}{2\pi^2 a}\int_0^\infty \mathfrak{v}_{t-\tau}\chi\, d\tau, \\ \chi &= \int_0^\infty u \sin as \sin cs\tau \frac{ds}{s}, \quad u = \frac{\sin Rs}{R}. \end{aligned} \right.$$

Wir beachten, daß in der hier definirten Funktion u die Coordinaten $x\,y\,z$ nur in der Verbindung $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ vorkommen. Wir können daher die Operation „grad“ in der Weise an χ ausführen, daß wir statt nach $x\,y\,z$ nach $\xi\,\eta\,\zeta$, d. h. statt nach den Componenten des Vektors $\mathfrak{r}$ nach denen von $\mathfrak{T}$ differenziren, was wir durch den Index $\mathfrak{T}$ andeuten wollen.

Nach Gl. 42) haben wir nun:

$$47)\quad -\frac{2\pi^2 ac}{\varepsilon}\,\mathfrak{f} = \int_0^\infty \{c^2 - (\mathfrak{v}_t \mathfrak{v}_{t-\tau})\}\,\mathrm{grad}_{\mathfrak{x}}\chi\,d\tau + \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty \mathfrak{v}_{t-\tau}\chi\,d\tau.$$

Bezeichnen wir ferner den über die Kugel vom Radius r erstreckten Mittelwert der skalaren Funktion χ mit:

$$\overline{\chi} = \frac{1}{4\pi r^2}\int \chi\,d\sigma,$$

so ergiebt sich nach Gl. 43′):

$$48)\quad -\frac{2\pi^2 ac}{\varepsilon^2}\,\mathfrak{F} = \lim_{r=a}\left\{\int_0^\infty \{c^2 - (\mathfrak{v}_t \mathfrak{v}_{t-\tau})\}\,\mathrm{grad}_{\mathfrak{x}}\overline{\chi}\,d\tau + \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty \mathfrak{v}_{t-\tau}\overline{\chi}\,d\tau\right\}.$$

Es kommt also lediglich darauf an, das Integral $\overline{\chi}$ auszuwerten. Wäre χ eine Potentialfunktion, d. h. eine Lösung der Gleichung $\Delta\chi = 0$, so hätten wir nach einem bekannten Gaussischen Satz unmittelbar $\overline{\chi} = \chi_0$, d. h. gleich dem Werte von χ im Mittelpunkte 0 unserer Kugel. Um eine ähnliche Beziehung für den vorliegenden Fall abzuleiten, beachte man, daß die in χ vorkommende Größe

$$u = \frac{\sin sR}{R}$$

eine Lösung der Gl. $\Delta u + s^2 u = 0$ ist. Für alle stetigen Lösungen dieser Gl. leitet man nun aus dem Green'schen Satze, und zwar genau auf demselben Wege[1]), auf dem man den Gaussischen Mittelwertsatz findet, die folgenden beiden Gleichungen ab:

$$49)\quad \begin{cases} 4\pi u_0 = -\dfrac{d}{dr}\dfrac{\cos sr}{r}\displaystyle\int u\,d\sigma + \dfrac{\cos sr}{r}\displaystyle\int \frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma, \\ 0 = -\dfrac{d}{dr}\dfrac{\sin sr}{r}\displaystyle\int u\,d\sigma + \dfrac{\sin sr}{r}\displaystyle\int \frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma, \end{cases}$$

1) Vgl. z. B. Pockels, Ueber die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, Leipzig 1891, pg. 208 und 209, Gl. 61) und 63). Man erhält die beiden Gl., indem man den Green'schen Satz $\int (u\Delta v - v\Delta u)\,dS = \int \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma$ einmal auf die Funktionen u und $v = \frac{\cos s\varrho}{\varrho}$, das andere Mal auf die Funktionen u und $v = \frac{\sin s\varrho}{\varrho}$ anwendet. Im ersten Falle ist der Nullpunkt $\varrho = 0$ durch eine verschwindend kleine Kugel von der Integration auszuschließen. Das Raumintegral dS verschwindet wegen der Differentialgl. $\Delta u + s^2 u = 0$, $\Delta v + s^2 v = 0$, das Oberflächenintegral $d\sigma$ ist auf die Kugel $\varrho = r$ zu beziehen, auf welcher v und $\partial v/\partial n$ constant sind.

wo u_0 den Wert von u im Mittelpunkte des Elektrons ($x = y = z = 0$) bedeutet:

$$u_0 = \frac{\sin sT}{T}.$$

Indem man das zweite Integral rechts in 49) eliminirt, ergiebt sich:

$$4\pi u_0 \frac{\sin sr}{r} = -\left\{\frac{\sin sr}{r}\frac{d}{dr}\frac{\cos sr}{r} - \frac{\cos sr}{r}\frac{d}{dr}\frac{\sin sr}{r}\right\}\int u\,d\sigma = \frac{s}{r^2}\int u\,d\sigma.$$

Von dem hier bestimmten Oberflächenintegral $\int u\,d\sigma$ gelangen wir unmittelbar zu dem Mittelwerte $\bar{u}$ von u, der analog dem Mittelwerte $\bar{\chi}$ von χ zu definiren ist:

$$\bar{u} = \frac{1}{4\pi r^2}\int u\,d\sigma = u_0 \frac{\sin sr}{sr} = \frac{1}{s}\frac{\sin sT}{T}\frac{\sin sr}{r}.$$

Gehen wir zu χ zurück, so haben wir gleichzeitig:

50) $$\bar{\chi} = \frac{1}{Tr}\int_0^\infty \sin sT \sin sr \sin sa \sin c s\tau \frac{ds}{s^2}.$$

Es bleibt noch die Integration nach s auszuführen, was in § 14 unter a) geschehen wird. Wir entnehmen den dortigen Ergebnissen Folgendes: Definirt man vier besondere Werte von τ, nämlich $\tau_1' \tau_1'' \tau_2' \tau_2''$ durch die Gleichungen:

51) $$\left\{\begin{array}{ll} \tau_1') \ldots c\tau + T = r - a, & \tau_1'') \ldots c\tau - T = r - a, \\ \tau_2') \ldots c\tau + T = r + a, & \tau_2'') \ldots c\tau - T = r + a, \end{array}\right.$$

wobei unter unwesentlicher Einschränkung der Allgemeinheit (vgl. § 14 Schluß) vorausgesetzt werden möge, daß jede dieser Gl. nur eine brauchbare, positive Wurzel hat, so gilt:

$$\begin{array}{ll} \text{für } 0 < \tau < \tau_1' & \ldots \bar{\chi} = 0, \\ \text{„ } \tau_1' < \tau < \tau_1'' & \ldots \bar{\chi} = \frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{r} + \frac{c\tau - r + a}{rT}\right), \\ \text{„ } \tau_1'' < \tau < \tau_2' & \ldots \bar{\chi} = \frac{\pi}{8}\frac{2}{r}, \\ \text{„ } \tau_2' < \tau < \tau_2'' & \ldots \bar{\chi} = \frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{r} - \frac{c\tau - r - a}{rT}\right) \\ \text{„ } \tau_2'' < \tau \infty & \ldots \bar{\chi} = 0. \end{array}$$

Indessen ist hervorzuheben, daß diese Ausdrücke nur dann gelten, wenn man voraussetzt, daß die Bewegung in der der Zeit t vorangehenden Epoche mit Unterlichtgeschwindigkeit $v < c$

erfolgt sei. In diesem Falle ist der von dem Elektron während der Zeit τ zurückgelegte Weg jedenfalls kleiner als $c\tau$; dasselbe gilt umsomehr von dem gradlinigen Fahrstrahl T (Verbindungslinie des Elektronenmittelpunktes zur Zeit $t-\tau$ und t), so daß wir die Bedingung der Unterlichtgeschwindigkeit wie folgt schreiben können (vgl. auch pag. 384):

$$T < c\tau.$$

Welche Werte $\bar{\chi}$ im Falle $T > c\tau$ (Ueberlichtgeschwindigkeit) annimmt, wird in § 13 anzugeben sein.

Setzen wir diese Werte von $\bar{\chi}$ in 48) ein, so zerfällt das Integral nach τ in die drei Integrationen:

$$\int_{\tau_1'}^{\tau_1''} \ldots d\tau + \int_{\tau_1''}^{\tau_2'} \ldots d\tau + \int_{\tau_2'}^{\tau_2''} \ldots d\tau.$$

Wir bemerken zunächst, daß wir die Differentiation nach t in dem letzten Gliede von 48) unter dem Integralzeichen ausführen können; denn die durch Differentiation der Integrationsgrenzen $\tau_1', \tau_1'' \ldots$ entstehenden Terme heben sich wegen des stetigen Verlaufes von $\bar{\chi}$ gegenseitig auf. Ferner wollen wir von $\bar{\chi}$ einen constanten, von τ unabhängigen Bestandteil absondern, nämlich in den drei Integrationsintervallen $(\tau_1' \tau_1'')$, $(\tau_1'' \tau_2')$, $(\tau_2' \tau_2'')$ bez. den Bestandteil:

$$\frac{\pi}{8}\frac{1}{r}, \quad \frac{\pi}{8}\frac{2}{r}, \quad \frac{\pi}{8}\frac{1}{r}.$$

Da diese Werte auch von T und t unabhängig sind, also ihr $\operatorname{grad}_{\mathfrak{r}}$ und ihr Differentialquotient $\partial/\partial t$ verschwindet, so entspricht ihnen bei passender Zusammenfassung der Integrationen auf der rechten Seite von 48) lediglich der Betrag:

$$\frac{\pi}{8}\operatorname*{Lim}_{r=a}\frac{1}{r}\left\{\int_{\tau_1'}^{\tau_2'}\frac{\partial \mathfrak{v}_{t-\tau}}{\partial t}\,d\tau + \int_{\tau_1''}^{\tau_2''}\frac{\partial \mathfrak{v}_{t-\tau}}{\partial t}\,d\tau\right\}$$
$$= \frac{\pi}{8}\operatorname*{Lim}_{r=a}\frac{1}{r}\left\{\mathfrak{v}_{t-\tau_1'} - \mathfrak{v}_{t-\tau_2'} + \mathfrak{v}_{t-\tau_1''} - \mathfrak{v}_{t-\tau_2''}\right\}.$$

Hier gehen wir sogleich zur Grenze $r = a$ über. Nach den Definitionsgleichungen 51) wird dann, da τ und T nicht negativ werden können und da $T < c\tau$ sein sollte, notwendig $\tau_1' = \tau_1'' = 0$ sowie $T_1' = T_1'' = 0$; die Grenzwerte von τ_2', τ_2'' für $r = a$ mögen kurz mit τ', τ'' bezeichnet werden; sie sind durch die Gl. bestimmt:

52) $$c\tau' + T' = 2a, \quad c\tau'' - T'' = 2a,$$

wobei wir durch die Striche bei T angedeutet haben, daß der zu τ', τ'' gehörige Funktionswert T einzutragen ist[1]). Der vorige Ausdruck verwandelt sich nun in:

$$\frac{\pi}{8}\frac{1}{a}\left\{2\mathfrak{v}_t - \mathfrak{v}_{t-\tau'} - \mathfrak{v}_{t-\tau''}\right\}.$$

Nachdem somit einige Terme von $\overline{\chi}$ vorweggenommen sind, können wir Gl. 48), wenn wir dieselbe mit $\pi/8a$ dividiren, folgendermaßen schreiben:

$$53)\quad -\frac{16\pi a^2 c}{\varepsilon^2}\mathfrak{F} = 2\mathfrak{v}_t - \mathfrak{v}_{t-\tau'} - \mathfrak{v}_{t-\tau''}$$
$$+\operatorname*{Lim}_{r=a}\left\{\int_{\tau_1'}^{\tau_1''}\{c^2-(\mathfrak{v}_t\mathfrak{v}_{t-\tau})\}\operatorname{grad}_{\mathfrak{x}}\frac{c\tau-r+a}{T}\,d\tau\right.$$
$$\left.+\int_{\tau_1'}^{\tau_1''}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathfrak{v}_{t-\tau}\frac{c\tau-r+a}{T}\right)d\tau\right\}$$
$$-\operatorname*{Lim}_{r=a}\left\{\int_{\tau_2'}^{\tau_2''}\{c^2-(\mathfrak{v}_t\mathfrak{v}_{t-\tau})\}\operatorname{grad}_{\mathfrak{x}}\frac{c\tau-r-a}{T}\,d\tau\right.$$
$$\left.+\int_{\tau_2'}^{\tau_2''}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathfrak{v}_{t-\tau}\frac{c\tau-r-a}{T}\right)d\tau\right\}.$$

Was den Grenzübergang $r = a$ anlangt, so kann man in den beiden letzten Integralen ohne Weiteres $r = a$ setzen, wobei die Integrationsgrenzen in τ', τ'' übergehen. In den beiden ersten Integralen dagegen ist Vorsicht geboten, weil der Nenner T mit verschwindendem τ_1', τ_1'' selbst verschwindet.

Das erste Integral der rechten Seite lautet, da:

$$\operatorname{grad}_{\mathfrak{x}}\left(\frac{1}{T}\right) = -\frac{\mathfrak{T}}{T^3},$$

mit der Abkürzung $r - a = \delta$:

$$-\operatorname*{Lim}_{\delta=0}\int_{\tau_1'}^{\tau_1''}\{c^2-(\mathfrak{v}_t\mathfrak{v}_{t-\tau})\}\frac{c\tau-\delta}{T^3}\mathfrak{T}\,d\tau.$$

Hier können wir $\mathfrak{T}$ und T unter der Annahme eines bereits hinreichend kleinen τ_1'' durch Näherungsformeln ersetzen, in denen

1) Die geometrische Bedeutung der so bestimmten Zeitpunkte τ', τ'' kann im Anschluß an Fig. 2b dahin erklärt werden, daß die den Zeitpunkten $\tau < \tau'$ entsprechende Erregung die ganze Oberfläche des Elektrons in ihrer Lage zur Zeit t deckt, daß für $\tau' < \tau < \tau''$ nur noch ein Teil dieser Oberfläche von der betreffenden Erregung erfaßt wird, während bei $\tau > \tau''$ die Erregung bereits vollständig über die Lage des Elektrons zur Zeit t hinweggestrichen ist.

nur erste Potenzen von τ berücksichtigt werden. Aus der Definition von $\mathfrak{T}$ (Gl. 11)) folgt in erster Näherung:

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{v}_t . \tau, \quad T = v_t . \tau;$$

mit demselben Recht können wir setzen:

$$c^2 - (\mathfrak{v}_t \mathfrak{v}_{t-\tau}) = c^2 - v_t^2.$$

Gleichzeitig liefern die Gl. 51) für τ_1', τ_1'', die Näherungswerte:

$$(c + v_t)\tau_1' = \delta, \quad (c - v_t)\tau_1'' = \delta.$$

Das fragliche Integral kann daher folgendermaßen ausgewertet werden:

$$-\frac{c^2 - v_t^2}{v_t^2}\frac{\mathfrak{v}_t}{v_t}\left\{c \log \frac{c + v_t}{c - v_t} - 2v_t\right\}.$$

Offenbar wäre uns dieser Betrag verloren gegangen, wenn wir von vornherein $\delta = 0$ gesetzt hätten.

Man erkennt ferner leicht, indem man von den soeben entwickelten Näherungsformeln Gebrauch macht, daß das zweite Integral der rechten Seite von 53) in der Grenze $\delta = 0$ verschwindet. Fügen wir schließlich die beiden letzten Integrale hinzu, nachdem wir in denselben $r = a$ gemacht und für grad $1/T$ den oben angegebenen Wert $-\mathfrak{T}/T^3$ eingetragen haben, so erhalten wir den folgenden definitiven Wert der resultirenden Kraft:

$$54) \quad -\frac{16\,\pi a^2 c}{\varepsilon^2}\mathfrak{F} = 2\mathfrak{v}_t - \mathfrak{v}_{t-\tau'} - \mathfrak{v}_{t-\tau''} - \frac{c^2 - v_t^2}{v_t^2}\frac{\mathfrak{v}_t}{v_t}\left\{c \log \frac{c + v_t}{c - v_t} - 2v_t\right\}$$
$$+ \int_{\tau'}^{\tau''}\left(\{c^2 - (\mathfrak{v}_t \mathfrak{v}_{t-\tau})\}\frac{\mathfrak{T}}{T^3} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathfrak{v}_{t-\tau}}{T}\right)(c\tau - 2a)\,d\tau.$$

b. Volumladung. Die Gln. 46), durch welche wir oben φ und $\mathfrak{A}$ darstellten, können für den Fall von Volumladung direkt übernommen werden, vorausgesetzt, daß wir unter χ (in Uebereinstimmung mit 18), 18') und 22)) den folgenden Ausdruck verstehn:

$$46') \quad \chi = 3\int_0^\infty u \frac{\sin as - as \cos as}{(as)^3} \sin cs\tau \frac{ds}{s}, \quad u = \frac{\sin Rs}{R}.$$

Der Mittelwert $\bar{\chi}$ von χ entsteht jetzt durch Integration über das Innere der Kugel vom Radius a und Division durch den Inhalt dieser Kugel. Man hat also, unter dS ein Raumelement derselben verstanden:

$$\bar{\chi} = \frac{3}{4\pi a^3}\int \chi\, dS.$$

Bei dieser Bedeutung von $\bar{\chi}$ liefert Gl. 48) nach wie vor den Ausdruck der resultirenden Kraft $\mathfrak{F}$, wobei jedoch jetzt das Zeichen „Limes" fortfallen und direkt $r = a$ gesetzt werden kann.

Um $\bar{\chi}$ zu bestimmen, führen wir die Raumintegration zunächst an dem von den räumlichen Coordinaten allein abhängigen Factor $u = \sin Rs/R$ von χ aus. Aus der Differentialgleichung $\Delta u + s^2 u = 0$ zusammen mit dem Green'schen Satze folgt:

$$\int u\,dS = -\frac{1}{s^2}\int \Delta u\,dS = -\frac{1}{s^2}\int \frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma,$$

wo sich die Oberflächenintegration $d\sigma$ auf die Kugel vom Radius a erstreckt. Den Wert des hier in Frage kommenden Oberflächenintegrals entnimmt man den Gl. 49), wenn man in denselben (umgekehrt wie früher) $\int u\,d\sigma$ eliminirt, wobei $r = a$ gesetzt werden darf. Man erhält durch geeignete Multiplikation und Subtraktion aus 49):

$$\int \frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma = -4\pi\,u_0\,\frac{\sin as - as\cos as}{s}$$

und daher:

$$\int u\,dS = 4\pi\,u_0\,\frac{\sin as - as\cos as}{s^3}, \quad u_0 = \frac{\sin Ts}{T},$$

50') $$\bar{\chi} = \frac{9}{Ta}\int_0^\infty \sin Ts\left(\frac{\sin as - as\cos as}{a^2 s^2}\right)^2 \sin c\tau s\,\frac{ds}{s^2}.$$

Die hier noch erforderliche Integration nach s werden wir in § 14 unter b) ausführen. Dort ergiebt sich, wenn man unter τ' und τ'' die durch 52) definirten Zeitpunkte versteht, wenn man überdies Unterlichtgeschwindigkeit ($T < c\tau$) voraussetzt und die Abkürzung

51') $$f(x) = \frac{1}{20}\frac{x^5}{a^2} - x^3 + 2a\,x^2 - \frac{8}{5}a^3$$

benutzt, die folgende Wertbestimmung von $\bar{\chi}$ nebst den daraus folgenden Werten von $\operatorname{grad}_{\mathfrak{T}}\bar{\chi}$:

$$\text{für } 0 < \tau < \tau' \,..\, \bar{\chi} = \frac{3\pi}{16a^3}\,\frac{f(c\tau + T) - f(c\tau - T)}{T},$$

$$\operatorname{grad}_{\mathfrak{T}}\bar{\chi} = \frac{\mathfrak{T}}{T}\frac{\partial\chi}{\partial T} = \frac{3\pi}{16a^3}\,\frac{\mathfrak{T}}{T}\frac{\partial}{\partial T}\,\frac{f(c\tau + T) - f(c\tau - T)}{T},$$

$$\text{„ } \tau' < \tau < \tau'' \,..\, \bar{\chi} = -\frac{3\pi}{16a^3}\,\frac{f(c\tau - T)}{T},$$

$$\operatorname{grad}_{\mathfrak{T}}\bar{\chi} = -\frac{3\pi}{16a^3}\,\frac{\mathfrak{T}}{T}\frac{\partial}{\partial T}\,\frac{f(c\tau - T)}{T},$$

$$\text{„ } \tau'' < \tau < \infty \,..\, \bar{\chi} = \operatorname{grad}_{\mathfrak{T}}\bar{\chi} = 0.$$

Wir setzen diese Werte in 48) ein, indem wir die Limes-Zeichen unterdrücken und mit $3\pi/16a^3$ die ganze Gleichung dividiren. Die Differentiation nach t darf wieder unter dem Integralzeichen nach τ ausgeführt werden. Das **definitive Resultat** schreiben wir folgendermaßen, indem wir die Integrationen passend zusammenfassen:

$$54') \quad -\frac{32\pi a^4 c}{3e^2}\mathfrak{F} =$$

$$\int_0^{\tau'}\left(\frac{\mathfrak{T}}{T}\left\{c^2-(\mathfrak{v}_t\mathfrak{v}_{t-\tau})\right\}\frac{\partial}{\partial T}\frac{f(c\tau+T)}{T}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathfrak{v}_{t-\tau}f(c\tau+T)}{T}\right)d\tau$$

$$-\int_0^{\tau''}\left(\frac{\mathfrak{T}}{T}\left\{c^2-(\mathfrak{v}_t\mathfrak{v}_{t-\tau})\right\}\frac{\partial}{\partial T}\frac{f(c\tau-T)}{T}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathfrak{v}_{t-\tau}f(c\tau-T)}{T}\right)d\tau.$$

Allerdings ist hierbei im Auge zu behalten, daß wegen des bei $\tau = 0$ verschwindenden Nenners T nur die Differenz der beiden vorstehenden Integrale, nicht aber das einzelne derselben einen Sinn hat. Wollten wir diesen Uebelstand vermeiden, so müßten wir in dem ersten Integral ersetzen $f(c\tau+T)$ durch $f(c\tau+T) - f(c\tau-T)$ und dafür das zweite Integral erstrecken von τ' bis τ''. Wir ziehen indessen die obige kürzere Schreibweise vor, indem wir ausdrücklich den Vorbehalt machen, daß in der Nähe von $\tau = 0$ die beiden Integrationen in Eins zusammenzufassen sind. Derselbe Vorbehalt ist zu beachten, wenn T etwa für einen von Null verschiedenen τ-Wert verschwinden sollte; in diesem Falle bleibt der Differenzenquotient $\{f(c\tau+T)-f(c\tau-T)\}/T$, auf den es bei richtiger Zusammenfassung der Integrale allein ankommt, endlich, während der einzelne Quotient $f(c\tau+T)/T$ unendlich groß wird. Uebrigens ist dieser Fall notwendig verbunden mit dem Auftreten mehrerer Wurzeln τ', τ'', von dem wir am Ende von § 14 sprechen werden.

§ 12. *Der Translations-Bestandteil des Drehmomentes.*

Indem wir wie im vorigen Paragraphen $\mathfrak{w} = 0$ (reine Translation) und $T < c\tau$ (Unterlichtgeschwindigkeit) voraussetzen, gehen wir von der Drehkraft für die Ladungseinheit $\mathfrak{n} = [\mathfrak{r}\mathfrak{f}]$ zu der Drehkraft $\mathfrak{N}$ durch Integration über die Gesamtladung über.

a. **Oberflächenladung.** Wir übernehmen für φ, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{f}$ die Ausdrücke 46) und 47). Für $\mathfrak{n}$ erhalten wir dann:

$$55) \quad -\frac{2\pi^2 ac}{e}\mathfrak{n} = \int_0^\infty\left\{c^2-(\mathfrak{v}_t\mathfrak{v}_{t-\tau})\right\}[\mathfrak{r}\,\mathrm{grad}\,\chi]\,d\tau+\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty[\mathfrak{r}\mathfrak{v}_{t-\tau}]\,\chi\,d\tau.$$

Wir beachten wie früher, daß grad $\chi = \text{grad}_{\mathfrak{x}}\chi$ und schreiben:

$$[\mathfrak{r}\,\text{grad}\,\chi] = -\text{rot}_{\mathfrak{x}}\{\mathfrak{r}\chi\};$$

um von $\mathfrak{n}$ zu $\mathfrak{N}$ überzugehen, ist es dann nur nötig, den über die Oberfläche des Elektrons oder, genauer gesagt, über eine Kugel vom Radius r erstreckten Mittelwert

$$\overline{\mathfrak{r}\chi} = \frac{1}{4\pi r^2}\int \mathfrak{r}\chi\, d\sigma$$

zu kennen. Durch diesen stellt sich $\mathfrak{N}$ in folgender Weise dar:

$$\text{56)} \qquad \frac{2\pi^2 ac}{\varepsilon^2}\mathfrak{N} = \operatorname*{Lim}_{r=a}\int_0^\infty \left(\{c^2 - (\mathfrak{v}_t \mathfrak{v}_{t-\tau})\}\,\text{rot}_{\mathfrak{x}}\overline{\mathfrak{r}\chi} - \frac{\partial}{\partial t}[\overline{\mathfrak{r}\chi}\,\mathfrak{v}_{t-\tau}]\right) d\tau\,.$$

Um $\overline{\mathfrak{r}\chi}$ auszuwerten, ziehen wir zunächst den auf der Kugeloberfläche veränderlichen Faktor von χ (s. Gl. 46)):

$$u = \frac{\sin sR}{R}$$

in Betracht und bilden:

$$\overline{\mathfrak{r}u} = \frac{1}{4\pi r^2}\int \mathfrak{r}u\, d\sigma.$$

Man kann den Wert dieses Integrals aus den beiden folgenden zu 49) analogen Gleichungen entnehmen:

$$\text{57)} \qquad \left\{ \begin{aligned} 4\pi r\,\text{grad}_{\mathfrak{x}} u_0 &= -\frac{d^2}{dr^2}\frac{\cos sr}{r}\int \mathfrak{r}u\, d\sigma + \frac{d}{dr}\frac{\cos sr}{r}\int \mathfrak{r}\frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma, \\ 0 &= -\frac{d^2}{dr^2}\frac{\sin sr}{r}\int \mathfrak{r}u\, d\sigma + \frac{d}{dr}\frac{\sin sr}{r}\int \mathfrak{r}\frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma. \end{aligned} \right.$$

Dieselben lassen sich folgendermaßen ableiten: Man setze in dem Green'schen Satz:

$$\int (u\Delta v - v\Delta u)\, dS = \int \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma$$

u gleich dem obigen Wert und zunächst:

$$v = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\sin sr}{r} = \frac{x}{r}\frac{d}{dr}\frac{\sin sr}{r}.$$

Es genügen dann u und v den Differentialgleichungen $\Delta u + s^2 u = 0$, $\Delta v + s^2 v = 0$, so daß die über das Innere der Kugel vom Radius r zu erstreckende Raumintegration auf der linken Seite der Greenschen Gleichung verschwindet. Auf der rechten Seite, wo die Integration über die Kugeloberfläche vom Radius r zu erstrecken ist, kann man den nur von r abhängigen Bestandteil von

v und $\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{x}{r}\frac{d^2}{dr^2}\frac{\sin sr}{r}$, nämlich $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\frac{\sin sr}{r}$ und $\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\frac{\sin sr}{r}$ vor das Integralzeichen ziehen; es ergiebt sich dann die zweite der Gl. 57), nur daß darin der Vektor $\mathfrak{r}$ durch eine seiner Componenten (x) ersetzt ist. Wählt man andrerseits:

$$v = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\sin sr}{r} \text{ oder } v = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\sin sr}{r},$$

so treten die Componenten y und z an die Stelle von x, so daß die fragliche Vektorgleichung vollständig bewiesen ist.

Um in entsprechender Weise zur ersten der Gl. (57) zu gelangen, wähle man in der Green'schen Gleichung u wie vorher und

$$v = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\cos sr}{r} = \frac{x}{r}\frac{d}{dr}\frac{\cos sr}{r}.$$

Man hat dann den Mittelpunkt $r = 0$ unserer Kugel von der Integration auszuschließen und das Oberflächenintegral der rechten Seite außer über die Kugel vom Radius r über eine concentrische von dem sehr kleinen Radius ϱ zu erstrecken. Die auf letzterer nur wenig veränderliche Funktion u kann man entwickeln:

$$u = u_0 + \frac{\partial u_0}{\partial x}x + \frac{\partial u_0}{\partial y}y + \frac{\partial u_0}{\partial z}z + \cdots$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{x}{\varrho} + \frac{\partial u_0}{\partial y}\frac{y}{\varrho} + \frac{\partial u_0}{\partial z}\frac{z}{\varrho} + \cdots$$

Das Oberflächenintegral über die Kugel ϱ wird dann:

$$\int_\varrho \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma$$

$$= \frac{1}{\varrho}\frac{d^2}{d\varrho^2}\frac{\cos s\varrho}{\varrho}\left(u_0\int x\,d\sigma + \frac{\partial u_0}{\partial x}\int x^2\,d\sigma + \frac{\partial u_0}{\partial y}\int xy\,d\sigma + \frac{\partial u_0}{\partial z}\int xz\,d\sigma + \cdots\right)$$

$$-\frac{1}{\varrho^2}\frac{d}{d\varrho}\frac{\cos s\varrho}{\varrho}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\int x^2\,d\sigma + \frac{\partial u_0}{\partial y}\int xy\,d\sigma + \frac{\partial u_0}{\partial z}\int xz\,d\sigma + \cdots\right)$$

Es ist aber:

$$\int x\,d\sigma = \int xy\,d\sigma = \int xz\,d\sigma = 0,$$

$$\int x^2\,d\sigma = \frac{1}{3}\int(x^2+y^2+z^2)\,d\sigma = \frac{4\pi}{3}\varrho^4;$$

das in Rede stehende Oberflächenintegral reducirt sich also auf:

$$\left(\frac{1}{\varrho}\frac{d^2}{d\varrho^2}\frac{\cos s\varrho}{\varrho} - \frac{1}{\varrho^2}\frac{d}{d\varrho}\frac{\cos s\varrho}{\varrho}\right)\frac{4\pi}{3}\varrho^4\frac{\partial u_0}{\partial x}$$

und wird für $\varrho = 0$ einfach gleich:

$$4\pi \frac{\partial u_0}{\partial x} = 4\pi \frac{\partial u_0}{\partial \xi}.$$

Von da aus erhält man die erste der Gl. (57), nur daß darin die Vektoren $\mathfrak{r}$ und grad durch ihre x-Componenten x und $\partial/\partial\xi$ ersetzt sind. Man gewinnt weiterhin die vollständige Vektorgleichung, wenn man ferner wählt:

$$v = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\cos sr}{r} \text{ und } v = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\cos sr}{r}.$$

Eliminirt man aus den Gl. (57) das zweite der rechts stehenden Integrale, so erhält man den gesuchten Wert von $\overline{\mathfrak{r}u}$ zunächst in der Form:

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} \frac{\sin sr}{r} \cdot \frac{d}{dr} \frac{\cos sr}{r} - \frac{d^2}{dr^2} \frac{\cos sr}{r} \cdot \frac{d}{dr} \frac{\sin sr}{r}\right\} \overline{\mathfrak{r}u}$$
$$= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{\sin sr}{r} \cdot \operatorname{grad} u_0.$$

Die Ausrechnung der $\{\ \}$ liefert den einfachen Wert s^3/r^2. Da ferner $u_0 = \sin sT/T$, so hat man schließlich:

58) $$\overline{\mathfrak{r}u} = \frac{r}{s^3} \frac{d}{dr} \frac{\sin sr}{r} \operatorname{grad}_{\mathfrak{x}} \frac{\sin sT}{T}.$$

Hieraus ergiebt sich nach (46):

59) $$\overline{\mathfrak{r}\chi} = \int_0^\infty \overline{\mathfrak{r}u} \sin as \sin cs\tau \frac{ds}{s} =$$
$$\int_0^\infty \operatorname{grad}_{\mathfrak{x}} \frac{\sin sT}{sT} \frac{d}{dr} \frac{\sin sr}{sr} \sin as \sin cs\tau \frac{ds}{s^2}.$$

Zunächst schließen wir aus dem vorstehenden Ausdruck, daß

$$\operatorname{rot}_{\mathfrak{x}} \overline{\mathfrak{r}\chi} = 0, \quad \text{da } \operatorname{rot}_{\mathfrak{x}} \operatorname{grad}_{\mathfrak{x}} \frac{\sin sT}{sT} = 0.$$

Infolge dessen verschwindet in (56) das erste Glied der rechten Seite für alle Werte von τ. Es geschah aber gerade wegen dieses ersten Gliedes bez. wegen des ihm entsprechenden ersten Gliedes in (48), daß wir im vorigen Paragraphen zwischen dem Grenzwert für $r = a$ und dem Werte für $r = a$ selbst unterscheiden mußten. Im vorliegenden Fall wird nun diese Unterscheidung überflüssig und wir können direkt statt (56) schreiben:

60) $$-\frac{2\pi^2 ac}{s^2} \mathfrak{R} = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty [\overline{\mathfrak{r}\chi}\, \mathfrak{v}_{t-\tau}]\, d\tau.$$

Mit der Ausführung der Integration nach s in dem Ausdrucke von $\overline{\mathfrak{r}\chi}$ werden wir uns in § 14 unter c) beschäftigen. Dort zeigt sich, daß man bei Unterlichtgeschwindigkeit die folgenden Fälle zu unterscheiden hat:

$$0 < \tau < \tau' \,..\, \overline{\mathfrak{r}\chi} = \frac{\pi}{12}\frac{\mathfrak{T}}{a}$$

$$\tau' < \tau < \tau'' \,..\, \overline{\mathfrak{r}\chi} = \frac{\pi}{12}\frac{\mathfrak{T}}{a}\frac{2(a^2 - aT + T^2) - (c\tau - a)(c\tau + T)}{4T^3}(2a + T - c\tau),$$

$$\tau'' < \tau < \infty \,..\, \overline{\mathfrak{r}\chi} = 0.$$

Trägt man dies in 60) ein und multiplicirt rechts und links mit $12a/\pi$, so ergiebt sich:

$$61)\qquad -\frac{24\pi a^2 c}{\varepsilon^2}\mathfrak{N} = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\tau'}[\mathfrak{T}\mathfrak{v}_{t-\tau}]\,d\tau$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau'}^{\tau''}[\mathfrak{T}\mathfrak{v}_{t-\tau}]\frac{2(a^2 - a\,T + T^2) - (c\tau - a)(c\tau + T)}{4T^3}(2a + T - c\tau)\,d\tau.$$

Wie man sieht, wird der Translationsbestandteil des Drehmomentes bei stetiger Bewegungsrichtung ziemlich klein, da er unter dem Integralzeichen mit dem in $[\mathfrak{T}\mathfrak{v}_{t-\tau}]$ steckenden Sinus zwischen der Sehne $\mathfrak{T}$ und der Tangente $\mathfrak{v}_{t-\tau}$ an die Bahncurve multiplicirt ist. Bei geradliniger Bewegung, wo $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{v}_{t-\tau}$ dauernd dieselbe Richtung haben, wird ohne Weiteres

$$\mathfrak{N} = 0.$$

Wenn die Bahncurve eben ist, steht die Axe des Drehmomentes senkrecht auf der Bahnebene.

b. Volumladung. Wir können auch jetzt zur Darstellung von $\mathfrak{N}$ die Gl. (60) benutzen, wenn wir darin unter χ den Ausdruck 46') und unter $\overline{\mathfrak{r}\chi}$ den über das Innere des Elektrons erstreckten Mittelwert von $\mathfrak{r}\chi$ verstehen; denn es wird sich ähnlich wie vorher zeigen, daß auch jetzt $\mathrm{rot}_{\mathfrak{x}}\overline{\mathfrak{r}\chi}$ verschwindet. Bei der nämlichen Bedeutung von $u = \sin Rs/R$ wie unter a) bilden wir

$$\overline{\mathfrak{r}u} = \frac{3}{4\pi a^3}\int \mathfrak{r}u\,dS.$$

Es ist aber wegen der Differentialgleichungen $\Delta u + s^2 u = 0$, $\Delta\mathfrak{r} = 0$:

$$\int \mathfrak{r}u\,dS = -\frac{1}{s^2}\int(\mathfrak{r}\,\Delta u - u\,\Delta\mathfrak{r})\,dS =$$

$$-\frac{1}{s^2}\int\left(\mathfrak{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial n}\right)d\sigma = -\frac{1}{s^2}\int\mathfrak{r}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma + \frac{1}{s^2 a}\int\mathfrak{r}u\,d\sigma,$$

wobei sich $\int d\sigma$ auf die Oberfläche des Elektrons bezieht.

Wir haben bereits oben gesehen (Gl. 58), in der nunmehr $r = a$ zu setzen ist), daß

$$\frac{1}{4\pi a^2}\int \mathfrak{r} u\, d\sigma = \frac{\mathfrak{T}}{T}\frac{a}{s}\frac{d}{da}\frac{\sin sa}{sa}\frac{d}{dT}\frac{\sin sT}{sT}.$$

Daraufhin liefert die zweite der Gl. (57) mit $r = a$:

$$\frac{1}{4\pi a^2}\int \mathfrak{r}\frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = \frac{\mathfrak{T}}{T}\frac{a}{s}\frac{d^2}{da^2}\frac{\sin sa}{sa}\frac{d}{dT}\frac{\sin sT}{sT}.$$

Folglich wird:

$$-\frac{1}{s^2}\int \mathfrak{r}\frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma + \frac{1}{s^2 a}\int \mathfrak{r} u\, d\sigma = -\frac{4\pi a^2}{s}\frac{\mathfrak{T}}{T}\Big\{\quad\Big\}\frac{d}{dT}\frac{\sin sT}{sT},$$

und

58′) $$\overline{\mathfrak{r}u} = 3\frac{\mathfrak{T}}{sT^2}\Big\{\quad\Big\}\frac{\sin sT - sT\cos sT}{sT},$$

wo beide mal in der $\{\ \}$ steht:

$$\Big\{\Big\} = \frac{1}{s^2}\frac{d^2}{da^2}\frac{\sin sa}{sa} - \frac{1}{s^2 a}\frac{d}{da}\frac{\sin sa}{sa} = \frac{3\sin sa - 3sa\cos sa + (sa)^2\sin sa}{(sa)^3}$$

Aus 46′) folgt nun:

59′) $$\overline{\mathfrak{r}\chi} = 3\int_0^\infty \overline{\mathfrak{r}u}\,\frac{\sin as - as\cos as}{(as)^2}\sin cs\tau\,\frac{ds}{s}$$

$$= \frac{9\mathfrak{T}}{aT^3}\int_0^\infty \Big\{\Big\}\frac{\sin as - as\cos as}{as}(\sin sT - sT\cos sT)\sin cs\tau\,\frac{ds}{s^4}.$$

Das hier noch vorkommende Integral nach s wird in § 14 unter d) ausgewertet werden. Versteht man unter τ', τ'' die durch 52) bestimmten Zeitpunkte und unter g, G die folgenden Funktionen 5ten, 7ten Grades ihres Argumentes:

60′) $$\begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{10}\dfrac{x^5}{a^4} - \dfrac{4}{3}\dfrac{x^3}{a^2} + \dfrac{2x^2}{a} - \dfrac{8a}{15}, \\[2ex] G(x) = \displaystyle\int_{2a}^{x} g(v)(v - c\tau)\,dv, \end{cases}$$

so findet man dort bei Unterlichtgeschwindigkeit:

$$\text{für } 0 < \tau < \tau' \ldots \overline{\mathfrak{r}\chi} = \frac{9\pi\mathfrak{T}}{32aT^3}(G(c\tau + T) - G(c\tau - T)),$$

$$\text{„}\quad \tau' < \tau < \tau'' \ldots \overline{\mathfrak{r}\chi} = -\frac{9\pi\mathfrak{T}}{32aT^3}G(c\tau - T),$$

$$\text{„}\quad \tau'' < \tau < \infty \ldots \overline{\mathfrak{r}\chi} = 0.$$

Diese Ausdrücke tragen wir in 60) ein. Multipliciren wir noch rechts und links mit dem Faktor $32a/9\pi$, so folgt bei passender Zusammenfassung der zunächst von 0 bis τ' und von τ' bis τ'' zu erstreckenden Teilintegrale und bei Berücksichtigung des am Ende des vorigen Paragraphen gemachten Vorbehaltes:

$$61') \qquad -\frac{64\pi a^2 c}{9\varepsilon^2}\mathfrak{N} = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\tau'}[\mathfrak{T}\mathfrak{v}_{t-\tau}]\,G(c\tau+T)\frac{d\tau}{T^3} - \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\tau'}[\mathfrak{T}\mathfrak{v}_{t-\tau}]\,G(c\tau-T)\frac{d\tau}{T^3}.$$

Ueber Größe und Axenrichtung von $\mathfrak{N}$, insbesondere bei geradliniger und ebener Bewegung ist dasselbe zu sagen wie pag. 382 im Falle von Oberflächenladung.

§ 13. *Ergänzung betreffend Ueberlichtgeschwindigkeit.*

Die oft aufgeworfene und in verschiedener Weise beantwortete Frage nach der Möglichkeit der Ueberlichtgeschwindigkeit wird im Folgenden dahin entschieden, daß eine Ueberschreitung der Lichtgeschwindigkeit bei räumlicher Ladungsverteilung durchaus möglich ist, d. h. daß dieselbe in keiner Weise einen unendlichen Arbeitsaufwand erfordert, daß sie dagegen bei flächenhafter Ladungsverteilung unmöglich wird, weil dazu eine unendliche Kraft und Arbeit nötig wäre.

Im Voraus möge bemerkt werden, daß nicht die Alternative $v \gtrless c$ (Ueberlichtgeschwindigkeit oder Unterlichtgeschwindigkeit) sondern die Alternative $T \gtrless c\tau$ (der von dem Elektronenmittelpunkte zurückgelegte Weg größer oder kleiner als der Lichtweg während der gleichen Zeit) für das Folgende entscheidend ist. Wir bemerkten schon pag. 374 oben, daß die Ungleichung $v < c$ mit Notwendigkeit die Ungleichung $T < c\tau$ zur Folge hat. Das Umgekehrte aber ist nicht ohne Weiteres der Fall. Bei krummliniger Bewegung kann ersichtlich sehr wohl $v > c$ und trotzdem unter Umständen $T < c\tau$ sein. Wir setzen daher für das Folgende ausdrücklich fest, daß wir die Bezeichnung „Ueberlichtgeschwindigkeit" in dem Sinne auffassen wollen, daß es sich um eine Bewegung handelt, bei der dauernd oder zeitweilig $T > c\tau$ ist. Man kann dabei die folgenden Unterfälle unterscheiden, die sich übrigens im Folgenden mit wesentlich denselben Formeln behandeln lassen werden:

I. In der der Zeit t vorangehenden Epoche war, soweit sie für die Integration nach τ in Frage kommt, dauernd $T > c\tau$.

II. In eben dieser Epoche war zunächst $T > c\tau$, für größere τ, d. h. weiter zurückliegende Zeitpunkte dagegen $T < c\tau$.

III. Es war zunächst $T < c\tau$, dagegen früher $T > c\tau$.

In den beiden letzteren Fällen hat also ein Durchgang durch die Lichtgeschwindigkeit oder, genauer gesagt, eine vorübergehende Gleichheit zwischen „Elektronenweg" T und Lichtweg $c\tau$ stattgegefunden. Auf eine asymptotisch-dauernde Gleichheit zwischen Elektronenweg und Lichtweg kommen wir zum Schluß dieses Paragraphen zu sprechen.

a. Volumladung. Wir beginnen mit dem hier einfacheren Fall einer gleichförmigen Volumladung. Ersichtlich ist an den anfänglichen Formeln 46'), 48), 50') des § 11 nicht das Geringste zu ändern, da bei ihnen die frühere Voraussetzung $T < c\tau$ überhaupt nicht in Frage kam. Diese machte sich erst geltend bei der Bestimmung des Mittelwertes von χ. Wir entnehmen aber den Erörterungen des § 14e), daß es nur nötig ist, $c\tau - T$ zu ersetzen durch $|c\tau - T|$, um die Berechnung von $\bar{\chi}$ auch für den Fall $T > c\tau$ aufrecht halten zu können. Diese Ersetzung hat stattzufinden sowohl in dem Argumente der Funktion f, wie in der Definitionsgleichung von τ'' sowie in der Schlußformel 54') für $\mathfrak{F}$:

62) $$-\frac{32\pi a^4 c}{3\varepsilon^2}\mathfrak{F} =$$

$$\int_0^{\tau'}\left(\frac{\mathfrak{T}}{T}\left\{c^2-(\mathfrak{v}_t\mathfrak{v}_{t-\tau})\right\}\frac{\partial}{\partial T}\frac{f(c\tau+T)}{T}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathfrak{v}_{t-\tau}f(c\tau+T)}{T}\right)d\tau$$

$$-\int_0^{\tau''}\left(\frac{\mathfrak{T}}{T}\left\{c^2-(\mathfrak{v}_t\mathfrak{v}_{t-\tau})\right\}\frac{\partial}{\partial T}\frac{f(|c\tau-T|)}{T}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathfrak{v}_{t-\tau}f(|c\tau-T|)}{T}\right)d\tau,$$

62') $$c\tau'+T'=2a,\quad |c\tau''-T''|=2a.$$

Gl. 62) umfaßt nunmehr nicht nur die Fälle I., II., III. dauernder oder vorübergehender Ueberlichtgeschwindigkeit, sondern auch die früher allein betrachteten Bewegungen mit Unterlichtgeschwindigkeit.

Daß Gl. 62) in keinem Falle zu einem unendlichen $\mathfrak{F}$ Anlaß geben kann, folgt aus der Definition der Funktion f Gl. 51') und ihrem Verhalten für kleine Werte von τ, für welche wegen Verschwinden des Nenners T zunächst ein Unendlichwerden in Frage kommen kann. Für kleine τ ist näherungsweise (bis auf höhere Potenzen von τ) $T = v\tau$, $\mathfrak{T}/T = \mathfrak{v}/v$, $c^2 - (\mathfrak{v}_t\mathfrak{v}_{t-\tau}) = c^2 - v^2$,

$$f(c\tau + T) = -\frac{8}{5}a^2 + 2a(c\tau + T)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\frac{f(c\tau + T)}{T} = \frac{8}{5}\frac{a^3}{T^2} - \frac{2a(c\tau + T)^2}{T^2} + \frac{4a(c\tau + T)}{T},$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\frac{f(|c\tau - T|)}{T} = \frac{8}{5}\frac{a^3}{T^2} - \frac{2a(c\tau - T)^2}{T^2} - \frac{4a(c\tau - T)}{T}.$$

Fassen wir nun, wie es durch die Schlußbemerkung von § 11 vorgeschrieben wurde, die beiden Integrationen auf der rechten Seite von 62) in der Nähe von $\tau = 0$ zusammen, so heben sich in der Differenz die Beträge mit $8a^3/5$ gegenseitig fort, und man erhält als Wert des Integranden einfach:

$$8a\frac{\partial \mathfrak{v}_{t-\tau}}{\partial t}c\tau\, d\tau$$

so daß also die verschwindenden Nenner in Wegfall gekommen sind, und zwar unabhängig davon, ob $T \gtrless c\tau$ ist.

Wenn dagegen T für irgend einen Wert $\tau > 0$ verschwinden sollte, so gilt in dessen Umgebung jedenfalls die Bedingung der Unterlichtgeschwindigkeit $c\tau > T$; daß auch dann ein Unendlichwerden ausgeschlossen ist, wurde bereits am Ende von § 11 betont.

b. Oberflächenladung. Abermals gelten die anfänglichen Formeln des § 11 bis zu Gl. 50) einschl. ungeändert auch im Falle $T > c\tau$. Dagegen sind die Definitionsgleichungen 51) und die folgenden Angaben über $\bar{\chi}$ nach § 14e) dahin abzuändern, daß im Falle $T > c\tau$ gilt:

$$0 < \tau < \tau_1' \ldots \bar{\chi} = 0,$$

$$\tau_1' < \tau < \tau_1'' \ldots \bar{\chi} = \frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{r} + \frac{c\tau - r + a}{rT}\right),$$

$$\tau_1'' < \tau < \tau_2' \ldots \bar{\chi} = \frac{\pi}{8}\frac{2c\tau}{rT},$$

$$\tau_2' < \tau < \tau_2'' \ldots \bar{\chi} = \frac{\pi}{8}\left(-\frac{1}{r} + \frac{c\tau + r + a}{rT}\right),$$

$$\tau_2'' < \tau < \infty \ldots \bar{\chi} = 0,$$

und daß zur Berechnung von τ_1'' und τ_2'' die Gleichungen dienen:

$$T - c\tau = r - a, \quad T - c\tau = r + a.$$

In dem Intervalle $\tau_1' < \tau < \tau_1''$ ist der Wert von $\bar{\chi}$ gegen früher ungeändert geblieben. Berechnet man daher grad $\bar{\chi}$ und geht in dem zugehörigen zwischen τ_1' und τ_1'' integrirten Gliede von $\mathfrak{F}$ zur Grenze $r - a = \delta = 0$ über, so erhält man wie früher einen endlichen Grenzwert, der sich nur dadurch etwas modificirt, daß

der Näherungswert von τ_1'' bei kleinem δ nicht mehr $\delta/(c-v)$ wie früher, sondern $\delta/(v-c)$ lautet.

Dagegen ist in dem Intervalle $\tau_1'' < \tau < \tau_2'$ der Wert von $\bar{\chi}$ wesentlich von dem früheren verschieden. Er giebt hier nicht mehr einen verschwindenden Gradienten, sondern liefert:

$$\operatorname{grad}_{\mathfrak{r}} \bar{\chi} = -\frac{\pi}{8}\frac{\mathfrak{T}}{T}\frac{2c\tau}{rT^2}.$$

In Folge dessen tritt bei der Ausrechnung der rechten Seite von Gl. 48) gegen früher der folgende Term hinzu:

$$-\lim_{\delta=0}\frac{\pi}{8}\int_{\tau_1''}^{\tau_2'}\{c^2-(\mathfrak{v}_t\mathfrak{v}_{t-\tau})\}\frac{\mathfrak{T}}{T}\frac{2c\tau}{rT^2}\,d\tau.$$

Mit verschwindendem δ geht τ_1'' in 0, τ_2' in τ' über; das Integrationsintervall bleibt also endlich. Wir bestimmen den Näherungswert des Integranden an der unteren Grenze des Integrationsintervalles, wo wir für $\mathfrak{T}$, $T\ldots$ die oben angegebenen Näherungswerte bei verschwindendem τ eintragen können; derselbe lautet:

$$\frac{\pi}{4}(v^2-c^2)\frac{\mathfrak{v}}{v}\frac{c}{rv^2}\cdot\frac{d\tau}{\tau}$$

Bei der Integration nach τ liefert daher die untere Grenze τ_1'' einen Beitrag zu dem Werte des fraglichen Integrals, welcher als Faktor

$$\log\tau_1'' = \log\frac{\delta}{v-c}$$

enthält und welcher im Limes logarithmisch unendlich wird. Dieser Beitrag kann sich bei der Ausrechnung der rechten Seite von 48) gegen keinen der anderen Terme fortheben, da die noch hinzukommenden ferneren Beiträge, wie man leicht erkennt, durchaus endlich sind.

Wir haben also das Resultat, daß bei Oberflächenladung im Zeitpunkte t die zu einer Bewegung erforderliche Kraft $\mathfrak{F}$ notwendig unendlich (und zwar positiv unendlich im Sinne der Bewegungsrichtung $\mathfrak{v}_t$ gerechnet) wird, sobald während der unmittelbar vorhergehenden Zeitpunkte $t-\tau$ die Bewegung mit Ueberlichtgeschwindigkeit erfolgt ist, in dem Sinne, daß $T > c\tau$ war. Betrachten wir eine beschleunigte Bewegung, welche mit Unterlichtgeschwindigkeit anhebt, so kann dieselbe die Lichtgeschwindigkeit selbst noch mit endlichem Kraftaufwande erreichen (vgl. auch § 16). Denn

für das Gebiet $CD\,..\,\tau_2' < \tau < \tau_2''$, $S = \frac{\pi}{8}(r + T - c\tau + a)$,

„ „ „ $D\infty\,..\,\tau_2'' < \tau < \infty$, $S = 0$.

Aus den so bestimmten Werten von S folgen nach Division mit rT unmittelbar die auf pg. 373 angegebenen Werte von $\overline{\chi}$ und es sind die hier unter A), B), C), D) angeführten Definitionsgleichungen der Zeitpunkte $\tau_1', .. \tau_2''$ mit den Definitionsgleichungen 51) derselben identisch.

b) Von der in 50') definirten Größe $\overline{\chi}$ gehen wir über zu:

$$S = \frac{Ta^2\overline{\chi}}{9} = \int_0^\infty \left(\frac{\sin as - as\cos as}{as^2}\right)^2 \sin Ts \sin cs\tau \frac{ds}{s^2}.$$

Dieses Integral läßt sich auf das Integral (b) des § 8 zurückführen. Wir setzen in (b) $x = s$, $y = a$ und bilden zunächst:

$$(B) = \int_0^a (b)\, z\, dz = \int_0^\infty \left(\frac{\sin as - as\cos as}{as^2}\right)^2 \sin st \frac{ds}{s}.$$

Ersetzen wir dann noch in (B) die Größe t durch eine neue Integrationsvariable β, so wird ersichtlich:

$$S = \frac{1}{2}\int_{c\tau - T}^{c\tau + T} (B)\, d\beta.$$

Die Wertbestimmung von (b) war verschieden, je nachdem y die größte der drei Strecken y, z, t, also in unserer jetzigen Bezeichnung, je nachdem a die größte der drei Strecken a, z, β ist oder nicht. Da jedenfalls $a > z$ (vgl. die Integrationsgrenzen in (B)), so haben wir die beiden Fälle zu unterscheiden: $a > \beta$ und $a < \beta$. Außerdem wollen wir den letzteren Fall noch weiter zergliedern in $a < \frac{\beta}{2}$ und $\frac{\beta}{2} < a < \beta$.

Fall $a > \beta$. Dann gilt für $z < a - \beta$ (Dreieck a, z, β unmöglich):

$$(b) = \frac{\pi}{2}\frac{z\beta}{a^3},$$

und für $a - \beta < z < a$ (Dreieck a, z, β möglich):

$$(b) = \frac{\pi}{8}\left(1 - \frac{(z-\beta)^2}{a^2}\right)$$

Hieraus folgt:

$$(B) = \frac{\pi}{2}\frac{\beta}{a^3}\int_0^{a-\beta} z^2\, dz + \frac{\pi}{8}\int_{a-\beta}^a \left(1 - \frac{(z-\beta)^2}{a^2}\right) z\, dz$$

$$= \frac{\pi}{8}\left(\frac{4}{3}a\beta - \beta^2 + \frac{\beta^4}{12a^2}\right).$$

Um letzteres bequem entscheiden zu können, beziehen wir uns auf Fig. 3. In dieser haben wir nach der Abscissenrichtung die Länge $c\tau$, nach der Ordinatenrichtung die Integrationsvariable α aufgetragen; die Längen $0R$ und $0T$ der Ordinatenaxe sind gleich r und a gemacht, wobei, was erlaubt ist, $r > a$ gewählt wurde. Ferner sind in der Figur die Curven

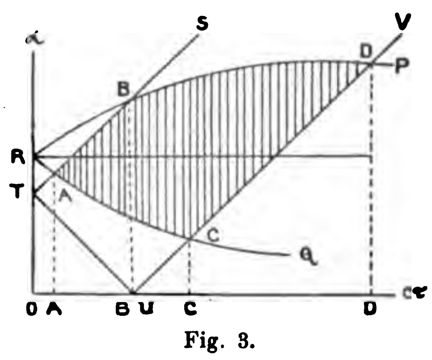


Fig. 3.

$$RP: \quad \alpha = r + T \quad \text{und} \quad RQ: \alpha = r - T$$

sowie die unter 45^0 gegen die Axen geneigten Geraden

$$ST: \alpha = a + c\tau, \quad TU: \alpha = a - c\tau, \quad UV: \alpha = -a + c\tau$$

construirt. Wegen $T < c\tau$ schneiden die Geraden ST und UV unsere Curve RP; die Schnittpunkte auf dieser Curve sind mit B, D, die auf RQ gelegenen mit A, C bezeichnet; dieselben Buchstaben mögen auch die zugehörigen Punkte der Abscissenaxe markiren, welche ersichtlich durch die folgenden Gleichungen bestimmt werden:

$$\begin{array}{llll} A) & r - T = c\tau + a & \text{woraus sich ergebe} & \tau = \tau_1', \\ B) & r + T = c\tau + a & \quad " & \tau = \tau_1'', \\ C) & r - T = c\tau - a & \quad " & \tau = \tau_2', \\ D) & r + T = c\tau - a & \quad " & \tau = \tau_2''. \end{array}$$

Man erkennt nun, daß für die Integration nach α nur das in der Figur schraffirte Gebiet in Betracht kommt, d. h. daß für jeden Wert von $c\tau$ die in diesem Gebiet enthaltene Strecke der zugehörigen Ordinatenrichtung das Integrationsintervall für α bestimmt. Denn es genügen nur die zu Punkten dieses Gebietes gehörigen α-Werte gleichzeitig der Bedingung der Dreiecksmöglichkeit $(r - T < \alpha < r + T)$ und der durch die Integrationsgrenzen von S festgelegten Beschränkung $(|a - c\tau| < \alpha < a + c\tau)$.

Da (a) im schraffirten Gebiet constant gleich $\pi/4$ ist, so ergiebt sich S gleich $\pi/8$ multiplicirt in das eben genannte Integrationsintervall, d. h.

für das Gebiet $0A \,..\, 0 < \tau < \tau_1'$, $S = 0$,

" " " $AB \,..\, \tau_1' < \tau < \tau_1''$, $S = \frac{\pi}{8}(a + c\tau - r + T)$,

" " " $BC \,..\, \tau_1'' < \tau < \tau_2'$, $S = \frac{\pi}{8} 2T$,

Man hat nun nach der Figur:

$$\text{für } 0 < \tau < \tau' \ldots S = \frac{\pi}{48} \int_{c\tau - T}^{c\tau + T} \left(4a\beta - 3\beta^2 + \frac{1}{4}\frac{\beta^4}{a^2}\right) d\beta,$$

$$\text{„ } \tau' < \tau < \tau'' \ldots S = \frac{\pi}{48} \int_{c\tau - T}^{2a} \left(4a\beta - 3\beta^2 + \frac{1}{4}\frac{\beta^4}{a^2}\right) \partial\beta$$

$$\text{„ } \tau'' < \tau < \infty \ldots S = 0.$$

Führen wir die Funktion ein:

$$f(x) = \int_{2a}^{x} \left(4a\beta - 3\beta^2 + \frac{1}{4}\frac{\beta^4}{a^2}\right) d\beta = \frac{1}{20}\frac{x^5}{a^2} - x^3 + 2ax^2 - \frac{8}{5}a^3$$

so können wir die vorhergehende Wertbestimmung von S bequemer so schreiben:

$$0 < \tau < \tau' \ldots S = \frac{\pi}{48}(f(c\tau + T) - f(c\tau - T)),$$

$$\tau' < \tau < \tau'' \ldots S = -\frac{\pi}{48} f(c\tau - T)$$

$$\tau'' < \tau < \infty \ldots S = 0,$$

was mit den pag. 377 für $\overline{\chi}$ gemachten Angaben übereinstimmt.

c) Um den in 59) definirten Vektor $\overline{\mathfrak{r}\chi}$ zu bestimmen, betrachten wir das Integral:

$$S = \int_0^\infty \frac{\sin sr - sr\cos sr}{sr} \frac{\sin sT - sT\cos sT}{sT} \sin as \sin cs\tau \frac{ds}{s^2},$$

welches mit $\mathfrak{T}/T^3$ multiplicirt jenem Vektor gleichkommt. Wir leiten S aus dem Integral (c) in § 8 ab. Setzen wir nämlich dort $x = s$, $y = r$, $z = T$ und führen wir statt t eine neue Integrationsvariable γ ein, so haben wir ersichtlich:

$$S = \frac{1}{2} \int_{|a - c\tau|}^{a + c\tau} (c)\, d\gamma.$$

Bei der Ausrechnung von S knüpfen wir an Fig. 3 an, in welcher uns der senkrechte Durchschnitt durch das schraffirte Gebiet wieder das für jeden Wert von $c\tau$ in Betracht kommende Integrationsintervall liefert. Nach § 8 hat dabei (c) in den Punkten des schraffirten Gebietes den Wert:

$$(c) = \frac{\pi}{8} \frac{r^2 + T^2 - \gamma^2}{rT}.$$

Wegen der Form des schraffirten Gebietes wären dabei zunächst wie unter a) die verschiedenen Teile OA, AB, ... der Ab-

scissenaxe zu unterscheiden und dementsprechend verschiedene Darstellungen für S zu berechnen, je nachdem τ liegt zwischen 0 und τ_1', zwischen τ_1' und τ_2'' etc. Indessen wurde bereits pag. 381 betont, daß für die Berechnung von $\mathfrak{R}$ diese Unterscheidung überflüssig ist und daß man bereits unter dem Integralzeichen $r = a$ setzen darf. Thun wir dieses, so fallen in Fig. 3 die Punkte A, B, R, T unter sich zusammen und wir haben nur die drei Fälle $0 < \tau < \tau'$, $\tau' < \tau < \tau''$, $\tau'' < \tau < \infty$ zu unterscheinen, unter τ', τ'' die in 52) definirten Zeitpunkte verstanden, die für $r = a$ aus τ_2' und τ_2'' hervorgehen. Nach der Fig. wird nun, wenn wir auch in den Ausdrücken von S und (c) nunmehr r durch a ersetzen:

$$\text{für } 0 < \tau < \tau' \ldots S = \frac{\pi}{16}\int_{a-T}^{a+T} \frac{a^2 + T^2 - \gamma^2}{aT}\,d\gamma = \frac{\pi}{12}\frac{T^3}{a},$$

$$\text{„} \quad \tau' < \tau < \tau'' \ldots S = \frac{\pi}{16}\int_{c\tau - a}^{a+T} \frac{a^2 + T^2 - \gamma^2}{aT}\,d\gamma =$$

$$\frac{\pi}{16}\,\frac{2(a^2 + T^2 - aT) - (c\tau - a)(c\tau + T)}{3aT}(2a + T - c\tau),$$

$$\text{„} \quad \tau'' < \tau < \infty \ldots S = 0.$$

Geht man von S zu $\overline{\mathfrak{r}\chi} = \mathfrak{T}S/T^3$ über, so erhält man die bereits pag. 382 angegebenen Werte.

d) Von dem in 59′) definirten Vektor $\overline{\mathfrak{r}\chi}$ spalten wir den Faktor $9\mathfrak{T}/aT^3$ ab und betrachten:

$$S = \int_0^\infty \left\{\ \right\} \frac{\sin as - as\cos as}{as}(\sin sT - sT\cos sT)\sin cs\tau\,\frac{ds}{s^4},$$

wo in der $\{\ \}$ der pag. 383 angegebene Ausdruck steht. Wir leiten S aus dem Integral (d) des § 8 ab und setzen zu dem Zwecke dort: $x = s$, $y = z = a$, $t = \vartheta$ (gleich einer neuen Integrationsvariabeln). Bilden wir zunächst eine Hülfsgröße:

$$(D) = \frac{1}{2}\int_{c\tau - u}^{c\tau + u}(d)\,d\vartheta = \int_0^\infty \left\{\ \right\} \frac{\sin as - as\cos as}{as}\sin su\sin cs\tau\,\frac{ds}{s^3},$$

so erkennen wir leicht, daß

$$S = \int_0^T (D)\,u\,du.$$

Nun ergiebt sich aus der früheren Wertbestimmung von (d) für $y = z = a$ und für $t = \vartheta$:

$$(d) = \frac{\pi}{16}\left\{\frac{3}{2} - \frac{\vartheta^2}{a^2} - \frac{(a - \vartheta^2)(3a + \vartheta)}{2a^4}\right\} \cdot\cdot \text{ wenn } \vartheta < 2a$$

$$(d) = 0 \ldots \text{ wenn } \vartheta > 2a.$$

Hieraus folgt der Wert von (D). Schreiben wir abkürzend:

$$g(x) = \int_{2a}^{x}\left\{\frac{3}{2}-\frac{\delta^2}{a^2}-\frac{(a-\delta)^2(3a+\delta)}{2a^4}\right\}d\delta = \frac{x^5}{10a^4}-\frac{4}{3}\frac{x^3}{a^2}+\frac{2x^2}{a}-\frac{8a}{15}$$

so wird:

$$\text{für } c\tau+u<2a\ldots(D) = \frac{\pi}{32}\int_{c\tau-u}^{c\tau+u}\left\{\frac{3}{2}-\frac{\delta^2}{a^2}-\frac{(a-\delta)^2(3a+\delta)}{2a^4}\right\}d\delta$$

$$= \frac{\pi}{32}(g(c\tau+u)-g(c\tau-u)),$$

$$\text{„ } c\tau-u<2a<c\tau+u\ldots(D) = \frac{\pi}{32}\int_{c\tau-u}^{2a}\left\{\frac{3}{2}-\frac{\delta^2}{a^2}-\frac{(a-\delta)^2(3a+\delta)}{2a^4}\right\}d\delta$$

$$= -\frac{\pi}{32}g(c\tau-u),$$

$$\text{„ } 2a<c\tau-u\ldots(D) = 0.$$

Hierfür können wir kürzer schreiben:

$$(D) = (D_1)-(D_2)$$

$$(D_1) = \frac{\pi}{32}g(c\tau+u) \text{ oder } (D_1)=0, \text{ je nachdem } c\tau+u<2a \text{ oder } >2a,$$

$$(D_2) = \frac{\pi}{32}g(c\tau-u) \text{ „ } (D_2)=0, \text{ „ „ „ } c\tau-u<2a \text{ „ } >2a.$$

Dementsprechend werden wir auch setzen:

$$S = S_1-S_2,\ S_1 = \int_0^T(D_1)u\,du,\ S_2 = \int_0^T(D_2)u\,du$$

Führen wir nun in S_1 bez. S_2 statt u die neue Variable:

$$v = c\tau+u \quad \text{bez.} \quad v = c\tau-u$$

ein, so wird:

$$S_1 = \frac{\pi}{32}\int g(v)(v-c\tau)dv,\ S_2 = \frac{\pi}{32}\int g(v)(v-c\tau)dv.$$

Die Integration in S_1 ist zu erstrecken von $v = c\tau$ bis $v = c\tau+T$, falls $c\tau+T<2a$, sonst von $v = c\tau$ bis $v = 2a$. Dies entspricht gerade dem Teile OAC des in Fig. 4 schraffirten Gebietes. Andrerseits ist die Integration in S_2 zu erstrecken von $v = c\tau$ bis $v = c\tau-T$, falls $c\tau<2a$ und also auch $v = c\tau-u<2a$, im anderen Falle von $v = 2a$ bis $v = c\tau-T$. Diese Integrationsvorschrift entspricht gerade dem Teile OCB des in Fig. 4 schraffirten Gebietes, wobei aber die Integration im Sinne der abnehmenden Ordinaten v, von dem oberen Rande OCB nach dem unteren OB hin zu erstrecken ist. Die Differenz $S_1-S_2 = S$ wird daher

gefunden, indem wir das Integral

$$\int g(v)(v-c\tau)\,dx$$

in Fig. 4 bei jedem Werte von $c\tau$ über den zur Abscisse $c\tau$ gehörigen senkrechten Durchschnitt durch das schraffirte Gebiet im Sinne der wachsenden v erstrecken.

Daraus ergiebt sich unmittelbar die folgende Wertbestimmung von S, welche mit den pag. 383 für $\overline{\mathfrak{r}\chi}$ gemachten Angaben übereinstimmt: Es sei

$$G(x) = \int_{2a}^{x} g(v)(v-c\tau)\,dv;$$

dann gilt:

$$\text{für } 0 < \tau < \tau' \ldots S = \frac{\pi}{32}\left(G(c\tau+T) - G(c\tau-T)\right)$$

$$\text{„ } \tau' < \tau < \tau'' \ldots S = -\frac{\pi}{32} G(c\tau - T)$$

$$\text{„ } \tau'' < \tau < \infty \ldots S = 0.$$

e) Wir wollen jetzt die beschränkende Bedingung $T < c\tau$ fallen lassen, welche stets erfüllt war, wenn keine Ueberlichtgeschwindigkeiten vorkommen. Demgegenüber kann jetzt T ganz beliebig sein, so daß wir weder Ueberlichtgeschwindigkeit noch einen Durchgang durch die Lichtgeschwindigkeit ausschließen.

Ohne irgend welche Umstände ist dies bei den Betrachtungen unter a) und b) möglich. Wir bemerken, daß in den dortigen beiden Integralen S die Größen T und $c\tau$ symmetrisch vorkommen und daß eine Unsymmetrie zwischen T und $c\tau$ in den Endwerten von S nur dadurch zu Stande kommen konnte, daß wir unter a) und b) mit der Voraussetzung $T < c\tau$ operirten. Indem wir nun die Größen T und $c\tau$ mit einander vertauschen, geht die bisherige Voraussetzung $T < c\tau$ in ihr Gegenteil über. Die zugehörigen Endwerte von S müssen dann ebenfalls durch Vertauschung von T und $c\tau$ aus den früheren hervorgehen.

Wir schreiben das Ergebnis mit Benutzung des Zeichens $|\;|$ des absoluten Betrages sogleich so, daß es auch den früheren Fall $T < c\tau$ mit umfaßt; dabei ist dieses Zeichen nicht nur in den Werten von S selbst, sondern auch in den Definitionsgleichungen τ'', τ_1'' etc. zu verwenden. Das Ergebnis lautet bei dem unter a) betrachteten Integral S:

$$\text{für } 0 < \tau < \tau_1' \text{ wird } S = 0,$$

$$\text{„ } \tau_1' < \tau < \tau_1'' \text{ „ } S = \frac{\pi}{8}(c\tau + T + a - r),$$

$$\text{„ } \tau_1'' < \tau < \tau_2' \text{ „ } S = \frac{\pi}{8}(c\tau + T - |c\tau - T|),$$

$$\text{für } \tau_2' < \tau < \tau_2'' \quad „ \quad S = \frac{\pi}{8}(a + r - |c\tau - T|),$$
$$„ \quad \tau_2'' \leq \tau < \infty \quad „ \quad S = 0.$$

Die Bedeutung der Grenzwerte $\tau_1', \ldots$ ist dabei allgemein aus den folgenden Gleichungen zu entnehmen:

$$\begin{aligned} \tau_1') \ldots\ c\tau + T &= r - a, \\ \tau_1'') \ldots |c\tau - T| &= r - a, \\ \tau_2') \ldots\ c\tau + T &= r + a, \\ \tau_2'') \ldots |c\tau - T| &= r + a. \end{aligned}$$

Entsprechend modificirt sich das Resultat unter b). Es gilt allgemein:

$$\text{für } 0 < \tau < \tau' \ldots S = \frac{\pi}{48}\{f(c\tau + T) - f(|c\tau - T|)\},$$
$$„ \quad \tau' < \tau < \tau'' \ldots S = -\frac{\pi}{48} f(|c\tau - T|),$$
$$„ \quad \tau'' < \tau < \infty \ldots S = 0;$$

dabei bestimmen sich τ', τ'' aus den Gleichungen:

$$\tau') \ldots c\tau + T = 2a, \quad \tau'') \ldots |c\tau - T| = 2a.$$

Noch sei hervorgehoben, obwohl es für das Folgende belanglos ist, daß sowohl bei Unter- wie bei Ueberlichtgeschwindigkeit mehrere Wurzeln der die Grenzen $\tau', \tau'', \tau_1', \ldots$ definirenden Gleichungen vorkommen können, falls die Bewegung sehr schnell veränderlich ist. Man erkennt aus den Figuren dieses Paragraphen leicht, daß dann bei der Wertbestimmung von S weitere Intervalle der Variabeln $c\tau$ zu unterscheiden und bei der Berechnung von $\mathfrak{F}$ weitere Integrale zwischen den Wurzeln der genannten Gleichungen hinzuzufügen sind.

§ 15. *Geradlinige Bewegung im Allgemeinen. Stationäre Bewegung bei Unter- und Ueberlichtgeschwindigkeit.*

Wir wollen hier die beträchtlichen Vereinfachungen zusammenstellen, die an den allgemeinen Formeln anzubringen sind, wenn die Bewegung im Besonderen geradlinig erfolgt. Da hierbei $\mathfrak{v}_t$, $\mathfrak{v}_{t-\tau}$ und $\mathfrak{T}$ die unveränderliche Richtung der Bewegung haben, so fällt nach (54) und (54') auch $\mathfrak{F}$ in diese Richtung. Indem wir dieses im Gedächtnis behalten, können wir v und T statt $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{T}$ schreiben. Während man bei allgemeiner Bewegung hat

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{(\mathfrak{T}\mathfrak{v}_t) - (\mathfrak{T}\mathfrak{v}_{t-\tau})}{T}, \quad \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{(\mathfrak{T}\mathfrak{v}_{t-\tau})}{T},$$
$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{(\mathfrak{T}\mathfrak{v}_t)}{T},$$

dürfen wir bei geradliniger Bewegung einfacher setzen:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = v_t - v_{t-\tau}, \quad \frac{\partial T}{\partial \tau} = v_{t-\tau}, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial \tau} = v_t.$$

a) Oberflächenladung. Unter dem Integralzeichen in Gl. (54) können wir nun schreiben:

$$63) \qquad -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathfrak{v}_{t-\tau}}{T} = +\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{v_{t-\tau}}{T} + \frac{v_t v_{t-\tau}}{T^2}.$$

Hier hebt sich das letzte Glied der rechten Seite gegen das in (54) enthaltene, bei geradliniger Bewegung gleichlautende Glied:

$$-(\mathfrak{v}_t \mathfrak{v}_{t-\tau})\frac{\mathfrak{T}}{T^3} = -\frac{v_t v_{t-\tau}}{T^2}.$$

Unser Integral wird daher:

$$c^2 \int_{\tau'}^{\tau''} \frac{c\tau - 2a}{T^3}\, d\tau + \int_{\tau'}^{\tau''} (c\tau - 2a)\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{v_{t-\tau}}{T}\, d\tau.$$

Der zweite Bestandteil läßt sich durch partielle Integration umformen, wobei zu beachten ist, daß nach (52)

$$\frac{c\tau'' - 2a}{T''} = +1, \quad \frac{c\tau' - 2a}{T'} = -1$$

und daß nach Obigem

$$\frac{v_{t-\tau}}{T} = \frac{\partial}{\partial \tau}\log T;$$

es ergiebt sich:

$$\int_{\tau'}^{\tau''} (c\tau - 2a)\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{v_{t-\tau}}{T}\, d\tau = v_{t-\tau''} + v_{t-\tau'} - c\log\frac{T''}{T'}.$$

Fassen wir alles zusammen, so können wir statt (54) bei geradliniger Bewegung schreiben:

$$64) \qquad \frac{-16\pi a^2}{\varepsilon^2}\mathfrak{F} = -\frac{c^2}{v_t^2}\log\frac{c+v_t}{c-v_t} + \log\left\{\frac{c+v_t}{c-v_t}\frac{T'}{T''}\right\} + \frac{2c}{v_t} + c\int_{\tau'}^{\tau''}\frac{c\tau - 2a}{T^3}\, d\tau$$

b) Volumladung. An Stelle von (63) benutzen wir hier zur Vereinfachung die folgende Gleichung, die sich aus den am Anfange dieses Paragraphen angegebenen Beziehungen für $\partial T/\partial t$ und $\partial T/\partial \tau$ leicht beweisen läßt:

$$63') \qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathfrak{v}_{t-\tau} f}{T} = v_t v_{t-\tau}\frac{\partial}{\partial T}\frac{f}{T} - \frac{\partial}{\partial \tau}v_{t-\tau}\frac{f}{T} \pm \frac{c v_{t-\tau}}{T}\frac{\partial f}{\partial T};$$

dabei ist in dem letzten Gliede das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen, je nachdem das Argument von f gleich $c\tau + T$, oder gleich $c\tau - T$ bez., wie wir der Allgemeinheit wegen lieber sagen wollen, gleich $|c\tau - T|$ ist.

Setzen wir dies in die allgemeingültige Gl. (62) ein, so hebt sich das erste Glied der rechten Seite von (63') gegen das in (62) vorkommende Glied:

$$-\frac{\mathfrak{T}}{T}(\mathfrak{v}_t \mathfrak{v}_{t-\tau})\frac{\partial}{\partial T}\frac{f}{T} = -v_t v_{t-\tau}\frac{\partial}{\partial T}\frac{f}{T}.$$

In dem zweiten Gliede der rechten Seite von (63') läßt sich die Integration nach τ ausführen. Dasselbe liefert zu $\mathfrak{F}$ die folgenden Beiträge:

$$-\int_0^{\tau'}\frac{d}{d\tau}v_{t-\tau}\frac{f(c\tau+T)}{T}d\tau + \int_0^{\tau''}\frac{d}{d\tau}v_{t-\tau}\frac{f(|c\tau-T|)}{T}d\tau$$
$$= \left[v_{t-\tau}\frac{f(|c\tau-T|)}{T}\right]_0^{\tau''} - \left[v_{t-\tau}\frac{f(c\tau+T)}{T}\right]_0^{\tau'}.$$

An der oberen Grenze τ'' und τ' wird das Argument von f in beiden Teilen dieses Ausdrucks gleich $2a$ (Gl. (62')) und es ist $f(2a)$ nach der Definition von f in § 14*b*) gleich Null. An der unteren Grenze 0 wird jeder der beiden Teile wegen des Nenners T unendlich groß, aber in solcher Weise, daß ihre Differenz verschwindet (man vgl. die Bedeutung von $f(x)$ in § 14 b) und berücksichtige insbesondere, daß das Glied mit der ersten Potenz von x in f fehlt). Somit liefert das zweite Glied der rechten Seite von (63') keinen Beitrag zu $\mathfrak{F}$, wenn wir, wie es durch die Schlußbemerkung zu § 11 vorgeschrieben wurde, die beiden genannten Teile richtig zusammenfassen.

Das dritte Glied in (63') vereinigen wir mit dem Gliede

$$\frac{\mathfrak{T}}{T}c^2\frac{\partial}{\partial T}\frac{f}{T} = \frac{c^2}{T}\frac{\partial f}{\partial T} - \frac{c^2}{T^2}f$$

in Gl. (62) und erhalten nach Division mit c:

$$64') \quad -\frac{32\pi a^4}{3\varepsilon^2}\mathfrak{F} = \int_0^{\tau'}\left\{\frac{c+v_{t-\tau}}{T}\frac{\partial f(c\tau+T)}{\partial T} - \frac{c}{T^2}f(c\tau+T)\right\}d\tau$$
$$-\int_0^{\tau''}\left\{\frac{c-v_{t-\tau}}{T}\frac{\partial f(|c\tau-T|)}{\partial T} - \frac{c}{T^2}f(|c\tau-T|)\right\}d\tau.$$

Wir machen eine Anwendung dieser Formeln auf den einfachsten Fall der stationären Bewegung. Hier ist

$$v_t = v_{t-\tau} = v, \quad T = v\tau,$$

$$\tau' = \frac{2a}{c+v}, \; \tau'' = \frac{2a}{|c-v|}, \; T' = \frac{2av}{c+v}, \; T'' = \frac{2av}{|c-v|}.$$

Bei Oberflächenladung müssen wir uns nach § 13 auf Unterlichtgeschwindigkeit beschränken; bei Volumladung werden wir dagegen die stationäre Bewegung mit Unter- und Ueberlichtgeschwindigkeit gesondert zu untersuchen haben.

c) Oberflächenladung, Unterlichtgeschwindigkeit. Von den vier Termen der rechten Seite von (64) verschwindet der zweite; der vierte ergiebt:

$$\frac{c}{v^2}\int_{\tau'}^{\tau''}\left(\frac{c}{\tau} - \frac{2a}{\tau^2}\right)d\tau =$$

$$\frac{c^2}{v^2}\log\frac{\tau''}{\tau'} + \frac{2ac}{v^2}\left(\frac{1}{\tau''} - \frac{1}{\tau'}\right) = \frac{c^2}{v^2}\log\frac{c+v}{c-v} - \frac{2c}{v};$$

er hebt sich also gegen den ersten und dritten Term in (64) und es ergiebt sich $\mathfrak{F} = 0$, d. h. das wohlbekannte Resultat: die stationäre Translation ist bei Unterlichtgeschwindigkeit eine mögliche kräftefreie Bewegung des Elektrons.

d) Volumladung, Unterlichtgeschwindigkeit. Wie mehrfach hervorgehoben, sind die beiden Integrationen in (64′) zusammenzufassen, da jede von ihnen bei $\tau = 0$ divergiren würde. Wollen wir sie gesondert ausführen, was hier bequemer ist, so müssen wir von f den für $\tau = 0$ nicht verschwindenden Teil abspalten. Wir setzen etwa (vgl. Gl. (51′)):

$$f(x) = -\frac{8}{5}a^3 + x^2\varphi(x), \quad \varphi(x) = 2a - x + \frac{1}{20}\frac{x^3}{a^2}.$$

Der constante Teil von f giebt folgenden Beitrag zur rechten Seite von (64′):

$$-\frac{8}{5}a^3 c\int_{\tau'}^{\tau''}\frac{d\tau}{T^2} = -\frac{8}{5}\frac{a^3 c}{v^2}\int_{\tau'}^{\tau''}\frac{d\tau}{\tau^2} = -\frac{8}{5}\frac{c}{v}a^2.$$

Sodann führen wir in dem ersten bezw. zweiten Integral von (64′) als neue Integrationsvariable ein:

$$x = c\tau + T = (c+v)\tau \text{ bez. } x = c\tau - T = (c-v)\tau.$$

Beide Variable x laufen dann nach Definition der Grenzen τ', τ'' von 0 bis $2a$ und es wird im ersten Integral:

$$\frac{\partial f(c\tau+T)}{\partial T} = 2x\,\varphi(x) + x^2\frac{d\varphi(x)}{dx},\quad d\tau = \frac{dx}{c+v},$$

im zweiten Integral:

$$\frac{\partial f(c\tau-T)}{\partial T} = -2x\,\varphi(x) - x^2\frac{d\varphi(x)}{dx},\quad d\tau = \frac{dx}{c-v}.$$

Der variable Teil von f liefert daher zur rechten Seite von (64') den Beitrag:

$$\begin{aligned}
&\frac{c+v}{v}\int_0^{2a}\left(2\varphi(x)+x\frac{d\varphi}{dx}\right)dx - \frac{c(c+v)}{v^2}\int_0^{2a}\varphi(x)\,dx\\
&+\frac{c-v}{v}\int_0^{2a}\left(2\varphi(x)+x\frac{d\varphi}{dx}\right)dx + \frac{c(c-v)}{v^2}\int_0^{2a}\varphi(x)\,dx\\
&= \frac{2c}{v}\int_0^{2a}\left(2\varphi(x)+x\frac{d\varphi}{dx}\right)dx - \frac{2c}{v}\int_0^{2a}\varphi(x)\,dx\\
&= \frac{2c}{v}\int_0^{2a}\frac{d}{dx}\{x\varphi(x)\}\,dx = \frac{4ac}{v}\,\varphi(2a) = \frac{8}{5}\frac{c}{v}a^2.
\end{aligned}$$

Dieser Beitrag hebt sich gegen denjenigen des constanten Teiles von f. Wir haben also wieder $\mathfrak{F} = 0$ und das unter c) ausgesprochene Resultat.

e) Volumladung, Ueberlichtgeschwindigkeit. Der constante Teil von f liefert mit Rücksicht auf die veränderte Bedeutung von $\tau'' = 2a/(v-c)$ zur rechten Seite von (64') den Beitrag:

$$-\frac{8}{5}\frac{a^2c}{v^2}\int_{\tau'}^{\tau''}\frac{d\tau}{\tau^2} = -\frac{8}{5}\frac{c^2}{v^2}a^2.$$

Was den variabeln Teil betrifft, so setzen wir in dem ersten bezw. zweiten Integral von (64'):

$$x = c\tau + T = (c+v)\tau \text{ bez. } x = |c\tau - T| = T - c\tau = (v-c)\tau,$$

so daß beide Variable x wieder von 0 bis $2a$ laufen. Man hat nun im ersten Integral wie unter d):

$$\frac{\partial f(c\tau+T)}{\partial T} = 2x\,\varphi(x) + x^2\frac{d\varphi(x)}{dx},\quad d\tau = \frac{dx}{c+v},$$

im zweiten Integral im Gegensatz zu d):

$$\frac{\partial f(T-c\tau)}{\partial T} = 2x\,\varphi(x) + x^2\frac{d\varphi(x)}{dx},\quad d\tau = \frac{dx}{v-c}.$$

Der Beitrag des variabeln Teiles von f lautet daher:

$$\frac{c+v}{v}\int_0^{2a}\left(2\varphi + x\frac{d\varphi}{dx}\right)dx - \frac{c(c+v)}{v^2}\int_0^{2a}\varphi\,dx$$
$$-\frac{c-v}{v}\int_0^{2a}\left(2\varphi + x\frac{d\varphi}{dx}\right)dx + \frac{c(v-c)}{v^2}\int_0^{2a}\varphi\,dx;$$

der Unterschied gegen die entsprechende Gleichung unter *d*) besteht darin, daß die zweite Zeile das umgekehrte Vorzeichen hat, wie dort. Wir erhalten von hieraus für den fraglichen Beitrag weiter:

$$2\int_0^{2a}\left(2\varphi + x\frac{d\varphi}{dx}\right)dx - \frac{2c^2}{v^2}\int_0^{2a}\varphi\,dx =$$
$$2\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right)\int_0^{2a}\varphi\,dx + 2\int_0^{2a}\frac{d}{dx}\{x\varphi\}\,dx$$

oder mit Rücksicht auf die Bedeutung von φ:

$$\frac{22}{5}a^2\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right)+\frac{8}{5}a^2.$$

Fügen wir den Beitrag des constanten Teiles von f hinzu, so wird nach Gl. (64'):

$$-\frac{32\varkappa a^4}{3\varepsilon^2}\mathfrak{F} = 6a^2\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right),$$

also:

65) $$-\mathfrak{F} = \frac{9\varepsilon^2}{16\varkappa a^2}\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right).$$

Die gleichförmige Bewegung mit Ueberlichtgeschwindigkeit ist keine mögliche kräftefreie Bewegung des Elektrons. Es muß vielmehr nach Gl. (45') eine äußere Kraft $\mathfrak{F}_a$ zur Verfügung stehn, welche $\mathfrak{F}$ das Gleichgewicht hält, wenn anders die gleichförmige Bewegung mit Ueberlichtgeschwindigkeit Bestand haben soll. Da $\mathfrak{F}+\mathfrak{F}_a = 0$ sein soll, so wird $\mathfrak{F}_a = -\mathfrak{F}$ ebenfalls durch (65) bestimmt.

Der Richtung nach fällt diese äußere Kraft in die Translationsrichtung des Elektrons. Was ihre Größe betrifft, so bemerken wir, daß sich dieselbe für $v = c$ stetig an den bei Unterlichtgeschwindigkeit geltenden Wert $\mathfrak{F} = 0$ anschließt, (vgl. Fig. 5), und daß sie sich mit wachsendem v dem

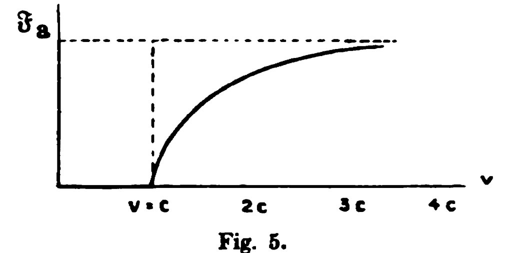


Fig. 5.

Werte

$$\frac{9}{4}\frac{\varepsilon^2}{4\pi a^2}.$$

asymptotisch annähert. Letztere Größe ist gleich der elektrostatischen Coulomb'schen Abstoßung zweier im Abstande a befindlicher Punktladungen von dem Betrage $3\varepsilon/2$.

§ 16. *Quasistationäre geradlinige Bewegung, elektromagnetische Masse.*

Unter quasistationärer Bewegung versteht man eine solche, die sich von der stationären nur wenig unterscheidet. Wir haben zunächst diese allgemeine Aussage für den Fall der geradlinigen quasistationären Bewegung zu verschärfen.

Bedeuten v und p ohne Index die Geschwindigkeit und Beschleunigung zur Zeit t, so wird für eine frühere Zeit $t-\tau$:

66) $$v_{t-\tau} = v - p\tau + \cdots$$

Wir nehmen nun an, daß schon das Glied $p\tau$ und um so mehr die nicht hingeschriebenen, mit den Differentialquotienten von p behafteten Glieder klein gegen v sind für alle in Betracht kommenden Werte der Integrationsvariabeln τ. Indem wir auf den größten Wert τ'' von τ achten und für diesen in erster Näherung den bei der stationären Bewegung gültigen Wert $\frac{2a}{|c-v|}$ einsetzen, präcisiren wir unsere Voraussetzung so:

$$\frac{2ap}{|c-v|} \text{ klein gegen } v$$

oder

$$\frac{2ap}{v^2} \text{ klein gegen } \frac{|c-v|}{v}.$$

Je mehr sich also v der Lichtgeschwindigkeit nähert, um so mehr ist die Größe von p zu beschränken, damit die Bewegung noch als quasistationär behandelt werden kann. Wenn v beträchtlich von c verschieden ist, z. B. $v = c/2$, so genügt es, daß

$$\frac{2ap}{v^2} \text{ klein gegen } 1.$$

Es bedeutet aber $2a/v$ die Zeit, während welcher das Elektron mit der Geschwindigkeit v um seinen Durchmesser fortrückt und daher $2ap/v = \Delta v$ die Geschwindigkeitsänderung während dieser Zeit. Unsere vorstehende Bedingung verlangt also, wenn v wesentlich von c verschieden ist, lediglich

$$\Delta v \text{ klein gegen } v.$$

Der Begriff der quasistationären Bewegung ist hiernach ein sehr weiter; er umfaßt, wenn v nicht nahezu gleich c ist, alle Fälle von nicht extravaganter Beschleunigung.

Wir berechnen nun:

66') $$T = \int_{t-\tau}^{t} v_u du = v\tau - \frac{p}{2}\tau^2, \quad \frac{1}{T} = \frac{1}{v\tau}\left(1 + \frac{p\tau}{2v}\right)$$

und bestimmen die Grenzen τ', τ'' unter der Voraussetzung $v < c$ aus den Gleichungen:

$$c\tau' + v\tau' - \frac{p}{2}\tau'^2 = 2a, \qquad c\tau'' - v\tau'' + \frac{p}{2}\tau''^2 = 2a,$$

aus welchen sich in erster Näherung die bei stationärer Bewegung gültigen Werte:

67) $$\tau' = \frac{2a}{c+v}, \; \tau'' = \frac{2a}{c-v}, \; T' = \frac{2av}{c+v}, \; T'' = \frac{2av}{c-v}$$

ergeben; indem wir diese in das mit p behaftete kleine [1]) Glied der vorstehenden Gleichungen einsetzen, finden wir leicht in zweiter Näherung:

68) $$\tau' = \frac{2a}{c+v}\left(1 + \frac{ap}{(c+v)^2}\right), \; \tau'' = \frac{2a}{c-v}\left(1 - \frac{ap}{(c-v)^2}\right).$$

Die entsprechenden Werte von T sind $T' = 2a - c\tau'$, $T'' = -2a + c\tau''$, d. h.:

68') $$T' = \frac{2av}{c+v}\left(1 - \frac{acp}{v(c+v)^2}\right), \; T'' = \frac{2av}{c-v}\left(1 - \frac{acp}{v(c-v)^2}\right).$$

Bei Ueberlichtgeschwindigkeit $v > c$ sind, während τ' und T' ersichtlich die vorstehenden Werte behalten, τ'' und T'' folgendermaßen zu bestimmen:

68'') $$\tau'' = \frac{2a}{v-c}\left(1 + \frac{ap}{(v-c)^2}\right), \; T'' = \frac{2av}{v-c}\left(1 + \frac{acp}{v(v-c)^2}\right)$$

Zur Abkürzung der Formeln führen wir die beiden dimensionslosen Zahlen ein:

69) $$\beta = \frac{v}{c}, \; \gamma = \frac{2ap}{c^2}.$$

---

1) Damit das genannte Glied in der Gleichung für τ'' thatsächlich relativ klein sei gegen die anderen Glieder der linken Seite, müssen wir allgemein verlangen:

$$\frac{p}{2}\tau'' \text{ klein gegen } c - v \text{ oder } \frac{ap}{v^2} \text{ klein gegen } \left(\frac{c-v}{v}\right)^2;$$

hierdurch wird unsere ursprüngliche Forderung, in ihrer Anwendung auf die Umgebung der Lichtgeschwindigkeit, noch weiter verschärft.

a) Oberflächenladung, Unterlichtgeschwindigkeit. Auf der rechten Seite von (64) lauten die drei ersten Terme, in den Abkürzungen β und γ geschrieben:

$$-\frac{1}{\beta^2}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}+\log\left(1-\frac{\gamma}{2\beta(1+\beta)^2}\right)-\log\left(1-\frac{\gamma}{2\beta(1-\beta)^2}\right)+\frac{2}{\beta}$$

oder, sofern γ als kleine Größe behandelt wird:

$$\frac{2\gamma}{(1-\beta^2)^2}-\frac{1}{\beta^2}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{2}{\beta}. \tag{70}$$

Der vierte Term von (64) wird wegen (66'):

$$\frac{1}{\beta^2}\int_{\tau'}^{\tau''}\left(\frac{1}{\tau}-\frac{2a}{c\tau^2}\right)\left(1+\frac{p\tau}{v}\right)d\tau.$$

Multipliciren wir aus, so dürfen wir in den mit p behafteten kleinen Gliedern für τ', τ'' die ersten Näherungen (67) einsetzen. Wir erhalten so:

$$\frac{\gamma}{\beta^2}\left(\frac{2}{1-\beta^2}-\frac{1}{\beta}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right). \tag{70'}$$

Dagegen müssen wir in den von p freien Gliedern genauer rechnen und die zweiten Näherungen (68) benutzen. Hieraus entspringt:

$$\frac{1}{\beta^2}\left(\log\frac{1+\beta}{1-\beta}-\frac{\gamma(1+\beta^2)}{(1-\beta^2)^2}-\left(2\beta-\frac{\gamma}{(1-\beta^2)}\right)\right). \tag{70''}$$

Wie man sieht, ist (70'') mit (70) entgegengesetzt gleich. Es bleibt daher auf der rechten Seite von (64) nur der Ausdruck (70') übrig und man erhält:

$$-\frac{16\pi a^2}{\varepsilon^2}\mathfrak{F}=\gamma\left(\frac{2}{\beta^2(1-\beta^2)}-\frac{1}{\beta^3}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right),$$

oder

$$-\mathfrak{F}=\frac{\varepsilon^2}{8\pi ac^2}\left(\frac{2}{\beta^2(1-\beta^2)}-\frac{1}{\beta^3}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)p. \tag{71}$$

Den Faktor von p in dieser Gleichung nennen wir mit Lorentz elektromagnetische Masse oder mit Abraham specieller longitudinale elektromagnetische Masse. Er beträgt:

$$\mu=\frac{\varepsilon^2}{8\pi ac^2}\left(\frac{2}{\beta^2(1-\beta^2)}-\frac{1}{\beta^3}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right). \tag{71'}$$

Der Sinn dieser Bezeichnung ergiebt sich unmittelbar daraus, daß unsere quasistationäre Bewegung keine mögliche kräftefreie Bewegung ist, weil bei ihr nicht $\mathfrak{F}=0$ ist, daß sie vielmehr eine

äußere Kraft $\mathfrak{F}_a$ erfordert, von solcher Größe, daß

$$\mathfrak{F} + \mathfrak{F}_a = 0 \text{ oder } \mathfrak{F}_a = -\mathfrak{F} = \mu p.$$

Bei quasistationärer Bewegung gilt also, wie in der gewöhnlichen Mechanik, Proportionalität zwischen Kraft und Beschleunigung. Es liegt aber auf der Hand, daß diese Proportionalität nur eine näherungsweise, durch Vernachlässigung der höheren Potenzen und Differentialquotienten von p hervorgerufene ist. Auch das Unendlichwerden von μ für $\beta = 1$ ist nur durch diese Vernachlässigung verschuldet (vgl. hierzu § 17); überhaupt ist die Anwendung unserer Formeln auf die Umgebung von $\beta = 1$ unerlaubt, weil wir der zu Anfang dieses Paragraphen oder der in der Anm. zu pg. 403 ausgesprochenen Bedingung der quasistationären Bewegung in der unmittelbaren Nähe von $\beta = 1$ durch keinen noch so kleinen Wert von γ genügen können.

b) Volumladung, Unterlichtgeschwindigkeit. Wir haben die rechte Seite von (64′) für die bei quasistationärer Bewegung gültigen Werte von v, $T\ldots$ auszurechnen. Wie im vorigen Paragraphen spalten wir von f den constanten Teil ab und setzen: $f(x) = -\frac{8}{5}a^2 + x^2\varphi(x)$. Der constante Teil liefert dann zur rechten Seite von (64′) den Beitrag (vgl. (66′)):

$$-\frac{8}{5}a^2c\int_{\tau'}^{\tau''}\frac{d\tau}{T^2} = -\frac{8}{5}\frac{a^2c}{v^2}\int_{\tau'}^{\tau''}\left(1+\frac{p\tau}{v}\right)\frac{d\tau}{\tau^2}.$$

Indem wir in dem mit p behafteten Gliede die Werte (67) für τ', τ'', in dem von p freien Gliede die genaueren Werte (68) benutzen, entsteht:

$$72) \qquad -\frac{4}{5}\frac{a^2c}{v}\left(2 - \frac{\gamma}{\beta(1-\beta^2)} + \frac{\gamma}{\beta^2}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)$$

Wir berechnen darauf das erste Integral der rechten Seite von (64′) für den variabeln Teil von f. Führen wir als neue Integrationsvariable ein $x = c\tau + T$, so finden wir mit Rücksicht auf (66) und (66′), indem wir fortgesetzt die mit p behafteten Glieder als kleine Größen behandeln:

$$d\tau = \frac{dx}{c+v}\left(1+\frac{px}{(c+v)^3}\right),\quad \frac{c+v_{t-\tau}}{T} = \frac{(c+v)^2}{vx}\left(1-\frac{px}{2v}\frac{2v-c}{(c+v)^3}\right),$$

$$\frac{c}{T^2} = \frac{c(c+v)^2}{v^2x^2}\left(1+\frac{pcx}{v(c+v)^3}\right),\quad \frac{\partial f(c\tau+T)}{\partial T} = 2x\varphi + x^2\frac{d\varphi}{dx};$$

unser erstes Integral wird daher:

$$\text{72}')\quad \begin{aligned}&\frac{c+v}{v}\int_0^{2a}\left(1+\frac{p\,c\,x}{2v\,(c+v)^2}\right)\left(2\varphi+x\frac{d\varphi}{dx}\right)dx\\ &-\frac{c\,(c+v)}{v^2}\int_0^{2a}\left(1+\frac{p\,x}{v\,(c+v)}\right)\varphi\,dx.\end{aligned}$$

In entsprechender Weise behandelt, giebt das zweite Integral der rechten Seite von (64′) mit $x = c\tau - T$:

$$\text{72}'')\quad \begin{aligned}&-\frac{c-v}{v}\int_0^{2a}\left(1+\frac{p\,c\,x}{2v\,(c-v)^2}\right)\left(2\varphi+x\frac{d\varphi}{dx}\right)dx\\ &-\frac{c\,(c-v)}{v^2}\int_0^{2a}\left(1+\frac{p\,x}{v\,(c-v)}\right)\varphi\,dx.\end{aligned}$$

Indem wir die Differenz beider bilden, sondern wir die von p freien Glieder von den mit p behafteten und erhalten:

$$\begin{aligned}\frac{2c}{v}\int_0^{2a}\left(\varphi+x\frac{d\varphi}{dx}\right)dx+\frac{p\,c^2}{v^2(c^2-v^2)}\int_0^{2a}\left(2x\varphi+x^2\frac{d\varphi}{dx}\right)dx\\ =\frac{2c}{v}\left[x\varphi\right]_0^{2a}+\frac{p\,c^2}{v^2(c^2-v^2)}\left[x^2\varphi\right]_0^{2a},\end{aligned}$$

d. h.:

$$\text{73)}\qquad \frac{8}{5}\,\frac{a^2c}{v}+\frac{8}{5}\,\frac{a^2c^2p}{v^2(c^2-v^2)}\,.$$

Das erste dieser Glieder hebt sich gegen das erste Glied von (72), wie es zu erwarten war, weil $\mathfrak{F}$ mit verschwindendem p selbst verschwinden muß. Führen wir im zweiten dieser Glieder die Abkürzungen β und γ ein, so ergiebt sich als Summe von (72) und (73):

$$\frac{4}{5}\,a^2\left(\frac{2}{\beta^2(1-\beta^2)}-\frac{1}{\beta^3}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)\gamma$$

und es folgt aus (64′):

$$\text{74)}\qquad -\mathfrak{F}=\frac{6}{5}\,\frac{\varepsilon^2}{8\pi a c^2}\left(\frac{2}{\beta^2(1-\beta^2)}-\frac{1}{\beta^3}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)p.$$

Dieser Wert, sowie der für die elektromagnetische Masse daraus folgende unterscheidet sich nur durch den Faktor 6/5 von von dem für Oberflächenladung gefundenen, Gl. (71) und (71′). Unser Resultat stimmt sowohl bei Oberflächen- wie bei Volumladung mit dem Abraham'schen überein; der Unterschied in den Zahlenfaktoren rührt lediglich von der anderen Wahl der Einheit

für ε her (hier elektrostatische, sog. rationelle Einheit, dort elektromagnetische, conventionelle Einheit).

c) Volumladung, Ueberlichtgeschwindigkeit. Wir gehen auch jetzt von Gl. (64′) aus und zerlegen f in seinen constanten und seinen variabeln Teil. Der Beitrag des constanten Teiles berechnet sich ähnlich wie in (72), nur ist dabei die abgeänderte Bedeutung von τ'' (Gl. (68″)) zu beachten. Man erhält:

75) $$-\frac{4}{5}\frac{a^2}{\beta^2}\left(2+\frac{\gamma}{\beta^2-1}+\frac{\gamma}{\beta}\log\frac{\beta+1}{\beta-1}\right).$$

Der Beitrag des variabeln Teils von f im ersten Integral der Gl. (64′) ist nach wie vor durch (72′) gegeben; statt (72″) aber erhalten wir, indem wir die Integrationsvariable $x = T - c\tau$ einführen:

75′) $$\begin{aligned}&\frac{c-v}{v}\int_0^{2a}\left(1-\frac{pcx}{2v(v-c)^2}\right)\left(2\varphi+x\frac{d\varphi}{dx}\right)dx\\&+\frac{c(c-v)}{v^2}\int_0^{2a}\left(1+\frac{px}{v(v-c)}\right)\varphi\,dx.\end{aligned}$$

Die Differenz von (72′) und (75′) wird nun:

$$\begin{aligned}&2\int_0^{2a}\left(2\varphi+x\frac{d\varphi}{dx}\right)dx-\frac{2c^2}{v^2}\int_0^{2a}\varphi\,dx-\frac{pc^2}{v^2(v^2-c^2)}\int_0^{2a}\left(2x\varphi+x^2\frac{d\varphi}{dx}\right)dx\\&=2\Big[x\varphi\Big]_0^{2a}+2\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right)\int_0^{2a}\varphi\,dx-\frac{pc^2}{v^2(v^2-c^2)}\Big[x^2\varphi\Big]_0^{2a},\end{aligned}$$

also wegen der Bedeutung von φ bei Benutzung der Abkürzungen β und γ:

76) $$+\frac{4}{5}a^2\left(2+\frac{11}{2}\frac{\beta^2-1}{\beta^2}-\frac{\gamma}{\beta^2(\beta^2-1)}\right).$$

Indem wir den Beitrag (75) des constanten Gliedes von f hinzufügen, erhalten wir aus (64′):

77) $$-\mathfrak{F}=\frac{3\varepsilon^2}{40\pi a^2}\left(\frac{15}{2}\frac{\beta^2-1}{\beta^2}-\frac{2\gamma}{\beta^2(\beta^2-1)}-\frac{\gamma}{\beta^3}\log\frac{\beta+1}{\beta-1}\right).$$

Hier ist die zur Unterhaltung der quasistationären Bewegung erforderliche Kraft $\mathfrak{F}_e = -\mathfrak{F}$ natürlich nicht mit der Beschleunigung p bez. mit γ proportional, weil schon die stationäre Bewegung bei Ueberlichtgeschwindigkeit Kraftaufwand erfordert.

Spaltet man $\mathfrak{F}_a$ in einen von der Beschleunigung unabhängigen Teil $\mathfrak{F}_1$ und einen derselben proportionalen Teil $\mathfrak{F}_2$, so wird

$$\mathfrak{F}_1 = \frac{9\varepsilon^2}{16\pi a^2}\frac{\beta^2-1}{\beta^2}$$

selbstverständlich mit der in § 15 e) gefundenen Kraft identisch. Andrerseits ergiebt sich

$$78)\qquad \mathfrak{F}_2 = -\frac{6}{5}\frac{\varepsilon^2}{8\pi a c^2}\left(\frac{2}{\beta^2(\beta^2-1)}+\frac{1}{\beta^3}\log\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)p.$$

Das negative Vorzeichen in (78) bringt es mit sich, daß der zur Beschleunigung p gehörige Bestandteil $\mathfrak{F}_2$ der Kraft dieser Beschleunigung entgegen gerichtet ist und daß, was die Gesammtkraft $\mathfrak{F}_a$ betrifft, zur Aufrechterhaltung einer verzögerten Bewegung eine größere Kraft gehört wie zur Aufrechterhaltung einer beschleunigten!

In der Ausdrucksweise der gewöhnlichen Mechanik könnte man sagen: $\mathfrak{F}_1$ wird zur Ueberwindung einer dissipirenden Wirkung (nämlich der Ausstrahlung), $\mathfrak{F}_2$ zur Ueberwindung einer gewissen Trägheitswirkung benötigt. Wollte man auch zu dieser Trägheitswirkung eine scheinbare Masse $\mu = \mathfrak{F}_2/p$ hinzudefiniren, so würde dieselbe negativ ausfallen!

Es liegt nahe, im Anschluß an Gl. (77) nach einer möglichen kräftefreien, quasibeschleunigten Bewegung mit Ueberlichtgeschwindigkeit zu fragen, indem man $\mathfrak{F} = 0$ setzt und daraus den Wert von γ entnimmt, z. B. in der Form:

$$78')\qquad \frac{\beta^2}{\gamma} = \frac{2}{15}\left(\frac{2\beta^2}{(\beta^2-1)^2}+\frac{\beta}{\beta^2-1}\log\frac{\beta+1}{\beta-1}\right).$$

Man könnte hiernach zu jedem Geschwindigkeitsverhältnis β das Beschleunigungsverhältnis γ bestimmen und weiterhin den Ablauf der kräftefreien Bewegung durch Integration finden. Indessen zeigt sich, daß die vorstehende Gleichung mit der am Anfang dieses § entwickelten Grundbedingung quasistationärer Bewegungen im Allgemeinen unverträglich ist, da sie ganz enorme Beschleunigungen zur Folge haben würde. Wir forderten dort:

$$\frac{2ap}{v^2} \text{ klein gegen } \frac{|c-v|}{v},$$

d. h. bei Ueberlichtgeschwindigkeit

$$\frac{\gamma}{\beta^2} \text{ klein gegen } \frac{\beta-1}{\beta} \text{ oder } \frac{\beta^2}{\gamma} \text{ groß gegen } \frac{\beta}{\beta-1}$$

Bei großem β müßte also bei einer als quasistationär zu behandelnden Bewegung β^2/γ groß gegen 1 sein, während sich nach (78') β^2/γ mit wachsendem β der Null nähert. Auch schon für kleine β ($\beta = 2$ oder 3) widerspricht, wie man leicht zahlenmäßig nachrechnet, Gl. (78') der eben aufgestellten Forderung und wird erst für solche Werte von β, die der Einheit ziemlich nahe liegen, mit jener verträglich, widerspricht dann aber immer noch der verschärften Forderung aus Anm. 1 pag. 403. Die durch (78') gegebene Bewegung liegt daher durchweg außerhalb des Gültigkeitsbereiches der Formel (77), aus der wir sie ableiteten, und hat somit keinen Anspruch auf Glaubwürdigkeit.

Die Frage nach der (oder richtiger nach einer) kräftefreien Bewegung mit Ueberlichtgeschwindigkeit scheint ebenso schwierig zu sein, wie sie mit Rücksicht auf die Theorie der γ-Strahlen des Radiums dringlich ist. Nach dem Vorangehenden scheint es bis zu einem gewissen Grade wahrscheinlich, daß diese Bewegung eine sehr rasch sich selbst beschleunigende ist.

§ 17. *Gleichförmig beschleunigte Bewegung.*

Zur richtigen Beurteilung des Begriffes „elektromagnetische Maße" ist es gut, neben der quasi-beschleunigten auch eine wirklich beschleunigte Bewegung zu betrachten. Wir beschränken uns dabei auf Oberflächenladung und Unterlichtgeschwindigkeit und setzen die Bewegung als gleichförmig beschleunigt voraus (p constant, aber der Größe nach nicht beschränkt). Die Gl. (66) und (66') für $v_{t-\tau}$ und T gelten dann in Strenge; die dort vorkommende Größe $v = v_t$ ist linear von t abhängig, aber von τ unabhängig, während p nach Voraussetzung sowohl von t als von τ unabhängig ist. Was $1/T^2$ betrifft, so verzichten wir auf die Potenzentwicklung nach τ, da wir p nicht mehr als klein voraussetzen. Vielmehr wollen wir $1/T^2$ in Partialbrüche zerlegen:

$$\frac{1}{T^2} = \frac{1}{v^2\tau^2}\frac{1}{\left(1-\frac{p\tau}{2v}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{v^2}\left(\frac{1}{\tau^2}+\frac{p}{v\tau}+\frac{p^2}{2v^2}\frac{1}{1-\frac{p\tau}{2v}}+\frac{p^2}{4v^2}\frac{1}{\left(1-\frac{p\tau}{2v}\right)^2}\right).$$

Hiernach ist das Integral in (64) leicht auszuführen. Wir schreiben, indem wir die den vier vorstehenden Partialbrüchen entsprechenden Glieder mit I, II, III, IV bezeichnen

$$c\int_{\tau'}^{\tau''}\frac{c\tau-2a}{T^2}\,d\tau = \frac{c^2}{v^2}(\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}),$$

$$\mathrm{I} = \int\left(\tau-\frac{2a}{c}\right)\frac{d\tau}{\tau^2} = \log\frac{\tau''}{\tau'}+\frac{2a}{c}\left(\frac{1}{\tau''}-\frac{1}{\tau'}\right)$$

$$\mathrm{II} = \frac{p}{v}\int\left(\tau-\frac{2a}{c}\right)\frac{d\tau}{\tau} = \frac{p}{v}(\tau''-\tau')-\frac{2ap}{cv}\log\frac{\tau''}{\tau'}$$

$$\mathrm{III} = \frac{p^2}{2v^2}\int\left(\tau-\frac{2a}{c}\right)\left(1-\frac{p\tau}{2v}\right)^{-1}d\tau = \frac{p}{v}\int\left\{-1+\left(1-\frac{ap}{cv}\right)\left(1-\frac{p\tau}{2v}\right)^{-1}\right\}d\tau$$

$$= -\frac{p}{v}(\tau''-\tau')-2\left(1-\frac{ap}{cv}\right)\log\frac{1-\frac{p\tau''}{2v}}{1-\frac{p\tau'}{2v}}$$

$$\mathrm{IV} = \frac{p^2}{4v^2}\int\left(\tau-\frac{2a}{c}\right)\left(1-\frac{p\tau}{2v}\right)^{-2}d\tau$$

$$= \frac{p}{2v}\int\left\{-\left(1-\frac{p\tau}{2v}\right)^{-1}+\left(1-\frac{ap}{cv}\right)\left(1-\frac{p\tau}{2v}\right)^{-2}\right\}d\tau$$

$$= \log\frac{1-\frac{p\tau''}{2v}}{1-\frac{p\tau'}{2v}}+\left(1-\frac{ap}{cv}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{p\tau''}{2v}}-\frac{1}{1-\frac{p\tau'}{2v}}\right).$$

Wir führen die Abkürzungen β und γ (Gl. (68)) ein und berücksichtigen, daß

$$T' = v\tau'\left(1-\frac{p\tau'}{2v}\right),\quad T'' = v\tau''\left(1-\frac{p\tau''}{2v}\right);$$

dann können wir folgendermaßen zusammenfassen:

$$\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV} = \frac{2a}{c}\left(\frac{1}{\tau''}-\frac{1}{\tau'}\right)+\left(1-\frac{\gamma}{\beta}\right)\log\frac{\tau''^2\,T'}{\tau'^2\,T''}$$
$$+\left(1-\frac{\gamma}{2\beta}\right)\left(\frac{v\tau''}{T''}-\frac{v\tau'}{T'}\right);$$

nach (64) wird also:

79)
$$\frac{-16\pi a^2}{\varepsilon^2}\mathfrak{F} = -\frac{1-\beta^2}{\beta^2}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}+\log\frac{T'}{T''}+\frac{2}{\beta}+\frac{2a}{c\beta^2}\left(\frac{1}{\tau''}-\frac{1}{\tau'}\right)$$
$$+\frac{\beta-\gamma}{\beta^2}\log\frac{\tau''^2\,T'}{\tau'^2\,T''}+\frac{2\beta-\gamma}{2\beta^2}\left(\frac{c\tau''}{T''}-\frac{c\tau'}{T'}\right).$$

Dabei sind die Größen τ', τ'', T', T'' als Wurzeln der folgenden Gleichungen bestimmt:

$$(c+v)\tau' - \frac{p}{2}\tau'^2 = 2a, \quad T' = 2a - c\tau',$$

$$(c-v)\tau'' + \frac{p}{2}\tau''^2 = 2a, \quad T'' = c\tau'' - 2a.$$

Durch Auflösung derselben erhält man, indem nur die positiven Wurzeln in Betracht kommen (bei τ' nur die kleinere der beiden positiven Wurzeln vgl. hierzu die Anm. zu pag. 414):

79′)
$$\left\{\begin{aligned} \tau' &= \frac{c}{p}(1+\beta)\left(1-\sqrt{1-\frac{2\gamma}{(1+\beta)^2}}\right), \\ \tau'' &= \frac{c}{p}(1-\beta)\left(-1+\sqrt{1+\frac{2\gamma}{(1-\beta)^2}}\right), \\ T' &= \frac{c^2}{p}(1+\beta)\left(\frac{\gamma}{1+\beta}-1+\sqrt{1-\frac{2\gamma}{(1+\beta)^2}}\right), \\ T'' &= \frac{c^2}{p}(1-\beta)\left(\frac{-\gamma}{1-\beta}-1+\sqrt{1+\frac{2\gamma}{(1-\beta)^2}}\right). \end{aligned}\right.$$

Ist nun γ klein gegen $1-\beta$, was im wesentlichen der Bedingung des quasistationären Zustandes (vgl. den Anfang von § 16) entspricht, so kann man die sämtlichen vier vorstehenden Größen nach Potenzen von γ entwickeln und höhere Potenzen von γ vernachlässigen. Trägt man diese Entwickelungen in (79) ein, so ergiebt sich Proportionalität zwischen $\mathfrak{F}$ und γ bez. $\mathfrak{F}$ und p und der Faktor von p wird mit der elektromagnetischen Maße (Gl. (71′) identisch. Insoweit stimmt also die quasibeschleunigte Bewegung mit der wirklich beschleunigten hinreichend genau überein.

Dies trifft aber alles nicht mehr zu in derjenigen Umgebung der Lichtgeschwindigkeit, in der das ein für allemal gegebene γ nicht mehr klein ist gegen $1-\beta$. Insbesondere wollen wir für die Stelle $\beta = 1$ die Abhängigkeit der Kraft $\mathfrak{F}$ von γ bestimmen. Natürlich setzen wir nach der Bedeutung von γ immer noch γ als klein gegen 1 voraus.

Aus (79′) folgt nun zunächst für $\beta = 1$:

$$\tau' = \frac{2c}{p}\left(1-\sqrt{1-\frac{\gamma}{2}}\right) = \frac{c}{p}\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{\gamma^2}{16}+\cdots\right), \quad \tau'' = \frac{c}{p}\sqrt{2\gamma},$$

$$T' = \frac{c^2}{p}\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\gamma^2}{16}+\cdots\right), \quad T'' = \frac{c^2}{p}(\sqrt{2\gamma}-\gamma)$$

und, wenn wir in (79) eintragen:

80)
$$-\mathfrak{F} = \frac{\varepsilon^2}{4\pi a^2}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2}}+\frac{\gamma}{8}\log\frac{\gamma}{8}+\cdots\right).$$

Beim Durchgange durch die Lichtgeschwindigkeit ist also $\mathfrak{F}$ nicht mehr mit der ersten Potenz von γ (oder p), sondern bei kleinem γ annähernd mit der Quadratwurzel proportional. Wollen wir auch hier eine elektromagnetische Maße μ definiren, indem wir das Verhältnis $-\mathfrak{F}/p = \mu$ setzen, so ergiebt sich:

80′) $$\mu = \frac{\varepsilon^2}{2\pi a c^2 \gamma}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2}} + \frac{\gamma}{8}\log\frac{\gamma}{8} + \cdots\right).$$

Bei gleichförmig beschleunigter Bewegung wird also für die Lichtgeschwindigkeit selbst (und ebenso in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit) die Maße eine Funktion der in γ enthaltenen Beschleunigung. (Bei ungleichförmig beschleunigter Bewegung würden auch die Differentialquotienten der Beschleunigung in den Ausdruck der Maße eingehn).

Wir heben noch hervor, daß unsere Formeln (80) und (80′) einen endlichen Wert für Kraft und Maße ergeben. Das Unendlich-Werden dieser Größen für $\beta = 1$ im Falle der quasistationären Bewegung rührt lediglich daher, daß wir dort eine Entwickelung nach ganzen Potenzen von γ vorgenommen hatten, die im Falle $\beta = 1$ unzulässig und durch eine solche nach gebrochenen Potenzen zu ersetzen ist. Auch diese Betrachtungen zeigen, was bereits in § 13 allgemein ausgesprochen wurde, daß es möglich ist, ein Elektron mit endlichem Arbeitsaufwand bis auf die Lichtgeschwindigkeit zu beschleunigen[1]). Bei Volumladung, auf welchen Fall sich die vorangehenden Betrachtungen allerdings nicht unmittelbar beziehen, ist es sogar nach den allgemeinen Ueberlegungen des § 13 möglich, das Elektron beliebig weit über die Lichtgeschwindigkeit hinaus zu beschleunigen.

Wir haben schließlich noch Fig. 6[2]) zu erläutern. In dieser ist als Abscisse das Geschwindigkeitsverhältnis β aufgetragen und zwar, da sich die Fig. auf Oberflächenladung bezieht, das Intervall $\beta = 0$ bis $\beta = 1$ dieses Verhältnisses. Die Ordinate stellt den Wert von $-\mathfrak{F}/p$ bei gleichförmig beschleunigter Bewegung dar, also diejenige Größe, die wir als Maße μ definirt haben. Die den einzelnen Curven beigegebenen Zahlen bedeuten den für jede einzelne Curve charakteristischen Wert von $\gamma = 2ap/c^2$. Wenn wir die Ordinaten mit diesem Werte γ multipliciren, erhalten wir eine (nicht verzeichnete) Curvenschaar, welche direkt die Größe $-\mathfrak{F}$

1) Zu demselben Ergebniss gelangt P. Hertz in seiner schönen Dissertation: Untersuchungen über unstetige Bewegungen des Elektrons, Göttingen 1904.

2) Von Herrn Dr. M. Winkelmann freundlichst berechnet und gezeichnet.

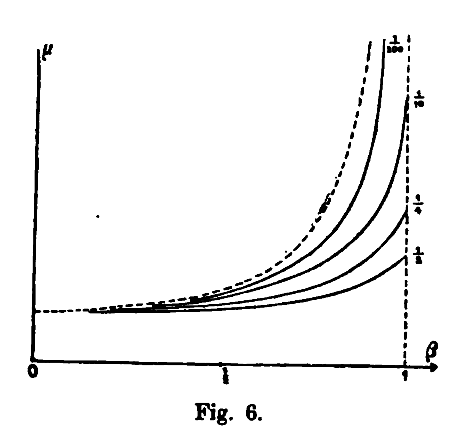


Fig. 6.

für verschiedene Beschleunigungen veranschaulicht, da ja $\mu\gamma$ bis auf den constanten Faktor $2a/c^2$ mit $-\mathfrak{F}$ identisch ist. Diese $\mathfrak{F}$-Curven würden sich in sofern umgekehrt anordnen, wie die verzeichneten μ-Curven, als bei gleichem β größeren Werten von γ auch größere Ordinaten von $-\mathfrak{F}$ entsprechen würden. Wir heben dies ausdrücklich hervor, damit Fig. 6 nicht der selbstverständlichen Thatsache zu widersprechen scheine, daß der Kraftbedarf zur Unterhaltung einer gleichförmig beschleunigten Bewegung bei Unterlichtgeschwindigkeit um so größer ist, je größer die Beschleunigung.

Da bei gleichförmig beschleunigter Bewegung v eine ganze lineare Funktion von t ist, so kann die Abscissenaxe unserer Fig. auch ohne Weiteres als Zeitskala gelesen werden. Die Fig. zeigt uns dann, wie im Verlaufe der Bewegung die Maße μ zunimmt.

Außer den μ-Curven (ausgezogen) ist in der Fig. diejenige Grenzcurve (punktirt) eingezeichnet, welche der quasistationären Bewegung, also gewissermaßen dem Falle $\gamma = 0$, entspricht. Naturgemäß fallen unsere μ-Curven bei kleinem β ein Stück weit mit dieser Grenzcurve merklich zusammen und trennen sich um so später von ihr ab, je kleiner γ. Man kann noch hervorheben, daß die den Werten $\gamma = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{100}$ entsprechenden Beschleunigungen ganz außerordentlich groß sind, daß also merkliche Abweichungen von der Grenzcurve der quasistationären Bewegungen bei mäßigen Beschleunigungen erst in nächster Nähe der Lichtgeschwindigkeit ($\beta = 1$) auftreten.

Die bisherige Behandlung der Frage hat noch insofern etwas Unbefriedigendes, als das dauernde Bestehen einer gleichförmigen Beschleunigung in der Vergangenheit das Vorkommen von (negativ gerichteten) Ueberlichtgeschwindigkeiten voraussetzen würde, die wie wir wissen bei Oberflächenladung unmöglich sind. Ist z. B. der Geschwindigkeitsverlauf einfach gegeben durch $v = pt$ (so daß also für $t = 0$ die Bewegung ihren Sinn umkehrt), so hätten wir bei dauernder Gültigkeit dieses Bewegungsgesetzes für $t < -c/p$ Ueberlichtgeschwindigkeit. Mann kann daher wünschen, die Fragestellung schließlich

noch in folgender Weise abzuändern: Für $t < 0$ ist das Elektron in Ruhe ($v = 0$), für $t > 0$ in gleichförmig beschleunigter Bewegung ($v = pt$). Welches ist in diesem Falle der Verlauf von $\mathfrak{F}$ und derjenige von μ?

Für $t < 0$ haben wir jedenfalls $\mathfrak{F} = 0$, während μ gänzlich unbestimmt und sinnlos wird.

Für $t = 0$ ist ebenfalls noch $\mathfrak{F} = 0$, sowie $\mu = -\mathfrak{F}/p = 0$.

Für $t > 0$ muß der jeweils erforderliche Kraftaufwand aus Gl. (64) von Neuem berechnet werden, wobei namentlich die jetzt erforderliche Neubestimmung der Grenzen $\tau' \tau''$ zu beachten ist[1]. Man erkennt aber unmittelbar, daß, wenn man aus der früheren Gl. (79') einen Wert von τ'' berechnet, welcher sich $< t$ ergiebt, daß dann auch der frühere Wert von $\mathfrak{F}$ und μ ungeänderte Gültigkeit behält. In der That, wenn $\tau'' < t$ und daher auch $\tau' < t$, so gehört das Zeitintervall von $t - \tau'$ bis $t - \tau''$ durchweg zu positiven Werten von t; während dieses Zeitintervalles herrschte bereits gleichförmige Beschleunigung; die Bestimmung von $\mathfrak{F}$ zur Zeit t, welche nur von der Geschichte des Elektrons während jenes Zeitintervalles abhängt, ist also dieselbe, wie wenn die gleichförmige Beschleunigung stets bestanden hätte, und unabhängig davon, daß wir jetzt für $t < 0$ Ruhe vorausgesetzt haben.

Aus Gl. (79') ergiebt sich aber $\tau'' < t$, wenn

$$t > \frac{c}{p}\left(\beta - 1 + \sqrt{(1-\beta)^2 + 2\gamma}\right).$$

Da $pt = v_t$ und $v_t/c = \beta$, können wir hierfür schreiben:

$$1 > (1-\beta)^2 + 2\gamma \quad \text{oder} \quad 1 - \beta < \sqrt{1 - 2\gamma}.$$

Ist überdies 2γ klein gegen 1, so können wir weiter schließen:

$$1 - \beta < 1 - \gamma \quad \text{oder} \quad \beta > \gamma.$$

Hieraus folgt: Im Falle $\gamma = 1/200$ stellt die zugehörige Curve Fig. 6 in dem weitaus größten Teile ihres Verlaufes die Verhältnisse auch für den Fall richtig dar, daß bis zum Zeit-

1) In diesem Zusammenhange möge Folgendes nachgetragen werden: Die quadratische Gl. für τ' auf pag. 411 liefert zunächst zwei positive Wurzeln, von denen wir in (79') die kleinere ausgesondert haben. Die größere gehört zu einem weit zurückliegenden Stadium der Bewegung, in welchem Ueberlichtgeschwindigkeit herrschte. Bei der jetzigen verbesserten Form der Problemstellung, nach welcher das Elektron ursprünglich in Ruhe war, ist jene größere Wurzel ohne Bedeutung; daß wir sie früher ausschlossen, kann daher mit Rücksicht auf die gegenwärtige Fassung des Problems gerechtfertigt werden.

punkte $t = 0$ Ruhe herrschte; sie ist nur in dem schmalen Intervall von $\beta = 0$ bis $\beta = 1/200$ dahin abzuändern, daß sie in einer nicht näher untersuchten Weise von 0 bis zu der in Fig. 6 für $\beta = 1/200$ verzeichneten Ordinate ansteigt. Aehnliches gilt für $\beta = \frac{1}{10}$, $\beta = \frac{1}{4}$, wobei jedoch der abzuändernde Teil der Curve einen größeren Bruchteil des Gesamtverlaufes ausmacht, so daß sich hier der Einfluß der für $t < 0$ vorausgesetzten Ruhe auf einen immer größeren Teil der folgenden Beschleunigungsepoche erstreckt. Für $\gamma = 1/2$ endlich macht sich dieser Einfluß im ganzen Intervalle bis heran zu $\beta = 1$ geltend und ist daher die ganze früher verzeichnete Curve mit Ausnahme ihrer Endordinate für die zuletzt vorausgesetzten Verhältnisse nicht mehr brauchbar.

§ 18. *Gleichförmige Bewegung im Kreise. Elektromagnetische Centrifugalkraft und elektromagnetische transversale Maße.*

Auch bei der kreisförmigen Bewegung läßt sich die allgemeine Darstellung der Kraft wenngleich in anderer Richtung wie bei der geradlinigen Bewegung wesentlich vereinfachen.

Eine gleichförmige kreisförmige Bewegung erhalten wir durch den Ansatz

81) $$\mathfrak{v}_t = v e^{int}, \quad \mathfrak{v}_{t-\tau} = v e^{in(t-\tau)},$$

wenn wir v und n als constant ansehen; die zwei Componenten von $\mathfrak{v}$ in der Bahnebene ergeben sich durch Zerlegung in Reelles und Imaginäres. n bedeutet die Winkelgeschwindigkeit des Umlaufs oder die Anzahl der Umläufe in 2π Secunden. Da v die Lineargeschwindigkeit, ergiebt sich der Radius der Kreisbahn zu

$$r = v/n.$$

Aus $\mathfrak{v}$ folgt

81') $$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{T} &= v \frac{e^{int} - e^{in(t-\tau)}}{in} = \frac{2v}{n} e^{in\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} \sin \frac{n\tau}{2}, \\ T &= |\mathfrak{T}| = \frac{2v}{n} \sin \frac{n\tau}{2}, \quad \frac{\mathfrak{T}}{T} = e^{in\left(t - \frac{\tau}{2}\right)}. \end{aligned} \right.$$

Ferner finden wir leicht durch Ausrechnung oder geometrische Ueberlegung:

81'') $$(\mathfrak{v}_t \mathfrak{v}_{t-\tau}) = v^2 \cos n\tau.$$

a. Oberflächenladung. Das in Gl. (54) vorkommende Integral nimmt daraufhin bei Kreisbewegung die folgende Form an:

$$82)\quad \frac{n^2}{2} e^{int} \int_{\tau'}^{\tau''} \left(\frac{c^2 - v^2 \cos n\tau}{2v^2 \sin^2 \frac{n\tau}{2}} e^{\frac{-in\tau}{2}} - i \frac{e^{-in\tau}}{\sin \frac{n\tau}{2}} \right) (c\tau - 2a) d\tau.$$

Da die Bewegung vollständig cyklisch, kommt es auf den Wert von t in keiner Weise an; wir können daher $t = 0$ setzen. Für $t = 0$ wird $\mathfrak{v}_t$ reell; dementsprechend liefert der reelle Teil von $\mathfrak{F}$ die mit $\mathfrak{v}$ gleichgerichtete, in die Bahn fallende Componente $\mathfrak{F}_t$ der Kraft, der imaginäre Teil die zu $\mathfrak{v}$ senkrechte Normalcomponente $\mathfrak{F}_n$. Indem wir an die üblichen Bezeichnungen der Mechanik anknüpfen, können wir $\mathfrak{F}_n$ als Centrifugalkraft, $\mathfrak{F}_t$ als Tangentialwiderstand, $\mathfrak{F}$ als scheinbare oder elektromagnetische Gesamt-Trägheitskraft bezeichnen. Da nach der Erklärung dieser Größen durch den reellen und den imaginären Teil von (82) $\mathfrak{F}_t$ positiv im Sinne von $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{F}_n$ positiv im Sinne des nach dem Mittelpunkte hin gezogenen Radius gerechnet wird, so ist zu erwarten, das sowohl $\mathfrak{F}_t$ als $\mathfrak{F}_n$ im Allgemeinen negatives Vorzeichen haben werden.

Wir bilden nun, um zum Tangentialwiderstande zu gelangen, den reellen Teil des auf der rechten Seite von (82) vorkommenden Integrales für $t = 0$. Dieser wird:

$$\frac{n^2}{2} \int_{\tau'}^{\tau''} \left(\frac{c^2 - v^2 \cos n\tau}{2v^2 \sin^2 \frac{n\tau}{2}} - 2 \right) \cos \frac{n\tau}{2} (c\tau - 2a) d\tau$$

$$= \frac{n^2}{2} \frac{c^2 - v^2}{2v^2} \int_{\tau'}^{\tau''} \frac{\cos \frac{n\tau}{2}}{\sin^2 \frac{n\tau}{2}} (c\tau - 2a) d\tau - \frac{n^2}{2} \int_{\tau'}^{\tau''} \cos \frac{n\tau}{2} (c\tau - 2a) d\tau$$

$$= -n \frac{c^2 - v^2}{2v^2} \left[\frac{c\tau - 2a}{\sin \frac{n\tau}{2}} \right]_{\tau'}^{\tau''} + nc \frac{c^2 - v^2}{2v^2} \int_{\tau'}^{\tau''} \frac{d\tau}{\sin \frac{n\tau}{2}}$$

$$- n \left[\sin \frac{n\tau}{2} (c\tau - 2a) \right]_{\tau'}^{\tau''} + nc \int_{\tau'}^{\tau''} \sin \frac{n\tau}{2} d\tau.$$

Nach der Definition der τ', τ'' ist aber (s. Gl. (52) und (81')):

$$83)\quad c\tau' + \frac{2v}{n} \sin \frac{n\tau'}{2} = 2a, \quad c\tau'' - \frac{2v}{n} \sin \frac{n\tau''}{2} = 2a$$

also

$$\frac{c\tau' - 2a}{\sin\frac{n\tau'}{2}} = -\frac{2v}{n}, \quad \frac{c\tau'' - 2a}{\sin\frac{n\tau''}{2}} = +\frac{2v}{n},$$

$$(c\tau' - 2a)\sin\frac{n\tau'}{2} = -\frac{2v}{n}\sin^2\frac{n\tau'}{2}, \quad (c\tau'' - 2a)\sin\frac{n\tau''}{2} = +\frac{2v}{n}\sin^2\frac{n\tau''}{2}.$$

Daher wird der Wert unseres Integrals:

$$-2\frac{c^2 - v^2}{v} + c\frac{c^2 - v^2}{v^2}\log\frac{\operatorname{tg}\frac{n\tau''}{4}}{\operatorname{tg}\frac{n\tau'}{4}} - v(2 - \cos n\tau' - \cos n\tau'')$$

$$-2c\left(\cos\frac{n\tau''}{2} - \cos\frac{n\tau'}{2}\right).$$

Bilden wir andrerseits den reellen Teil der vom Integralzeichen freien Glieder in Gl. (54) für $t = 0$, so ergiebt sich

$$2v - v\cos n\tau' - \cos n\tau'' - \frac{c^2 - v^2}{v^2}\left(c\log\frac{c+v}{c-v} - 2v\right);$$

im Ganzen erhalten wir daher nach Forthebung einiger entgegengesetzt gleicher Terme aus (54):

$$84)\qquad \frac{16\pi a^2}{\varepsilon^2}\mathfrak{F}_s = \frac{c^2 - v^2}{v^2}\log\frac{c+v}{c-v}\,\frac{\operatorname{tg}\frac{n\tau'}{4}}{\operatorname{tg}\frac{n\tau''}{4}} - 2\left(\cos\frac{n\tau''}{2} - \cos\frac{n\tau'}{2}\right).$$

Sodann nehmen wir, um zur „Centrifugalkraft“ zu gelangen, den imaginären Teil von (82); derselbe lautet für $t = 0$:

$$-\frac{n^2}{2}\int_{\tau'}^{\tau''}\frac{c^2 + v^2\cos n\tau}{2v^2}\,\frac{c\tau - 2a}{\sin\frac{n\tau}{2}}\,d\tau =$$

$$-\frac{n^2}{2}\,\frac{c^2 + v^2}{2v^2}\int_{\tau'}^{\tau''}\frac{c\tau - 2a}{\sin\frac{n\tau}{2}}\,d\tau + \frac{n^2}{2}\int_{\tau'}^{\tau''}\sin\frac{n\tau}{2}(c\tau - 2a)\,d\tau.$$

Das zweite Integral läßt sich ausführen; mit Rücksicht auf die Definition von τ', τ'' haben wir nämlich:

$$\frac{n^2}{2}\int_{\tau'}^{\tau''}\sin\frac{n\tau}{2}(c\tau-2a)\,d\tau = -n\left[\cos\frac{n\tau}{2}(c\tau-2a)\right]_{\tau'}^{\tau''}$$

$$+nc\int_{\tau'}^{\tau''}\cos\frac{n\tau}{2}\,d\tau = -2v\left(\cos\frac{n\tau''}{2}\sin\frac{n\tau''}{2}+\cos\frac{n\tau'}{2}\sin\frac{n\tau'}{2}\right)$$

$$+2c\left(\sin\frac{n\tau''}{2}-\sin\frac{n\tau'}{2}\right) = -v(\sin n\tau''+\sin n\tau')$$

$$+2c\left(\sin\frac{n\tau''}{2}-\sin\frac{n\tau'}{2}\right).$$

Nehmen wir die vom Integralzeichen freien Glieder in Gl. (54) hinzu, so haben einen für $t=0$ nichtverschwindenden imaginären Teil nur die Glieder $-(\mathfrak{v}_{-\tau'}+\mathfrak{v}_{-\tau''})$. Ihr imaginärer Teil lautet:

$$+v(\sin n\tau'+\sin n\tau'')$$

und hebt sich, wie man sieht, gegen einen Bestandteil des vorher entwickelten Ausdrucks. Im Ganzen ergiebt sich somit einfach:

$$85)\quad \frac{16\pi a^2}{\varepsilon^2}\mathfrak{F}_n = \frac{n^2}{2c}\frac{c^2+v^2}{2v^2}\int_{\tau'}^{\tau''}\frac{c\tau-2a}{\sin\frac{n\tau}{2}}\,d\tau-2\left(\sin\frac{n\tau''}{2}-\sin\frac{n\tau'}{2}\right).$$

b. Volumladung. Da bei der gleichförmigen Kreisbewegung T und daher auch die in (62) vorkommende Funktion $f(c\tau+T)$ bez. $f(|c\tau-T|)$ von t unabhängig werden, so haben wir

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathfrak{v}_{t-\tau}f}{T} = \frac{f}{T}\,in\,\mathfrak{v}_{t-\tau}.$$

Bezeichnen wir das Argument der Funktion f in dem ersten oder zweiten Integral der Gl. (62) mit dem gleichen Buchstaben x, so können wir jenen beiden Integralen die gemeinsame Form geben (vgl. (81), (81') und (81'')), in der wir sogleich $t=0$ setzen:

$$\frac{n^2}{2}\int_{x=0}^{x=2a}\left\{e^{\frac{-in\tau}{2}}\frac{c^2-v^2\cos n\tau}{2v^2\sin^2\frac{n\tau}{2}}\left(\frac{2v}{n}\sin\frac{n\tau}{2}\frac{\partial f(x)}{\partial T}-f(x)\right)+\frac{ie^{-in\tau}}{\sin\frac{n\tau}{2}}f(x)\right\}d\tau.$$

der reelle Teil hiervon beträgt:

$$\frac{n^2}{2}\int_{x=0}^{x=2a}\left\{\frac{c^2-v^2\cos n\tau}{nv\sin\frac{n\tau}{2}}\frac{\partial f(x)}{\partial T}-\frac{c^2+v^2\cos n\tau-2v^2}{2v^2\sin^2\frac{n\tau}{2}}f(x)\right\}\cos\frac{n\tau}{2}\,d\tau;$$

der imaginäre Teil wird:

$$\frac{n^2}{2}\int_{x=0}^{x=2a}\left\{-\frac{c^2-v^2\cos n\tau}{nv}\frac{\partial f(x)}{\partial T}+\frac{c^2+v^2\cos n\tau}{2v^2\sin\frac{n\tau}{2}}f(x)\right\}d\tau.$$

Spalten wir also $\mathfrak{F}$ wieder in einen Tangentialwiderstand $\mathfrak{F}_t$ und eine Centrifugalkraft $\mathfrak{F}_n$, so ergiebt sich nach (62), wenn wir die Differenz der vorstehenden Integralwerte für $x = c\tau + T$ und $x = |c\tau - T|$ bilden:

84′) $$\frac{-32\pi a^2}{3\varepsilon^2}\mathfrak{F}_t = \frac{n^2}{2a^2c}\int_0^{\tau'}\left\{\frac{c^2-v^2\cos n\tau}{nv\sin\frac{n\tau}{2}}\frac{\partial f(c\tau+T)}{\partial T}\right.$$
$$\left.-\frac{c^2+v^2\cos nt-2v^2}{2v^2\sin^2\frac{n\tau}{2}}f(c\tau+T)\right\}\cos\frac{n\tau}{2}\,d\tau$$
$$-\frac{n^2}{2a^2c}\int_0^{\tau''}\left\{\frac{c^2-v^2\cos n\tau}{nv\sin\frac{n\tau}{2}}\frac{\partial f(|c\tau-T|)}{\partial T}\right.$$
$$\left.-\frac{c^2+v^2\cos n\tau-2v^2}{2v^2\sin^2\frac{n\tau}{2}}f(|c\tau-T|)\right\}\cos\frac{n\tau}{2}\,d\tau$$

und

85′) $$\frac{32\pi a^2}{3\varepsilon^2}\mathfrak{F}_n$$
$$=\frac{n^2}{2a^2c}\int_0^{\tau'}\left\{\frac{c^2-v^2\cos n\tau}{nv}\frac{\partial f(c\tau+T)}{\partial T}-\frac{c^2+v^2\cos n\tau}{2v^2\sin\frac{n\tau}{2}}f(c\tau+T)\right\}d\tau$$
$$-\frac{n^2}{2a^2c}\int_0^{\tau''}\left\{\frac{c^2-v^2\cos n\tau}{nv}\frac{\partial f(|c\tau-T|)}{\partial T}-\frac{c^2+v^2\cos n\tau}{2v^2\sin\frac{n\tau}{2}}f(|c\tau-T|)\right\}d\tau.$$

Eine allgemeine Ausführung der Integration wie im Falle der Oberflächenladung scheint kaum möglich. Will man die obigen Ausdrücke in Strenge weiter behandeln, so wird es sich empfehlen, in den beiden Integralen die bereits soeben genannten Variabeln zu benutzen:

86) $$x = c\tau + \frac{2v}{n}\sin\frac{n\tau}{2} \text{ bez. } \pm x = c\tau - \frac{2v}{n}\sin\frac{n\tau}{2}.$$

Man hätte dann die Aufgabe, τ selbst sowie $\sin n\tau/2$, $\cos n\tau$ etc. durch x auszudrücken. Diese Aufgabe wird in der Astronomie bei dem Probleme der Planetenbewegung behandelt, mit welchem Probleme ja unser kreisförmig bewegtes Elektron eine offenbare

Analogie aufweist; die Gl. (86) sind identisch mit der sog. Kepler'schen Gleichung.

Obwohl gerade die kreisförmigen Bahnen und ihr möglicher Zusammenhang mit den Spektrallinien mich zu dieser ganzen Untersuchung veranlaßt haben, muß ich ihre genauere Behandlung hier zurückstellen. Ich zeige daher nur noch, wie sich in erster Näherung aus unseren allgemeinen Formeln der Wert der sog. transversalen elektromagnetischen Maße ergiebt.

Wir setzen zu dem Ende voraus, daß innerhalb des ganzen Integrationsintervalles von τ' bis τ'' die Größe $\frac{n\tau}{2}$ eine kleine Zahl sei. In diesem Falle haben wir nach (83), wenn wir Ueberlichtgeschwindigkeit nicht ausschließen:

$$87)\qquad \tau' = \frac{2a}{c+v}, \quad \tau'' = \frac{2a}{|c-v|}.$$

Unsere Voraussetzung verlangt nun

$$\frac{n}{2}\tau'' = \frac{na}{|c-v|} \text{ klein gegen } 1$$

Beachten wir noch, daß n die Winkelgeschwindigkeit, v die Bahngeschwindigkeit im Kreise, also v/n der Bahnradius (r) ist, so können wir die vorige Bedingung auch so umschreiben:

$$88)\qquad \frac{a}{r}\frac{v}{|c-v|} \text{ klein gegen 1, oder } r \text{ groß gegen } a\frac{v}{|c-v|}.$$

Es handelt sich also bei der beabsichtigten Näherung um Bahnen von großem Krümmungsradius. Den Maaßstab für die erforderliche Größe des Krümmungsradius liefert dabei der Radius des Elektrons a selbst, wenn wir denselben noch mit dem Geschwindigkeitsverhältnis $v/|c-v|$ multipliciren. Z. B. verlangt (88) wenn v klein gegen c ist, daß r nur etwa von der Ordnung a zu sein braucht. Ist dagegen etwa $v = c/2$ oder v groß gegen c, so müssen wir verlangen, daß r groß gegen a sei. Je mehr sich v der Lichtgeschwindigkeit nähert, um so größer muß r vorausgesetzt werden. Jedenfalls gestattet (88) in jedem Falle, die Gültigkeit der folgenden Näherungsformeln genau zu umgrenzen.

Da eine gleichförmig durchlaufene Kreisbahn von der gleichförmigen geradlinigen Bewegung nur wenig abweicht, so können wir die jetzt zu behandelnden Bewegungen ebenso wie die des § 16 als quasistationär bezeichnen. Unsere Bedingung (88)

sagt alsdann aus, unter welchen Umständen eine Kreisbewegung als quasistationär bezeichnet werden kann.

a. Oberflächenladung, Unterlichtgeschwindigkeit. Indem wir in Gl. (84) und (85) für jeden Wert von τ, insbesondere für $\tau = \tau'$ und $\tau = \tau''$ setzen:

$$\cos\frac{n\tau}{2} = 1,\ \operatorname{tg}\frac{n\tau}{4} = \frac{n\tau}{4},\ \sin\frac{n\tau}{2} = \frac{n\tau}{2}$$

ergiebt sich unmittelbar:

$$\mathfrak{F}_s = 0,\ \mathfrak{F}_n = \frac{\varepsilon^2 n}{16\pi a^2}\left(\frac{c^2+v^2}{2v^2}\int_{\tau'}^{\tau''}\frac{c\tau-2a}{c\tau}\,d\tau-(\tau''-\tau')\right)$$

$$= \frac{\varepsilon^2 n}{16\pi a^2}\left(\frac{c^2-v^2}{2v^2}(\tau''-\tau')-\frac{a(c^2+v^2)}{cv^2}\log\frac{\tau''}{\tau'}\right).$$

Tragen wir die Näherungswerte (87) für τ', τ'' ein und benutzen die bequeme Abkürzung $\beta = v/c$, so wird

89) $$\mathfrak{F}_s = 0,\ \mathfrak{F}_n = \frac{\varepsilon^2 n}{8\pi ac}\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1+\beta^2}{2\beta^2}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right).$$

Der Tangentialwiderstand verschwindet also in erster Näherung, so daß in der Bahnrichtung keine äußere Kraft erforderlich ist, um eine Kreisbewegung von geringer Krümmung zu unterhalten. Dagegen ist in radialer Richtung eine äußere Kraft nötig, welche der elektromagnetischen Centrifugalkraft $\mathfrak{F}_n$ das Gleichgewicht hält. Wir setzen

$$\mathfrak{F}_a = -\mathfrak{F}_n = \mu p,\ p = \frac{v^2}{r} = vn,$$

so daß p die Centripetalbeschleunigung der Kreisbewegung und μ die scheinbare oder elektromagnetische Maße bedeutet.

Aus (89) ergiebt sich

89') $$\mu = \frac{\varepsilon^2}{8\pi ac^2}\left(-\frac{1}{\beta^2}+\frac{1+\beta^2}{2\beta^3}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right).$$

Da dieser Wert von dem in § 16, Gl. (71) berechneten verschieden ist, bezeichnen wir ihn im Gegensatz zu jenem als transversale Maße. Es rührt natürlich nur von den getroffenen Vernachlässigungen her, daß diese Maße von der Beschleunigung

$p = vn$ oder der Umlaufszahl $1/n$ unabhängig wird. Wenn wir genauer rechnen, indem wir die erste Näherung durch eine zweite corrigiren, würden wir insbesondere für die Umgebung der Lichtgeschwindigkeit keine reine Proportionalität zwischen $\mathfrak{F}_s$ und p und daher bei μ keine Unabhängigkeit von p finden.

b. Volumladung, Unterlichtgeschwindigkeit. In den Gl. (84'), (85') setzen wir wiederum $\cos n\tau = 1$, $\sin\frac{n\tau}{2} = \frac{n\tau}{2}$; die Grenzen τ', τ'' haben dann die einfachen Werte (87). Wir zerlegen f in einen constanten Teil $-8a^3/5$ und einen variabeln Teil $x^2\varphi(x)$, wobei das Argument von f mit x bezeichnet ist.

Den Beitrag des constanten Teiles von f zur rechten Seite von (84') oder (85') bezeichnen wir mit I, den des variabeln Teiles im ersten oder zweiten Integral mit II und III. In I rechnen wir mit der Integrationsvariabeln τ, in II und III mit der schon genannten Variabeln x. Es bedeutet daher x in II bez. III:

$$x = c\tau + T = c\tau + \frac{2v}{n}\sin\frac{n\tau}{2} = (c+v)\tau,$$

bez.

$$x = c\tau - T = c\tau - \frac{2v}{n}\sin\frac{n\tau}{2} = (c-v)\tau.$$

Man hat nun in (84')

$$\text{I} = -\frac{n^2}{2a^2c}\frac{8}{5}a^3\frac{c^2-v^2}{2v^2\left(\frac{n}{2}\right)^2}\int_{2a/(c+v)}^{2a/(c-v)}\frac{d\tau}{\tau^2} = -\frac{8}{5}\frac{c^2-v^2}{vc},$$

$$\text{II} = \frac{n^2}{2a^2c}\frac{c^2-v^2}{v\frac{n^2}{2}}\int_0^{2a}\left(x\frac{d\varphi}{dx}+2\varphi\right)dx - \frac{n^2}{2a^2c}\frac{(c^2-v^2)(c+v)}{2v^2\left(\frac{n}{2}\right)^2}\int_0^{2a}\varphi\,dx,$$

$$\text{III} = -\frac{n^2}{2a^2c}\frac{c^2-v^2}{v\frac{n^2}{2}}\int_0^{2a}\left(x\frac{d\varphi}{dx}+2\varphi\right)dx - \frac{n^2}{2a^2c}\frac{(c^2-v^2)(c-v)}{2v^2\left(\frac{n}{2}\right)^2}\int_0^{2a}\varphi\,dx,$$

also

$$\begin{aligned}\text{II}-\text{III} &= \frac{2}{a^2}\frac{c^2-v^2}{cv}\int\left(x\frac{d\varphi}{dx}+2\varphi\right)dx - \frac{2}{a^2}\frac{c^2-v^2}{vc}\int\varphi\,dx \\ &= \frac{2}{a^2}\frac{c^2-v^2}{vc}\int\left(x\frac{d\varphi}{dx}+\varphi\right)dx = \frac{2}{a^2}\frac{c^2-v^2}{vc}[x\varphi]_0^{2a} \\ &= +\frac{8}{5}\frac{c^2-v^2}{vc},\end{aligned}$$

somit

$$\text{90)} \qquad \mathrm{I} + \mathrm{II} - \mathrm{III} = 0, \quad \mathfrak{F}_t = 0.$$

Andererseits wird in (85'):

$$\mathrm{I} = -\frac{n^2}{2a^2 c}\,\frac{8}{5}\,a^3\,\frac{c^2+v^2}{nv^2}\int_{2/(c+v)}^{2/(c-v)}\frac{d\tau}{\tau} = -\frac{4}{5}\,\frac{na}{c}\,\frac{c^2+v^2}{v^2}\log\frac{c+v}{c-v},$$

$$\mathrm{II} = \frac{n^2}{2a^2 c}\,\frac{c-v}{nv}\int_0^{2a}\left(x^2\frac{d\varphi}{dx} + 2x\varphi\right)dx - \frac{n^2}{2a^2 c}\,\frac{c^2+v^2}{v^2 n}\int_0^{2a} x\varphi\,dx,$$

$$\mathrm{III} = -\frac{n^2}{2a^2 c}\,\frac{c+v}{nv}\int_0^{2a}\left(x^2\frac{d\varphi}{dx} + 2x\varphi\right)dx - \frac{n^2}{2a^2 c}\,\frac{c^2+v^2}{v^2 n}\int_0^{2a} x\varphi\,dx,$$

also

$$\mathrm{II} - \mathrm{III} = \frac{n}{a^2 v}\left[x^2\varphi\right]_0^{2a} = \frac{8}{5}\,\frac{an}{v},$$

mithin

$$\text{90')} \quad \mathfrak{F}_n = \frac{3\varepsilon^2}{32\pi a^4}(\mathrm{I} + \mathrm{II} - \mathrm{III}) = \frac{6}{5}\,\frac{\varepsilon^2 n}{8\pi a}\left(\frac{1}{v} - \frac{c^2+v^2}{2v^2 c}\log\frac{c+v}{c-v}\right).$$

Wiederum ist der Tangentialwiderstand der Kreisbewegung gleich Null. Die zur Ueberwindung der elektromagnetischen Centrifugalkraft $\mathfrak{F}_n$ erforderliche Kraft schreiben wir

$$\mathfrak{F}_e = -\mathfrak{F}_n = \mu p;$$

dabei ist die Beschleunigung $p = vn$ und es ergiebt sich für die elektromagnetische transversale Maße

$$\text{90'')} \qquad \mu = \frac{6}{5}\,\frac{\varepsilon^2}{8\pi a c^2}\left(-\frac{1}{\beta^2} + \frac{1+\beta^2}{2\beta^3}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right).$$

Das Verhältnis dieser Maße zu der bei Oberflächenladung, Gl. (89'), beträgt ebenso wie im Falle der longitudinalen Maße (§ 16) 6 : 5. Die Werte (89') und (90'') stimmen mit den zuerst von Abraham gefundenen Formeln überein, wenn man die verschiedene Wahl der Einheit für ε berücksichtigt. (vgl. den Schluß von § 16b).

c. Volumladung, Ueberlichtgeschwindigkeit. Indem wir wieder an (84') und (85') anknüpfen haben wir unter τ'' die Größe $2a/(v-c)$, unter x in dem zweiten Integrale die Variable $(v-c)\tau$ zu verstehen. Mit den früheren Bezeichnungen I, II, III

erhalten wir aus (84'):

$$\mathrm{I} = -\frac{n^2}{2a^2c}\frac{8}{5}a^2\frac{c^2-v^2}{2v^2\left(\frac{n}{2}\right)^2}\int_{2a/(c+v)}^{2a/(v-c)}\frac{d\tau}{\tau^2} = -\frac{8}{5}\frac{c^2-v^2}{v^2},$$

$$\mathrm{II} = \frac{n^2}{2a^2c}\frac{c^2-v^2}{v\frac{n^2}{2}}\int_0^{2a}\left(x\frac{d\varphi}{dx}+2\varphi\right)dx - \frac{n^2}{2a^2c}\frac{(c^2-v^2)(c+v)}{2v^2\left(\frac{n}{2}\right)^2}\int_0^{2a}\varphi\,dx,$$

$$\mathrm{III} = +\frac{n^2}{2a^2c}\frac{c^2-v^2}{v\frac{n^2}{2}}\int_0^{2a}\left(x\frac{d\varphi}{dx}+2\varphi\right)dx - \frac{n^2}{2a^2c}\frac{(c^2-v^2)(v-c)}{2v^2\left(\frac{n}{2}\right)^2}\int_0^{2a}\varphi\,dx,$$

also

$$\mathrm{II}-\mathrm{III} = -\frac{2(c^2-v^2)}{a^2v^2}\int_0^{2a}\varphi\,dx = -\frac{22}{5}\frac{c^2-v^2}{v^2}$$

und

$$91)\qquad \mathrm{I}+\mathrm{II}-\mathrm{III} = -6\frac{c^2-v^2}{v^2},\ \mathfrak{F}_t = -\frac{9\varepsilon^2}{16\pi a^2}\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right).$$

Daß der Tangentialwiderstand jetzt nicht verschwinden kann, folgt daraus, daß bei Ueberlichtgeschwindigkeit eine wenig gekrümmte ebenso wie eine geradlinige Bewegung keine mögliche kräftefreie Bewegung darstellt. In der That deckt sich Gl. (91) mit dem für die stationäre geradlinige Bewegung gefundenen Werte von $\mathfrak{F}$ (§ 15, Gl. (65)).

Behandelt man (85') in derselben Weise, so ergeben sich genau die unter b) genannten Ausdrücke von I, II, III, mit dem einzigen Unterschiede, daß unter dem Logarithmus-Zeichen zu ersetzen ist $c-v$ durch $v-c$. Infolge dessen können wir sogleich das Endresultat hinschreiben:

$$91')\qquad -\mathfrak{F}_n = \mu p,\ \mu = \frac{6}{5}\frac{\varepsilon^2}{8\pi ac^2}\left(-\frac{1}{\beta^2}+\frac{1+\beta^2}{2\beta^3}\log\frac{\beta+1}{\beta-1}\right).$$

Die Entwickelung dieses Wertes von μ nach absteigenden Potenzen von β $(\beta > 1)$ lautet:

$$\mu = \frac{6}{5}\frac{\varepsilon^2}{8\pi ac^2}\left(\left(1+\frac{1}{3}\right)\beta^{-4}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\beta^{-6}+\cdots\right);$$

in entsprechender Weise erhält man aus (90') bei Entwickelung

nach aufsteigenden Potenzen von β ($\beta < 1$):

$$\mu = \frac{6}{5}\frac{\varepsilon^2}{8\pi a c^2}\left(\left(1+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\beta^2+\cdots\right).$$

Die transversale elektromagnetische Maße ist daher (im Gegensatz zur longitudinalen) nicht nur bei Unterlichtgeschwindigkeit, sondern auch bei Ueberlichtgeschwindigkeit notwendig positiv.

Ganz andere Verhältnisse aber treten auf, wenn wir die Voraussetzung der geringen Krümmung oder der quasistationären Bewegungsform fallen lassen. Bei „wirklich normal-beschleunigten“ Bewegungen d. h. bei Kreisbahnen von geringer Krümmung kann die elektromagnetische Centrifugalkraft (und daher auch die hinzu zu definirende Maße) ihr Vorzeichen umkehren und insbesondere gleich Null werden. Wir kommen dann ähnlich wie Herglotz zu möglichen Kreisschwingungen des Elektrons, welche in radialer Richtung kräftefrei erfolgen.

§ 19. *Kraft und Drehmoment bei reiner Rotation. Elektromagnetisches Trägheitsmoment.*

Während wir in § 11 und 12 $\mathfrak{w} = 0$ setzten, sei jetzt $\mathfrak{v} = 0$; der Mittelpunkt des Elektrons bleibe also dauernd in Ruhe. Es wird dann

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{r}, \quad \mathfrak{A}_1 = 0.$$

Das skalare Potential φ nimmt seinen aus der Elektrostatik bekannten Wert an und liefert keinen Beitrag zur Kraft $\mathfrak{F}$ und zum Drehmomente $\mathfrak{N}$. Vielmehr kommt es lediglich auf das Potential $\mathfrak{A}_2$ an, aus welchem sich die Kraft pro Ladungseinheit nach (42) folgendermaßen berechnet:

$$\mathfrak{f} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial t} + \frac{1}{c}\left[[\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}]\operatorname{rot}\mathfrak{A}_2\right].$$

a) Oberflächenladung. Es ist jetzt am einfachsten, die expliciten Ausdrücke (28) und (30) für $\mathfrak{A}_2$ zu Grunde zu legen. Wir schreiben hiernach:

$$\mathfrak{A}_2 = \frac{\varepsilon}{8\pi a}\int_0^\infty [\mathfrak{w}_{t-\tau}\,\mathfrak{r}]\,\chi\,d\tau,$$

wobei

92) $$\chi = \frac{a^2+r^2-c^2\tau^2}{2r^3} \text{ bez. } \chi = 0,$$

je nachdem ein Dreieck aus den Strecken $a, r, c\tau$ möglich ist oder nicht. Man bildet leicht

$$\operatorname{rot}\mathfrak{A}_2 = \frac{\varepsilon}{8\pi a}\int_0^\infty \left\{2\mathfrak{w}_{t-\tau}\chi + [\mathfrak{r}[\mathfrak{w}_{t-\tau}\mathfrak{r}]]\frac{1}{r}\frac{d\chi}{dr}\right\}d\tau;$$

da nach einer bekannten Formel

$$[\mathfrak{r}[\mathfrak{w}_{t-\tau}\mathfrak{r}]] = \mathfrak{w}_{t-\tau}r^2 - \mathfrak{r}(\mathfrak{w}_{t-\tau}\mathfrak{r}),$$

kann man hiefür auch schreiben:

93) $$\operatorname{rot}\mathfrak{A}_2 = \frac{\varepsilon}{8\pi a}\int_0^\infty \left\{\mathfrak{w}_{t-\tau}\left(2\chi + r\frac{d\chi}{dr}\right) - \frac{\mathfrak{r}}{r}(\mathfrak{w}_{t-\tau}\mathfrak{r})\frac{d\chi}{dr}\right\}d\tau.$$

Gehen wir von $\mathfrak{f}$ zur resultirenden Kraft

$$\mathfrak{F} = \operatorname*{Lim}_{r=a}\frac{\varepsilon}{4\pi r^2}\int \mathfrak{f}\,d\sigma$$

über und bezeichnen wir die über die Kugel vom Radius r erstreckten Mittelwerte durch Ueberstreichen, so haben wir

$$\frac{c}{\varepsilon}\mathfrak{F} = -\frac{\partial}{\partial t}\overline{\mathfrak{A}_2} + \overline{[[\mathfrak{w}_t\mathfrak{r}]\operatorname{rot}\mathfrak{A}_2]}.$$

Auf unserer Kugelfläche ist r selbst sowie χ und $d\chi/dr$ constant, $\mathfrak{r}$ dagegen veränderlich. Lösen wir $\mathfrak{r}$ in seine Componenten x, y, z auf, so enthält

$\mathfrak{A}_2$ lediglich erste Potenzen von $x\,y\,z$,
$[[\mathfrak{w}\mathfrak{r}]\operatorname{rot}\mathfrak{A}_2]$ „ „ und dritte Potenzen von $x\,y\,z$.

Man erkennt aber sofort, daß die Mittelwerte aller ungeraden Potenzen der Coordinaten verschwinden, z. B. daß

$$\overline{x} = 0, \ldots, \overline{x^3} = 0, \overline{x^2 y} = 0, \ldots$$

Daraus ergiebt sich, daß **bei reiner Rotation $\mathfrak{F}$ verschwindet**, was ja sehr verständlich ist.

Wir gehen jetzt zum resultirenden Drehmomente

$$\mathfrak{N} = \operatorname*{Lim}_{r=a}\frac{\varepsilon}{4\pi r^2}\int [\mathfrak{r}\mathfrak{f}]\,d\sigma$$

über und erhalten zunächst:

$$\frac{c}{\varepsilon}\mathfrak{N} = \operatorname*{Lim}_{r=a}\left\{-\frac{\partial}{\partial t}\overline{[\mathfrak{r}\mathfrak{A}_2]} + \overline{\left[\mathfrak{r}[[\mathfrak{w}_t\mathfrak{r}]\operatorname{rot}\mathfrak{A}_2]\right]}\right\}.$$

Das letzte dreifache Vektorprodukt läßt sich vereinfachen; es ist nach der schon benutzten Regel:

$$[[\mathfrak{w}_t \mathfrak{r}] \operatorname{rot} \mathfrak{A}_2] = \mathfrak{r}(\mathfrak{w}_t \operatorname{rot} \mathfrak{A}_2) - \mathfrak{w}_t(\mathfrak{r} \operatorname{rot} \mathfrak{A}_2),$$

und daher wegen $[\mathfrak{r}\mathfrak{r}] = 0$ und Gl. (93):

$$\begin{aligned}\left[\mathfrak{r}[[\mathfrak{w}_t \mathfrak{r}] \operatorname{rot} \mathfrak{A}_2]\right] &= -[\mathfrak{r}\mathfrak{w}_t](\mathfrak{r} \operatorname{rot} \mathfrak{A}_2) \\ &= -\frac{\varepsilon}{8\pi\alpha}[\mathfrak{r}\mathfrak{w}_t]\int_0^\infty (\mathfrak{r}\mathfrak{w}_{t-\tau}) 2\chi\, d\tau.\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ebenso wie $[\mathfrak{r}\mathfrak{A}_2]$ ist in den auf der Kugeloberfläche veränderlichen Componenten $x\,y\,z$ von $\mathfrak{r}$ vom zweiten Grade; die Mittelwerte der geraden Potenzen von $x\,y\,z$ sind aber im Allgemeinen nicht Null. Vielmehr hat man

$$\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2} = \frac{r^2}{3}, \quad \overline{xy} = \overline{yz} = \overline{zx} = 0.$$

Daraus folgt:

$$\overline{[\mathfrak{r}\mathfrak{w}_t](\mathfrak{r}\mathfrak{w}_{t-\tau})} = \frac{r^2}{3}[\mathfrak{w}_{t-\tau}\mathfrak{w}_t]$$

$$\overline{[\mathfrak{r}[\mathfrak{w}_{t-\tau}\mathfrak{r}]]} = \mathfrak{w}_{t-\tau} r^2 - \overline{\mathfrak{r}(\mathfrak{w}_{t-\tau}\mathfrak{r})} = \tfrac{2}{3}\mathfrak{w}_{t-\tau} r^2.$$

Sonach erhält man:

$$94) \quad -\frac{12\pi ac}{\varepsilon^2}\mathfrak{N} = \operatorname*{Lim}_{r=a}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty \mathfrak{w}_{t-\tau} r^2 \chi\, d\tau + \int_0^\infty [\mathfrak{w}_{t-\tau}\mathfrak{w}_t] r^2 \chi\, d\tau\right\}.$$

Prüft man die Möglichkeit des Dreiecks aus den Seiten a, r und $c\tau$, so sieht man, daß dieses möglich ist, so lange $|a-r| < c\tau < a+r$. Die Grenzen dieses Bereiches gehen über in $\tau = 0$ und $\tau = 2a/c$, wenn man $r = a$ werden läßt; dabei kann der Grenzübergang ohne Weiteres unter dem Integralzeichen vollzogen werden. Indem man für χ den Wert (92) einsetzt und die Winkelbeschleunigung $d\mathfrak{w}/dt$ mit $\mathfrak{q}$ bezeichnet, erhält man:

$$95) \quad -\frac{24\pi a^2 c}{\varepsilon^2}\mathfrak{N} = \int_0^{2a/c}\{\mathfrak{q}_{t-\tau} + [\mathfrak{w}_{t-\tau}\mathfrak{w}_t]\}\{2a^2 - c^2\tau^2\}\, d\tau.$$

Handelt es sich um stationäre Rotation, so ist

$$\mathfrak{q}_{t-\tau} = 0, \quad \mathfrak{w}_{t-\tau} = \mathfrak{w}_t, \quad \text{also } [\mathfrak{w}_{t-\tau}\mathfrak{w}_t] = 0$$

und daher

$$\mathfrak{N} = 0.$$

Die stationäre Rotation ist daher eine mögliche kräftefreie Bewegung des Elektrons.

Ist die Rotation eine *gleichförmig beschleunigte*, wobei die Axe der Beschleunigung mit derjenigen der augenblicklichen Umdrehung nicht zusammenzufallen braucht, so haben wir:

$$\mathfrak{q}_{t-\tau} = \mathfrak{q}_t, \quad \mathfrak{w}_{t-\tau} = \mathfrak{w}_t - \tau \mathfrak{q}_t;$$

wegen

$$\int_0^{2a/c} (2a^2 \quad c^2\tau^2)\, d\tau = \frac{4}{3}\frac{a^2}{c}, \int_0^{2a/c} (2a^2 - c^2\tau^2)\, \tau\, d\tau = 0$$

erhält man

$$96) \qquad -\mathfrak{N} = \Theta \mathfrak{q}_t, \quad \Theta = \frac{\varepsilon^2 a}{18\pi c^2},$$

Θ kann als *scheinbares elektromagnetisches Trägheitsmoment bezeichnet werden. Die gleichförmig beschleunigte Rotation ist also keine mögliche kräftefreie Bewegung des Elektrons.* Sie benötigt vielmehr ein äußeres *Drehmoment* $+\mathfrak{N}$, welches das von dem eigenen Felde des Elektrons herrührende Drehmoment $-\mathfrak{N}$ in jedem Augenblicke in's Gleichgewicht setzt.

b) *Volumladung.* Um die vorstehenden Rechnungen auf den Fall von Volumladung zu übertragen, haben wir nur die Bedeutung von χ abzuändern. Im Anschluß an die Gl. (29), (31) und (31′) verstehen wir unter χ jetzt die folgende Funktion:

$$92') \qquad \chi = \frac{3}{2}\left(\frac{a^2 + 2r^2 - 2c^2\tau^2}{4r^3} - \frac{(r - c\tau)^2 (3r + c\tau)}{4a^2 r^3}\right)$$

(Dreieck $a, r, c\tau$ möglich)

$$\chi = \frac{6c\tau}{a^2} \text{ oder } = 0$$

Dreieck $a, r, c\tau$ unmöglich, a größte oder nicht größte Seite). Die obigen Ausdrücke für $\mathfrak{A}_2$, rot $\mathfrak{A}_2$, $[\mathfrak{r}[[\mathfrak{w}_t \mathfrak{r}] \text{ rot } \mathfrak{A}_2]]$ sind dann direkt auf den jetzigen Fall zu übernehmen.

Wenn wir die Integration über das Volumen des Elektrons so disponiren, daß wir zunächst über eine Kugel vom Radius r und dann nach r von 0 bis a integriren, so sehen wir unmittelbar wie unter a), daß die mit ungeraden Potenzen von $x\, y\, z$ behafteten Glieder Null ergeben und daß daher, wie selbstverständlich,

$$\mathfrak{F} = 0$$

wird.

Was die geraden Potenzen von $x\,y\,z$ betrifft, so fanden wir oben für den über die Kugelfläche r erstreckten Mittelwert

$$\overline{x^2} = \frac{r^2}{3}, \text{ d. h. } \int x^2 d\sigma = 4\pi \frac{r^4}{3}.$$

Daraus folgt für das über das Innere der Kugel a erstreckte Integral von $x^2\chi$, wo χ (Gl. (92')) nur von $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ abhängt:

$$\int x^2 \chi\, dS = \int_0^a \chi\, dr \int x^2\, d\sigma = \frac{4\pi}{3}\int_0^a \chi r^4\, dr,$$

und daher für den räumlichen Mittelwert:

$$\overline{x^2\chi} = \frac{3}{4\pi a^3}\int x^2 \chi\, dS = \frac{1}{a^3}\int_0^a \chi r^4\, dr.$$

Vergleicht man diesen Wert mit dem unter a) benutzten Mittelwerte $\overline{x^2\chi} = r^2\chi/3$, so erkennt man: um die früheren Rechnungen auf den jetzigen Fall übertragen zu können, hat man nur in (94) χ zu ersetzen durch $3\chi r^2 dr/a^3$ und hat die Integration nach r von 0 bis a hinzuzufügen, sowie das Limeszeichen wegzulassen. Es ergiebt sich:

$$94') \quad -\frac{4\pi a^4 c}{\varepsilon^2}\mathfrak{N} = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty \mathfrak{w}_{t-\tau}\, d\tau \int_0^a \chi r^4\, dr + \int_0^\infty [\mathfrak{w}_{t-\tau}\, \mathfrak{w}_t]\, d\tau \int_0^a \chi r^4 dr.$$

Hinsichtlich der noch erforderlichen Auswertung des Integrales $\int \chi r^4 dr$ unterscheiden wir zunächst die folgenden drei Fälle (vgl. Fig. 7, wo $c\tau$ als Abscisse, r als Ordinate aufgetragen ist):

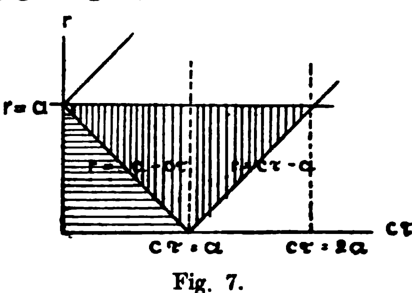


Fig. 7.

1. $c\tau < a$. Das Dreieck $r, a, c\tau$ ist unmöglich, wenn $r < a - c\tau$ (wagrecht schraffirtes Gebiet in Fig. 7); in diesem Falle gilt für χ der Wert $6c\tau/a^3$, da a die grösste der drei Seiten $a, c\tau, r$. Für den Rest des Integrationsintervalles von $r = a - c\tau$ bis $r = a$ (senkrecht schraffirtes Gebiet in Fig. 7), dagegen ist jenes Dreieck möglich und es gilt für χ der Wert (92'). Wir haben also, solange $c\tau < a$:

$$\int_0^a \chi r^4 dr = \frac{6c\tau}{a^3}\int_0^{a-c\tau} r^4 dr - F(a - c\tau),$$

wenn wir die Abkürzung einführen:

$$F(x) = \frac{3}{8}\int_a^x \left(a^2 + 2r^2 - 2c^2\tau^2 - \frac{(r-c\tau)^3(3r+c\tau)}{a^2}\right) r\,dr.$$

2. $a < c\tau < 2a$. Die Dreiecksbildung ist unmöglich und es ist $\chi = 0$, wenn $r < -a + c\tau$. (Das entsprechende Gebiet ist in Fig. 7 nicht schraffirt). Dagegen gilt für χ der Wert (92′), für den Rest des Integrationsintervalles $-a + c\tau < r < a$ (senkrecht schraffirt). Es wird daher jetzt:

$$\int_0^a \chi r^4 dr = -F(c\tau - a).$$

3. $2a < c\tau$. Jetzt ist durchweg $\chi = 0$ und daher auch $\int \chi r^4 dr = 0$.

Weiterhin zeigt man leicht, daß die unter 1) und 2) angegebenen Ausdrücke thatsächlich nicht verschieden sind, so daß nur die beiden Fälle $c\tau \gtrless 2a$ auseinander zu halten sind. Zu dem Zwecke bilde man etwa die Differenz der unter 1) und 2) gegebenen Ausdrücke:

94″) $$\frac{6c\tau}{a^2}\int_0^{a-c\tau} r^4 dr + F(c\tau - a) - F(a - c\tau).$$

Um $F(c\tau - a) - F(a - c\tau)$ zu berechnen, hat man in dem Integral $F(x)$ die untere Grenze durch $a - c\tau$, die obere durch $c\tau - a$ zu ersetzen; bei der Integration zwischen diesen Grenzen geben alle ungeraden Potenzen den Beitrag Null; man kann also setzen:

$$F(c\tau - a) - F(a - c\tau)$$
$$= -\frac{3}{8a^2}\int_{a-c\tau}^{c\tau - a} (r^4 c\tau - 9r^4 c\tau + 3r^2 c^3\tau^3 - 3r^2 c^3\tau^3)\, d\tau$$
$$= \frac{3c\tau}{a^2}\int_{a-c\tau}^{c\tau-a} r^4 dr = \frac{6c\tau}{a^2}\int_0^{c\tau-a} r^4 dr.$$

Mithin verschwindet in der That der Ausdruck (94″) und man hat einfach

$$\text{für } c\tau < 2a \ldots \int_0^a \chi r^4 dr = -F(c\tau - a)$$
$$\text{„} \quad c\tau > 2a \ldots \int_0^a \chi r^4 dr = 0.$$

Rechnet man das für $F(x)$ angegebene Integral aus, indem man $x = c\tau - a$ setzt, so ergiebt sich:

$$F(c\tau - a) = \frac{3}{16a^2}\left(\frac{1}{5}(c\tau)^6 - 2a^2(c\tau)^4 + 8a^4(c\tau)^2 - \frac{32}{5}a^5 c\tau\right).$$

Aus (94') erhält man daher:

$$95') \qquad \frac{64\pi a^6 c}{3\varepsilon^2}\mathfrak{N} = \int_0^{2a/c}\{\mathfrak{q}_{t-\tau}+[\mathfrak{w}_{t-\tau}\mathfrak{w}_t]\}\,\Phi(\tau)\,d\tau$$

mit der Abkürzung

$$95'') \qquad \Phi(\tau) = \frac{1}{5}(c\tau)^6 - 2a^2(c\tau)^4 + 8a^4(c\tau)^2 - \frac{32}{5}a^5 c\tau.$$

Bei gleichförmiger Rotation ($\mathfrak{q}_{t-\tau} = 0$, $\mathfrak{w}_{t-\tau} = \mathfrak{w}_t$) haben wir natürlich wieder $\mathfrak{N} = 0$, d. h. eine mögliche kräftefreie Bewegung.

Bei gleichförmig beschleunigter Rotation ($\mathfrak{q}_{t-\tau} = \mathfrak{q}_t$, $\mathfrak{w}_{t-\tau} = \mathfrak{w}_t - \tau\mathfrak{q}_t$) ergiebt sich

$$\frac{64\pi a^6 c}{3\varepsilon^2}\mathfrak{N} = \mathfrak{q}_t\int_0^{2a/c}\Phi(\tau)\,d\tau - [\mathfrak{q}_t\mathfrak{w}_t]\int_0^{2a/c}\Phi(\tau)\,\tau\,d\tau.$$

Man findet aber leicht durch Integration von (95''), daß:

$$\int_0^{2a/c}\Phi(\tau)\,d\tau = -\frac{64}{3.35}\frac{a^7}{c}, \quad \int_0^{2a/c}\Phi(\tau)\tau\,d\tau = 0$$

Infolgedessen kann man im vorliegenden Falle schreiben:

$$96') \qquad -\mathfrak{N} = \Theta\mathfrak{q}_t, \quad \Theta = \frac{\varepsilon^2 a}{35\pi c^3}.$$

Dieser Wert des „elektromagnetischen Trägheitsmomentes" ist, ebenso wie der frühere, Gl. (96), bereits von Abraham[1]) für quasistationäre (unendlich wenig beschleunigte) Drehung abgeleitet worden; unsere Entwickelungen zeigen, daß dieselben Werte auch für gleichförmige Beschleunigung von beliebigem Betrage gültig sind.

§ 20. *Kräftefreie Rotationsschwingungen.*

Die Möglichkeit von kräftefreien Schwingungen des Elektrons darf ein ganz besonderes Interesse beanspruchen, weil hierin am deutlichsten der Gegensatz zwischen materieller und Elektronen-Mechanik zum Ausdruck kommt. In der Mechanik der Materie sind Schwingungen eines Punktes oder Systems um eine Ruhelage nur möglich, wenn dieser Lage ein Minimum der potentiellen

1) L. c. p. 171.

Energie entspricht, d. h. wenn jeder Entfernung aus der fraglichen Lage eine äußere Kraft nach Art der Reaktion einer elastischen Befestigung entgegenwirkt. In der Elektronenmechanik dagegen sind solche Schwingungen ohne irgend ein äußeres Kraftfeld möglich. Das bewegte Elektron schafft sich unter Umständen selbst die elastische Gegenkraft, welche es zurücktreibt. Am anschaulichsten liegen vielleicht die Verhältnisse bei cirkularen Schwingungen, wo wir sie in rohen Umrissen etwa so beschreiben können: Indem das Elektron die eine Hälfte einer Kreisbahn durcheilt, entsteht eine im Aether inducirte Wirkung, die sich ausbreitet. Wenn das Elektron auf die andere Hälfte der Kreisbahn übergegangen ist, fängt es jene Wirkung zum Teil auf. Eine mögliche kräftefreie Kreisbahn liegt nun vor, wenn der aufgefangene Betrag der Kraft gerade ausreicht, um die elektromagnetische Trägheit der fortgesetzten Kreisbewegung zu compensiren und das Elektron über die andere Hälfte der Kreisbahn hinüber zu treiben. Schon diese rohe Ueberlegung zeigt allerdings, daß die Schwingungsperioden, auf die man so geführt wird, sehr klein werden, nämlich von der Ordnung derjenigen Zeit, in der das Licht die fragliche Bahn überstreicht, also viel kleiner, als man es im Interesse der Erklärung optischer Erscheinungen wünschen möchte. Immerhin scheint die Möglichkeit solcher Schwingungen darzuthun, daß die „elastische Koppelung" des Elektrons, die man für die Theorie der dielektrischen Erregung sowie für die der Dispersion und des Zeeman-Effektes nötig hat und die hier die Rolle eines der Elektronentheorie fremden „deus ex machina" spielt, entbehrlich werden kann, daß man nämlich Aussicht hat, diese elastische Gegenkraft aus den Bewegungen des Elektrons selbst zu deduciren. Nur auf diesem Wege ist eine restlose Erklärung des Zeeman-Effektes und der Spektrallinien denkbar.

Den einfachsten Typus kräftefreier Schwingungen bilden die Rotationsschwingungen, bei denen wir an die Formeln des vorigen Paragraphen anknüpfen. Wir setzen:

a) Oberflächenladung voraus, lassen den Mittelpunkt des Elektrons in Ruhe und nehmen an, daß die Drehaxe dauernd ihre Richtung beibehält, während die Größe der Drehgeschwindigkeit beliebig wechselt. In Gl. (95) des vorigen Paragraphen wird alsdann $[\mathfrak{w}_{t-\tau}\mathfrak{w}_t] = 0$. Da wir eine ohne äußeren Kraftaufwand mögliche Schwingung suchen, setzen wir gleichzeitig $\mathfrak{N} = 0$. Wir erhalten so aus (95):

$$97)\qquad \int_0^{2a/c} \mathfrak{q}_{t-\tau}\left\{2a^2 - c^2\tau^2\right\} d\tau = 0.$$

Die Bewegungsgleichung erscheint hier als Integralgleichung. Man kann sie leicht in die Form einer Funktionalgleichung umschreiben. Dabei ist es bequem, sie vorher einmal nach t zu differenziren; da

$$\frac{d\mathfrak{q}_{t-\tau}}{dt} = \frac{-d\mathfrak{q}_{t-\tau}}{d\tau},$$

erhält man durch partielle Integrationen mit der Abkürzung $\tau' = 2a/c$:

$$\int_0^{\tau'} \frac{d\mathfrak{q}_{t-\tau}}{dt} \{2a^2 - c^2\tau^2\}\, d\tau$$

$$= 2a^2(\mathfrak{q}_{t-\tau'} + \mathfrak{q}_t) + 4ac\,\mathfrak{w}_{t-\tau'} + 2c^2(\varphi_{t-\tau'} - \varphi_t) = 0$$

oder, bei durchgehender Benutzung der Abkürzung τ':

98) $$\frac{\tau'^2}{4}(\mathfrak{q}_{t-\tau'} + \mathfrak{q}_t) + \tau'\,\mathfrak{w}_{t-\tau'} + \varphi_{t-\tau} - \varphi_t = 0.$$

Diese Gleichung setzt den Drehwinkel φ und seine Differentialquotienten $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{q}$ in den Zeitpunkten t und $t - \tau'$ mit einander in Beziehung.

Will man dieselbe Gleichung formal in eine reine Differentialgleichung umschreiben, d. h. in eine solche, die nur auf einen Zeitpunkt bezügliche Größen enthält, so wird man entwickeln:

$$\varphi_t = \varphi_{t-\tau'} + \tau'\mathfrak{w}_{t-\tau'} + \frac{\tau'^2}{2}\mathfrak{q}_{t-\tau'} + \cdots$$

$$\mathfrak{q}_t = \mathfrak{q}_{t-\tau'} + \tau'\,\dot{\mathfrak{q}}_{t-\tau'} + \frac{\tau'^2}{2}\ddot{\mathfrak{q}}_{t-\tau'} + \cdots;$$

man findet, wenn man den Hinweis auf den Zeitpunkt $t - \tau'$ als nunmehr belanglos fortläßt, nach Division mit τ'^2:

$$\left(\frac{1}{4}\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!}\right)\dot{\mathfrak{q}} + \left(\frac{1}{4}\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}\right)\tau'\ddot{\mathfrak{q}} + \left(\frac{1}{4}\frac{1}{3!} - \frac{1}{5!}\right)\tau'^2\dddot{\mathfrak{q}} + \cdots = 0.$$

Wir können diese Gl. ohne Weiteres dreimal nach t integriren, wobei die Integrationsconstanten wegen der vorausgesetzten Periodicität der Bewegung gleich Null zu nehmen sind, und erhalten:

99) $$\left(\frac{1}{4}\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!}\right)\varphi + \left(\frac{1}{4}\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}\right)\tau'\mathfrak{w} + \left(\frac{1}{4}\frac{1}{3!} - \frac{1}{5!}\right)\tau'^2\mathfrak{q} + \cdots = 0.$$

Als reine Differentialgleichung geschrieben wird also unsere Bewegungsgleichung von unendlich hoher Ordnung.

Sie läßt sich ebenso lösen, wie eine lineare Differentialgleichung mit constanten Coefficienten von endlicher Ordnung, nämlich durch den Ansatz:

$$\varphi = Ae^{\alpha t} = Ae^{\beta \frac{t}{\tau'}};$$

die Größe $\beta = \alpha\tau'$, welche natürlich nichts mit dem früher so bezeichneten Geschwindigkeitsverhältnis v/c zu thun hat, ist aus der Potenzreihe zu bestimmen:

$$\left(\frac{1}{4}\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!}\right)\beta + \left(\frac{1}{4}\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}\right)\beta^2 + \cdots = 0$$

Summirt man die Reihe in naheliegender Weise durch die Exponentialfunktion, so erhält man die folgende transcendente Gleichung für die Eigenschwingungen:

$$\frac{1}{4}(e^{\beta} - 1) - \frac{e^{\beta} - 1 - \beta - \frac{1}{2}\beta^2}{\beta^2} = 0$$

d. h.:

100) $$e^{\beta} = \frac{2 + \beta}{2 - \beta}.$$

Nach Analogie mit den linearen Differentialgleichungen endlicher Ordnung wird man schließen dürfen, daß sich die allgemeinste Rotationsbewegung von fester Axe mittels der Wurzeln β_i dieser Gleichung und willkürlicher Constanten A_i in folgender Weise darstellen läßt:

$$\varphi = \sum A_i e^{\beta_i t/\tau'}.$$

Uebrigens ist die Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung hierbei keineswegs unentbehrlich. Macht man nämlich in der gleichwertigen Funktionalgleichung (98) den Ansatz $\varphi_t = Ae^{\beta t/\tau'}$ so findet man unmittelbar:

$$\frac{\beta^2}{4}(e^{-\beta} + 1) + \beta e^{-\beta} + e^{-\beta} - 1 = 0,$$

was mit (100) übereinstimmt.

Um die Gl. der Eigenschwingungen zu lösen, rechnen wir aus ihr β aus und erhalten

$$\frac{\beta}{2} = \frac{e^{\beta/2} - e^{-\beta/2}}{e^{\beta/2} + e^{-\beta/2}};$$

setzen wir also noch $\beta/2 = i\gamma$, so entsteht die in der mathema-

tischen Physik wohlbekannte Gleichung:

101) $$\gamma = \operatorname{tg} \gamma.$$

Nach der üblichen graphischen Methode findet man in einem Diagramm (γ, y) unendlich viele reelle Wurzeln φ als Schnittpunkte der Geraden $y = \gamma$ mit der Curve $y = tg\gamma$, zu denen im Besonderen auch $\gamma = 0$ gehört. Der asymptotische Wert dieser Wurzeln für großes positives oder negatives m wird

$$\gamma = (2m+1)\frac{\pi}{2}.$$

Die kleinste nicht-verschwindende Wurzel beträgt, wie man leicht aus den trigonometrischen Tafeln entnimmt, etwa $\gamma = 4{,}50$.

Daß Gleichung (101) keine rein imaginären oder complexen Wurzeln haben kann, folgt aus der Betrachtung des Integrales

$$\int_0^1 \sin \alpha\gamma \sin \alpha\bar{\gamma}\, d\alpha,$$

welches, wenn γ und $\bar{\gamma}$ conjugirt imaginäre oder conjugirt complexe Wurzeln sind, einerseits nach Gl. (101) verschwinden müßte, andrerseits notwendig positiv ist.

Unser Elektron ist hiernach einer unendlichen Serie freier Schwingungen fähig, deren jede rein harmonisch und ungedämpft erfolgt. Nach dem ursprünglichen Ansatz $\varphi = Ae^{\beta t/\tau'} = A^{2i\gamma t/\tau'}$ bestimmt sich die Schwingungsdauer τ aus der Gl.

$$\frac{2\pi i}{\tau} = \frac{2i\gamma}{\tau'},\quad \tau = \frac{\pi\tau'}{\gamma};$$

die Dauer der Grundschwingung und das asymptotische Gesetz für die Dauer der Oberschwingungen wird daher:

$$\tau_1 = \frac{\pi\tau'}{4{,}50},\quad \tau_m = \frac{2\tau'}{2m+1}.$$

Ziehen wir es vor, die Schwingung wie in der Optik gebräuchlich, durch ihre „Wellenlänge" zu charakterisiren, so werden wir setzen $\lambda = c\tau$, und erhalten wegen der Bedeutung von $\tau' = 2a/c$

$$\lambda_1 = \frac{2\pi a}{4{,}50},\quad \lambda_m = \frac{4a}{4m+1}.$$

Diese Wellenlängen sind außerordentlich klein, da diejenige

der Grundschwingung nur von der Größenordnung des Elektronendurchmessers wird. Das „Spektrum“ des rotirenden Elektrons, d. h. die Gesamtheit der möglichen Schwingungszahlen, bildet eine unendliche Serie, deren Häufungsstelle im Unendlichen liegt und deren Linien asymptotisch äquidistant werden.

Mit den optischen Spektren bietet hiernach der vorstehend betrachtete Vorgang noch keine befriedigende Analogie dar, einerseits wegen der Höhe der Schwingungszahlen, andrerseits wegen der Anordnung der Spektrallinien. Es kommt hinzu, daß unsere Schwingungen ungedämpft verlaufen und daher keine Ausstrahlung geben.

Trotzdem berechtigen die hier gemachten Erfahrungen, wie mir scheint, zu einem wichtigen Rückschluß auf das Problem der Spektrallinien. Man pflegt in der Theorie der Dispersion dem schwingenden Molekül (oder Elektron) soviel Freiheitsgrade zuzusprechen, als das Spektrum Linien zählt, auf Grund eines Satzes über materielle Systeme, wonach die Anzahl der Eigenschwingungen eines jeden Systems mit der Anzahl seiner Freiheitsgrade übereinstimmt. Im Gegensatz hierzu sahen wir oben, daß das um eine feste Axe rotirende Elektron, dem ersichtlich nur ein Grad der Bewegungsfreiheit zukommt, bereits unendlich viele freie Schwingungen aufweist. Der tiefere Grund hiefür liegt, vom Standpunkt der allgemeinen Mechanik aus, offenbar darin, daß es nicht auf das Elektron allein, sondern auf das System Elektron + Aether ankommt, und daß wir dem Aether selbstverständlich unendlich viele (elektromagnetische) Freiheitsgrade zuschreiben müssen.

Es scheint hiernach nicht sehr gewagt, auch für diejenigen, zur Zeit noch unbekannten Elektronenschwingungen, welche den Spektrallinien entsprechen, die Vermutung auszusprechen: Zu jedem besonderen Schwingungsmodus des Elektrons oder zu jedem Grade der Bewegungsfreiheit desselben gehören unendlich viele Spektrallinien, nämlich die Linien ein und derselben Serie. Die Anzahl der Freiheitsgrade des Elektrons ist nicht gleich der Anzahl der Spektrallinien, sondern gleich der Anzahl der Serien, (wobei man jede Serie mit derjenigen Multiplicität zählen wird, die sich bei der Zeeman-Zerlegung für jede ihrer Linien ergiebt).

b) Volumladung. Ein wesentlicher Unterschied zwischen den freien Rotationsschwingungen einer Oberflächenladung und einer Volumladung besteht darin, daß die letzteren notwendig

gedämpft erfolgen, die ersteren, wie wir sahen, zeitlich ungedämpft verlaufen. Eine Erklärung dieses Unterschiedes wird sich aus der Energiewanderung in beiden Fällen nachweisen lassen, auf die wir aber hier nicht eingehen können[1]).

Wir haben jetzt an Gl. (95') des vorigen § anzuknüpfen, daselbst $\mathfrak{N} = 0$ zu setzen (kräftefreie Schwingung) und das Glied mit $[\mathfrak{w}_{t-\tau}\,\mathfrak{w}_t]$ zu streichen (Rotation um eine der Richtung nach feste Axe). Die Bewegungsgleichung des rotirenden Elektrons schreibt sich dann zunächst als Integralgleichung in der Form:

97') $$\int_0^{\tau'} \mathfrak{q}_{t-\tau}\,\Phi(\tau)\,d\tau = 0,\quad \tau' = 2a/c$$

Wir gehen von hier aus durch fortgesetzte partielle Integration zu einer vom Integralzeichen freien Funktionalgleichung über. Zu dem Zwecke ist es bequem, die Gl. vorher fünfmal nach t zu differenziren. Da $\partial\mathfrak{q}/\partial t = -\partial\mathfrak{q}/\partial\tau$, erhält man zunächst nach Eintragung des Wertes von Φ aus Gl. (95''):

$$\int_0^{\tau'} \frac{\partial^5 \mathfrak{q}_{t-\tau}}{\partial\tau^5}\left(\frac{1}{5}(c\tau)^6 - 2a^2(c\tau)^4 + 8a^4(c\tau)^2 - \frac{32}{5}a^5 c\tau\right)d\tau = 0.$$

Auf das erste Glied von Φ angewandt liefert nun der Proceß der partiellen Integration, wenn nachträglich wieder die Differentialquotienten nach τ durch solche nach t ersetzen werden:

$$\int_0^{\tau'} \frac{\partial^5 \mathfrak{q}_{t-\tau}}{\partial\tau^5}\tau^6 d\tau = \ddot{\ddot{\mathfrak{q}}}_{t-\tau'}\tau'^6 + 6\dddot{\mathfrak{q}}_{t-\tau'}\tau'^5 + 6.5\,\ddot{\mathfrak{q}}_{t-\tau'}\tau'^4$$
$$+ 6.5.4.\dot{\mathfrak{q}}_{t-\tau'}\tau'^3 + 6.5.4.3\,\mathfrak{q}_{t-\tau'}\tau'^2 + 6.5.4.3.2\,\mathfrak{w}_{t-\tau'}\tau'$$
$$+ 6.5.4.3.2.1.(\varphi_{t-\tau'} - \varphi_t).$$

Ebenso erhalten wir, dem zweiten Gliede von Φ entsprechend:

$$\int_0^{\tau'} \frac{\partial^5 \mathfrak{q}_{t-\tau}}{\partial\tau^5}\tau^4 d\tau = \ddot{\ddot{\mathfrak{q}}}_{t-\tau'}\tau'^4 + 4\dddot{\mathfrak{q}}_{t-\tau'}\tau'^3 + 4.3\,\ddot{\mathfrak{q}}_{t-\tau'}\tau'^2$$
$$+ 4.3.2\,\dot{\mathfrak{q}}_{t-\tau'}\tau' + 4.3.2.1\,(\mathfrak{q}_{t-\tau'} - \mathfrak{q}_t)$$

u. s. f. In der Summe ergiebt sich, wenn man den gemeinsamen Faktor c^6 unterdrückt:

98') $$\frac{1}{5}\tau'^5\dddot{\mathfrak{q}}_t + \tau'^4(\ddot{\mathfrak{q}}_{t-\tau'} - \mathfrak{q}_t) + 12\,\tau'^3\dot{\mathfrak{q}}_{t-\tau'}$$
$$+ 12\,\tau'^2(5\,\mathfrak{q}_{t-\tau'} + \mathfrak{q}_t) + 144\,\tau'\,\mathfrak{w}_{t-\tau'} + 144(\varphi_{t-\tau'} - \varphi_t) = 0.$$

1) Ich habe dies inzwischen in einem Vortrag vor dem 3. internat. Mathematiker-Congreß zu Heidelberg ausgeführt, vgl. die Verhandlgn. d. Congr.

Dies die gesuchte **Funktionalgleichung.** Wir sehen davon ab, sie in Form einer Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung umzuschreiben, was sich natürlich ohne Weiteres machen läßt, und geben sogleich die Bedingung dafür an, daß

$$\varphi = A e^{\beta t / \tau'}$$

ein partikuläres Integral derselben wird. Die Bedingung lautet:

$$\frac{1}{5}\beta^5 + \beta^4(e^{-\beta} - 1) + 12\beta^3 e^{-\beta} + 12\beta^2(5e^{-\beta} + 1)$$
$$+ 144\beta e^{-\beta} + 144(e^{-\beta} - 1) = 0$$

oder

$$100') \quad e^{-\beta}(\beta^4 + 12\beta^3 + 60\beta^2 + 144\beta + 144) + \frac{1}{5}\beta^5 - \beta^4 + 12\beta^2 - 144 = 0.$$

Dieselbe ist bereits von Herglotz[1]) als Fundamentalgleichung der kleinen Rotationsschwingungen angegeben worden. Auch hebt Herglotz hervor, daß sie nicht nur für die kleinen Schwingungen (d. h. unter Vernachlässigung höherer Potenzen der Schwingungsamplitude), sondern, wie unsere Ableitung unmittelbar zeigt, in Strenge für beliebige Amplituden Gültigkeit hat.

Die Wurzeln der Gl. (100') sind bereits von Herglotz studirt worden, auf dessen Arbeit wir dieserhalb verweisen. Es giebt wieder unendlich viele Wurzeln, die aber nicht mehr rein imaginär sind, sondern einen negativen reellen Teil haben, sowie eine rein reelle. Letztere Wurzel ist diejenige vom kleinsten absoluten Betrag: $\beta = -2{,}34$.

Wir fügen noch das asymptotische Gesetz für die Wurzeln von großem absoluten Betrage hinzu. Gl. (100') können wir nach Division mit β^4 schreiben:

$$e^{-\beta} = -\frac{\beta}{5}(1 - \cdots),$$

wo die nicht hingeschriebenen Glieder klein sind, da sie negative Potenzen von β enthalten. Machen wir nun für β den Ansatz $\beta = 2i\pi m + h + ik$, wo $|h|$ und $|k|$ als klein gegen $|m|$ vorausgesetzt werden, so ergiebt sich

$$e^{-h}\cos k = -\frac{h}{5} + \cdots, \quad e^{-h}\sin k = \frac{1}{5}(2\pi m + k) + \cdots,$$

also näherungsweise, wenn h und k sowie alle nicht hingeschriebenen Glieder gegen m vernachlässigt werden:

1) Man beachte, daß die bei Herglotz mit z bezeichnete Größe bei uns der Größe $-\beta$ entspricht.

$$e^{-h} = \frac{2\pi m}{5}, \quad h = -\log \frac{2\pi m}{5}, \quad k = \frac{\pi}{2},$$

womit sich für die großen Wurzeln unserer Gleichung das folgende asymptotische Gesetz ergiebt:

$$\beta = -\log \frac{2\pi m}{5} + \frac{4m+1}{2}\pi i \ldots \text{ im Limes für } m = \pm\infty$$

Ueber die Beziehung des so erhaltenen Spektrums zu denjenigen der Optik ist dasselbe zu sagen wie unter a).

Seismische Registrierungen in Göttingen, Juli bis December 1903.

Von

Dr. G. v. d. Borne.

Vorgelegt in der Sitzung vom 23. Juli 1904 von Herrn E. Wiechert.

Die vorliegende Zusammenstellung enthält die Verarbeitung der Seismogramme, welche im Göttinger geophysikalischen Institute im 2. Halbjahr 1903 gewonnen wurden; in dauernder Thätigkeit befand sich während dieser Zeit nur ein astatisches 1200 kg-Pendel nach Wiechert und demgemäß fanden auch nur dessen Aufzeichnungen Berücksichtigung. Es konnten dabei erhebliche Vorarbeiten benutzt werden, welche die Assistenten des Institutes, Herr Dr. Lincke und besonders Herr Schering ausgeführt hatten.

Die Bestimmung des Ganges der Uhr, welche die Zeitsignale liefert, ist bis zum October von Herrn Lincke, später von Herrn Schering ausgeführt worden.

In den Tabellen wurden von mir nach Besprechung mit Herrn Prof. Wiechert die folgenden Signaturen benutzt:

Für die Bezeichnung des Charakters der einzelnen Beben:

v = Terrae motus vicinus = Nahbeben (Heerd weniger als 1000 km entfernt)

r = „ remotus = Fernbeben (Heerd 1000—5000 km entfernt)

u = „ ultimo remotus = Sehr fernes Beben (Heerd über 5000 km entfernt).

Der Stärkegrad der Beben wurde wie folgt gekennzeichnet:

Beben, welche eben merklich, durch I,
solche die auffallend sind, durch II,
sehr auffallende durch III.

Ließ sich der „Charakter“ eines Bebens nicht feststellen, so erhielt dasselbe nur eine „Gradnummer“.

Für die einzelnen Phasen benutze ich folgende Signaturen:

P = undae primae = erste Vorläufer
S = „ secundae = zweite Vorläufer
L = „ longae = Hauptbeben
M = „ maximae = Größte Bewegung während des Hauptbebens und zwar
M_n = in der Nordsüdcomponente
M_e = in der Ostwestcomponente.
C = coda = der Schluß des Bebens.
F = „ finis = Erlöschen der sichtbaren Bewegung.

Es werden zwei Arten des Beginnens einer seismischen Bewegung überhaupt oder einer Erdbebenphase unterschieden:

I = impetus = „Einsatz“ = plötzlicher Beginn.
E = emersio = „Auftauchen,“ = langsames Anwachsen der Amplitude von unmerklich kleinen zu merklichen Größen.

Durch zweckentsprechende Verwendung dieser beiden „Anfangssiegel“ teils allein, teils in Verbindung mit den „Phasensiegeln“ ließen sich alle Beben in den Tabellen kurz schildern, darunter auch solche, bei denen die übliche schematische Einteilung unmöglich war.

Unter *T* ist die Periode (doppelte Schwingungszeit) der Erdbebenwellen in Sekunden (^{s}) verzeichnet, unter A_n und unter A_e die Amplituden in der Nord-Süd- bezüglich der Ost-West-Componente, gerechnet von einer Seite zur andern; als Maaßeinheit für diese wurde das „Mikron“ (μ) = 0,001 mm benutzt.

Entsprechend den Verhandlungen der 2. internationalen seismologischen Conferenz (1903) wurden die Zeitangaben in mittlerer Greenwicher Zeit gemacht, und zwar gezählt von Mitternacht zu Mitternacht.

Erscheinen Einzelheiten unsicher, so sind dieselben in Klammern ( ) gesetzt.

Bei einer Anzahl von Beben ließen sich mehr oder minder sichere Vermutungen über den Ort des Heerdes machen, da sie zeitlich mit gefühlten Beben zusammenfielen. Die Anwendung der von Laska[1]) gegebenen Anweisung zur Berechnung der Entfer-

---

1) W. Laska, Über die Berechnung der Fernbeben, Nr. XIV der neuen Folge der Mitte, drr Erdbeben Kommission der K. u. k. Akademie d. Wissenschaften in Wien, Wien 1903 und Sieberg, Handbuch der Erdbebenkunde, Aachen 1904. Seite 295 ff.

nung des Epizentrums führte in den meisten Fällen zu übereinstimmenden Ergebnissen.

Es wurden dabei die folgenden Bezeichnungen gewählt:

Δ_e für die Entfernung des gemeldeten Heerdes von Göttingen

Δ_t für die nach Laskas Anweisung berechnete Entfernung.

Mikroseismische Pulsationen konnten an allen Tagen beobachtet werden. In der über dieselben gegebene Tabelle wurde die folgende Stärkeskala gebraucht.

Gradnummer	Durchschnittliche Maximalamplitude
I	$0^\mu - 0{,}5^\mu$
II	$0{,}5 - 1^\mu$
III	$1,^\mu - 2^\mu$
IV	$< 2^\mu$

In zahlreichen Punkten ist die Deutung der Seismogramme, vor allem, wenn es auf eine kurze Charakterisierung ankommt, sehr abhängig von dem persönlichen Ermessen des Bearbeiters. Dies gilt in erster Linie für die Feststellung der Periodenlänge in dem meist großen Gewirre der Bewegungen, sodann für die Ermittelung der Amplituden, vielfach aber auch für die Beurteilung der einzelnen Phasen eines Erdbebens. Sie ist deshalb nicht frei von Willkür und aller Voraussicht nach auch nicht frei von Fehlern in den Einzelheiten.

Eine Zusammenstellung nach Art der folgenden wird also nicht mehr bieten können, als eine erste oberflächliche Orientierung über die reiche Mannigfaltigkeit der Einzelheiten, welche die Diagramme zeigen.

Auf der beigegebenen Tafel sind Teile einiger besonders interessanter Diagramme wiedergegeben und zwar

in fig. 1: Anfangsteil von Beben No. 6 Juli 11. erste Minutenmarke = $12^h\ 22^m\ 58^s$

in fig. 2: Sinuswelle aus C von Beben No. 14, Juli 27; erste Minutenmarke = $11^h\ 4^m\ 44^s$

in fig. 3: Anfangsteil von Beben No. 11, August 11; erste Minutenmarke = $4^h\ 36^m\ 22^s$

in fig. 4: Anfangsteil von Beben No. 12, August 13; erste Minutenmarke $16^h\ 58^m\ 24^s$

in fig. 5: Pulsationen vom December 8. Ausschnitt aus dem Diagramm zwischen 3^h und 8^h.

1903 Juli.

Nummer	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Dauer	Bemerkungen
1	9	I	E	23^h $(38,5)^m$	6^s	$(0,4)^\mu$	?		Einsatz einer Wellenbewegung, in NS fast unmerklich. Erdbeben? oder Pulsation?
2	10	Iv	E(P)	5^h $(18,2)^m$	3^s	$(0,2)^\mu$	$(0,2)^\mu$	(2^m)	Deutliche Kräuselung der Diagrammlinie in beiden Componenten während etwa 2^m.
3	10	I(u)	E	6^h $(31,8)^m$	15^s	$(2,0)^\mu$	?		Einige lange Wellen, in NS kaum merklich.
	10		E F	9^h 10^h					Das in Straßburg und Hamburg registrierte Beben läßt sich aus den Pulsationen nicht herausschälen. Mehrfach heben sich aus diesen undeutliche längere Wellenzüge ab, so z. B. 9^h 40^m.
4	11	I(u)	E	5^h $(45)^m$	7^s	1^μ	1^μ		Einige Wellenzüge.
5	11	Iu	E	12^h $(21)^m$	20^s	3^μ	3^μ		Einige Wellenzüge, im weiteren Verlauf durch das folgende Beben überlagert und verdeckt.

1903 Juli.

Nummer	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Dauer	Bemerkungen
6	11	II r	$J(P_1)$	12^h $23,6^m$	2^s	$0,4^\mu$	$0,4^\mu$	$JP_1 - P_2 = JS_1 - S_2 = 24^s$	Vormittags Beben in Cerigo. Die Zwillingseinsätze machen das Diagramm demjenigen des Cerigobebens August 11 ähnlich. Aus der Dauer P—S berechnet sich die Entfernung des Epizentrums nach Laska's Tabelle auf 2800 km aus $J(P_1)$—L auf 3300 km während die Entfernung Cerigo-Göttingen ca 2100 km beträgt.
			$J(P_2)$	$24,0^m$				$P - S$ 3^m 37^s	
			$J(S_1)$	$27,4^m$	4^s	$3,2^\mu$	8^μ	$JP - L = 8,9^m$	
			$J(S_2)$	$27,8^m$					
			EL	$32,5^m$	15^s	5^μ	15^μ		
					5^s	$0,4^\mu$	20^μ		
			M	$33,1^m$	15^s	15^μ	15^μ		
			C		18^s; 4^s; 8^s				
			F	12^h (48^m)				$J(P) - F = (24,5)^m$	Das Ueberwiegen der N.S-Componente in den mittleren Teilen des Diagramms ist sehr auffällig.
7	12	II u	J(P)	5^h $(36,5)^m$	—	—	—		5^h $(36,5)^m$, ganz leichte Kräuslung der Diagrammlinie, besonders schwach in NS.
			EL	6^h $(20)^m$	30^s	18^μ	24^μ	$JP - F = (120)^m$	
			M	$(26,4)^m$	24^s	30^μ	23^μ		
			C		24^s; 21^s 15^s; 12^s; 2^s				
			F	7^h $(36)^m$					
8	13		E	1^h (25,3)	20^s	$0,5^\mu$	$(0,5)^\mu$		Starkes Ueberwiegen der Ost-Westcomponente.
				32,5	24^s	17^μ	7^μ		
			F	2^h (6)					

1903 Juli.

Nummer	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Dauer	Bemerkungen
9	16	I	E	$(18^h\ 40^m)$					Es tauchen aus den schwachen Pulsationen einige längere Wellen auf, die wohl dem Beben der Straßburger und Hamburger Warten entsprechen.
10	19	II v	JP_1	$18^h\ 12{,}5^m$	5^s	$3{,}0^\mu$	$2{,}0^\mu$		Sehr auffälliges Ueberwiegen der E.W-Componente während des ganzen Bebens.
					$1{,}5^s$	sehr klein			
			$J(P_2)$	$13{,}0^m$	$4{,}5^s$	$1{,}2^\mu$	$0{,}8^\mu$		
			JS	$16{,}3^m$	$4{,}5^s$	$4{,}0^\mu$	$3{,}2^\mu$	$JP - L = (6{,}3)^m$	
			EL u. M	$(19{,}8)^m$	10^s	9^μ	3^μ	$JP - F = (17{,}5)^m$	
					10^s				
			C		$5^s;\ 10^s$				
			F	$18^h\ (30)^m$					
11	23	II u	$J(P_1)$	$22^h\ (49)^m$	5^s	$(0{,}2)^\mu$	—	$J(P_1) - L = (33)^m$	P_1 in NS. nicht merkbar, auch P_2 in NS merklich schwächer als in EW.
			$J(P_2)$	$(55{,}8)^m$	5^s	$(,4)^\mu$	$(0{,}2)^\mu$	$J(P_2) - L = (26{,}8)^m$	
			EL u. M_E	$23^h\ (22{,}0)^m$	30^s	06^μ	10^μ		
					3^s	22^μ	—		
			M_N	$(25{,}0)^m$	$17{,}5^s$	$0,^\mu$	13^μ		
			C		$20^s;\ 16^s$	14		$J(P_1) - E = (61)^m$	
			F	$23^h\ (50)^m$					

1903 Juli.

Nummer	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Dauer	Bemerkungen
12	27	I v	J	0h 35,0m	3s	1,2μ	0,8μ		Einsätze P oder S.
			J	35,6m	5s	1,2μ	0,8μ		
			(L u. M)	37,8m	8s	1,5μ	nicht messbar	JP − L = 165s	
			F	50m				JP − F = (15)m	
13	27	II v-r	J(P od. S1)	3h 48,4m	nicht meßbar				3¾h Erdbeben in Ligurien. Entfernung etwa 1050 km; P vielleicht früher.
			J(S2)	50,0m	1s	0,2μ			
					2s	0,4μ	nicht messbar	JP − L = 140s	
					3s	1μ		JP − F = 7m	
					6s	1μ	1,2μ		
			EL u. M	50,7m	12s	4,5μ	2μ		
					2,5s	0,3μ	—		
			C		12s; 8s; 2,5s				
			F	(55)m					
14	27	I u	J(P)	10h 46,0m	6s	0,3μ	nicht messbar		
			J(S)	55,4m	10s	1,4μ		J(P − S) = 9,4m	
			L	11h 2,2m	12s	2,0μ		J(P) − L = 16,2m	
			M_N	5,0m	17,5s	12μ	20μ	J(P) − F = (53)m	
			M_E	9,8m	20s	12μ	10μ		
			C		15s	8μ	4μ		
			F	(39)m					In C ganz regelmäßige Sinuswellen; besonders schön in E.W.

1903 Juli.

Nummer	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Dauer	Bemerkungen
15	27	I u	E	12^h $(48,0)^m$	21^s	merklich	ganz schwach		Sehr auffallend ist der Wechsel des Azimuthes der größten Verrückung, welcher im Verlauf der Bewegung öfters hervortritt.
			M_N	$59,3^m$	21^s	2^μ	10^μ		
			M_E	13^h $7,6^m$	21^s	9^μ	2^μ		
			F	13^h $(28)^m$					
16	28		E	4^h $(7)^m$	20^s	5^μ	1^μ		
		I u	M	$39,3^m$	20^s	5^μ	10^μ		
			F	5^h $(0)^m$					

1903 August.

Nummer	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Dauer	Bemerkungen
1	1	I (v)	E	23^h 56^m	4^s				Von 23^h 56^m ab schwache Kräuselung der Diagrammlinie in beiden Componenten, besonders deutlich in NS.
2	2/3	I u	$J(P_1)$	23^h 13^m 20^s	5^s	$0,4^\mu$	$0,8^\mu$		Mehrfach auffallende Drehung des Azimuth der größten Verrückung!
			$J(P_2)$	16^m 30^s	5^s	sehr klein	$0,4^\mu$	$(P_1)-(L) = 26^m$ 40^s	
			E(L)	37^m 10^s	45^s	10^μ	10^μ		
			M_E	40^m	36^s	35^μ	20^μ		
			M_N	46^m	16^s	5^μ	8^μ		
			C		36^s, 27^s 16^s			$J(P_1)-F = (82)^m$	
			F	0^h $(35)^m$					

1903 August.

Nummer	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	A_N	Dauer	Bemerkungen
3	3	I u	J(P)	7^h 4^m 50^s	$(2)^s$	$(0,3)^\mu$	$(0,3)^\mu$		
					4^s	?	1^μ		
			E(L)	$(30)^m$	14^s	nicht meßbar		J(P) − L = (25^m 10^s)	
			M	34^m	14^s	4^μ	2^μ	J(P) − F = $(55)^m$	
			F	8^h $(0)^m$					
4	6	I r	JP	0^h 16^m 40^s	5^s	$0,8^\mu$	$0,3^\mu$		
			E(L)	$(24)^m$	24^s	ganz schwach			
			M	27^m	20^s	14^μ	7^μ		
			F	0^h $(48)^m$					
5	6	II r	JP	3^h 53^m 31^s	$3,5^s$	$2,4^\mu$	1^μ	JP − EL = 4^m 44^s	
			EL u. M_1	58^m 15^s	20^s	25^μ	10^μ		Gegen $3^3/_4$ Erdbeben in Sicilien (Gegend von Catania) $\Delta_0 = 1800$ km. $\Delta_e = 1600$ km. Zwischen M_1 und M_2 nimmt die Bewegung stark ab, um dann wieder schnell zu wachsen (2 Stöße?)
					8^s	2^μ	1^μ		
					5^s	sehr klein			
			M_2	4^h 4^m 40^s	20^s	25^μ	14^μ		
					3^s	$0,8^\mu$	1^μ		
			C		12^s, 7^s				
					8^s; 5^s; 2^s			JP − F = $(34)^m$	
			F	4^h $(27)^m$					
6	6	I u	E	6^h 55^m	8^s	$1,5^h$	sehr klein		
			F	7^h					

1903 August.

Nummer	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_N	Amplituden A_E	Dauer	Bemerkungen
7	8	I	M	$17^h\ 51^m$	$16{,}5^s$	3^μ	$3{,}0^\mu$		
			F	$18^h\ (3)^m$					
8	9	Ir	E	$17^h\ 25^m$	20^s	sehr	klein		
			M	33^m	20	10^μ	3^μ		
9	9	Iu	J(P)	$22^h\ 51^m\ 0^s$	3^s	$0{,}2^\mu$	$0{,}4^\mu$	JP—EL = $5^m\ 50^s$	Gegen 22^h Erdbeben in Lissabon.
			EL u. M	$56^m\ 50^s$	12^s	4^μ	2^μ	JP—F = 19^m	$\Delta_0 = 2100$ km; $\Delta_c = 2000$ km.
			C		20^s; 12^s 6^s; $(3)^s$				
			F	$23^h\ 10^m$					
10	10	Ir	J(P)	$12^h\ 44^m\ (0)^s$	6^s	$0{,}3^\mu$	1^μ		
			M	$48^m\ 20^s$	6^s	1^μ	2^μ		
			F	$13^h\ (0)^m$					
11	11	III v	JP_1	$4^h\ 36^m\ 59^s$	6^s 2^s	20^μ 8^μ	21^μ 8^μ	JP_1—JS = $3^m\ 11^s$	Gegen $4^1/_2{}^h$ Beben in Südgriechenland, Maximum in Cerigo. $\Delta_0 = 2100$ km, $\Delta_c = 2200$ km. Das Diagramm weicht durchaus von dem Schema ab. Die größte Amplitude findet sich in NS schon bei Einsatz „P_2“ in EW etwa $^1/_2$ Minute nach Einsatz „(S)“. Es nimmt dann die Bewegung schnell ab, so daß zu der Zeit, welche
			JP_2	$37^m\ 30^s$	6^s 2^s	150^μ 8^μ	150^μ 8^μ		
			J(S)	$40^m\ 10^s$	6^s 2^s	18^μ 2^μ	24^μ 8^μ		
			E	$40^m\ (40)^s$	6^s 2^s	100^μ 8^μ	230^μ 8^μ		

1903 August.

Nummer	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Dauer	Bemerkungen
			C		20 ; 13^s; 6^s, 10^s				der Hauptphase schematischer Beben entspricht, die Amplituden erheblich kleiner sind als vorher. ($4^h\ 49^m$ wurden z. B. gemessen $T = 20^s$ $A_N = 60^\mu$, $A_E = 100^\mu$ außerdem $T = 6$, $A_N = 6^\mu$, $A_E = 12\mu$). Unter den für den weiteren Verlauf des Bebens angeführten Perioden tritt die mit 13^s besonders deutlich hervor.
			F	$5^h\ (48)^m$				$JP_1 - F = (71)^m$	
12	13	II u	J(P)	$15^h\ 58^m\ 55$	2^s	$0{,}8^\mu$	$0{,}8^\mu$		$15^3/_4{}^h$ Erdbeben auf Kiuschiu (Japan). Entfernung: 9200 km. Nach Laskas Tabelle findet sich ein Abstand Δ, unter Benutzung von: P − S; $\Delta_0 = 8900$ km. P − L; $\Delta_0 = (9000)$ km.
			J(S)	$16^h\ 8^m\ 45^s$	$7{,}5^s$	$3{,}2^\mu$	$1{,}6^\mu$	$JP - S = 9^m\ 50^s$	
			E(L)	$24^m\ (56)^s$	36^s	55^μ	25^μ	$JP - L = 27^m\ (0)^s$	
			M_E	$30^m\ (55)^s$	$22{,}5^s$	70^μ	40^μ		
			M_N	$37^m\ (25)^s$	15^s	13^μ	25^μ		
			F	$27^h\ (14)^m$				$JP - F = (135)^m$	
13	16	I(u)	E	$3^h\ (45)^m$					Aus den Pulsationen taucht ein Zug langer Wellen auf.
			M	$48^m\ (55)^s$	20^s	11^μ	3^μ		
			F	$4^h\ 0^m$					
14	16	I u	J(P)	$13^h\ 51^m\ 12^s$	$2{,}5^s$	$0{,}8^\mu$	1^μ		Erdbeben in Port au Prince (Haiti) $14^1/_2{}^h$. Entfernung: 8200 km. Nach Laskas Tabelle berechnet man aus: P—S; $\Delta_0 = 8100$ km. P—L; $\Delta_0 = (8400)$ km. L vielleicht früher.
			J(S)	$14^h\ 0^m\ 18^s$	{ 5^s	1^μ	1_μ		
					{ $2{,}5^s$	sehr klein		$JP - S = 9^m\ 6^s$	
			(L) u. M_1	$16^m\ (30)^s$	20^s	10^μ	10^μ	$JP - L = 25^m\ (18)^s$	
			M_2	$22^m\ 40^s$	15^s	10^μ	7^μ		
			F	$14^h\ (55)^m$				$JP - F = (64)^m$	

1903 August.

Nummer	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Dauer	Bemerkungen
15	16	I	E	$16^h\ 45^m$	5^s	ganz	klein		
					10^s	10^{μ}	8^{μ}		Einige unregelmäßige Wellen.
			F	$16^h\ 55^m$					
16	17	I v	JP	$7^h\ 48^m\ 21^s$	3^s	$0{,}4^{\mu}$	$0{,}4^{\mu}$		
					$1{,}5^s$	sehr	klein	JP − F = $10\frac{1}{2}^m$	$7\frac{3}{4}^h$ Erdbeben bei Agram und Sissek.
			M	$49^m\ 0^s$	3^s	1^{μ}	2^{μ}		
					1^s	sehr	klein		
			F	$7^h\ 59^m$					
17	17	I v	(JP)	$9^h\ 0^m\ 41^s$	3^s	$0{,}4^{\mu}$	$0{,}4^{\mu}$		$8\frac{3}{4}^h$ Erdbeben bei Agram $9\frac{1}{4}^h$ bei Sissek.
					$1{,}5^s$	sehr	klein		
			M	$1^m\ (1)^s$	6^s	$0{,}8^{\mu}$	1^{μ}	JP − F = 4^m	
					1^s	sehr	klein		
			F	$9^h\ 4^m\ 40^s$					
18	19	I u	E	$10^h\ (0)^m$	20^s	3^{μ}	3^{μ}		
			M	$(4)^m$	20^s	10^{μ}	5^{μ}		
			C		15^s				
			F	?					
19	29	I u	J(P)	$15^h\ 47^m\ 35^s$	9^s	4^{μ}	$0{,}8^{\mu}$		
			M	$16^h\ 23^m\ (30)^s$	20^s	8^{μ}	8^{μ}	J(P) − F = $(82)^m$	
			F	$17^h\ (10)^m$					
20	30	I(u)	E	$10^h\ 45^m$	15^s	1^{μ}	nicht merklich		Unregelmäßige Wellen in EW.

1903 September.

Nummer	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Dauer	Bemerkungen
1	1	I u	E	$15^h\ 22^m$	$3,5^s$	$0,2^\mu$	1^μ		
			EL u. M	$49^1/_2{}^m$	20^s	7^μ	3^μ	$E-F = 68^m$	
			C		$(10)^s$				
			F	$16^h\ (30)^m$					
2	3	I u	E	$6^h\ (25)^m$	ganz schwach, in EW etwas deutlicher als in NS.				Die letzten Stadien sind durch das folgende Beben überlagert.
			EL u. M_1	$54^1/_2{}^m$	23^s	12^μ	10^μ	$E-F = 75^m$.	
			M_2	$59^1/_2{}^m$	18^s	8^μ	15^μ		
			C		$(14)^s$				
			F	$7^h\ (40)^m$					
3	3	I v	J	$7^h\ 27^m\ 42^s$	$1,5^s$	$0,4^\mu$	$(0,2)^\mu$		
4	3	I	E	$15^h\ 52^m$	12^s	—	$2,5^\mu$		In EW einige unregelmäßige Wellen.
5	7	I v	J	$7^h\ 34^m\ 15^s$	5^s	2^μ	—		Ende wegen der Ueberlagerung durch das folgende Beben nicht zu bestimmen.
			(EL)	37^m	6^s	3^μ	4^μ		
			(M)	$37^3/_4{}^m$	5^s	5^μ	5^μ		

1903 September.

Nummer	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Dauer	Bemerkungen
6	7	I u	E u. M_E	$8^h\ (23)^m$	28^s, 12^s	20^μ	10^μ	$E-F\ 67^m$	Anfang wegen der Ueberlagerung durch das vorhergehende Beben unsicher. $7^h\ 53^m\ 15^s$ in EW eine auffällige Welle, die vielleicht JP bezeichnet. Lange Wellen von etwa $0{,}5^m$ Periode in EW von $8^h\ 19{,}5^m$ bemerkbar, in NS erst $1{,}8^m$ später. Nimmt man das Mittel aus beiden als EL an, so ergiebt sich $\Delta_0 = 9000$ km. $8^1/_4{}^h$ Erdbeben in Formosa, $\Delta_0 = 9200$ km.
						8^μ	3^μ		
			M_N	29^m	24^s	20^μ	20^μ		
			C		$18^s, 15^s$				
			F	$9^h\ (30)^m$					
7	8	I	E	$6^h\ (8)^m$	$(25)^s$	8^μ	—	$E-F = 83^m$	In NS nur zwischen $6^h\ 25^m$ und $6^h\ 35^m$ deutlich merkbar.
			F	$7^h\ (31)^m$					
8	10		E	$11^h\ (31)^m$	24^s	8^μ	—	$E-F = 39^m$	In NS nicht vor $11^h\ 42^m$ merkbar; Curven im allgemeinen sehr unruhig.
			M	53^m	20^s	12^μ	10^μ		
			F	$12^h\ (10)^m$					
9	12	I r	JP	$23^h\ 10^m\ 46^s$	2^s, $(6)^s$	2^μ	4^μ	$JP-J(S) = 2^m\ 14^s$	
			J(S)	$13^m\ 0^s$	6^s, 3^s	6^μ	6^μ	$J(P)-(EL) = (3^m\ 14^s)$	
						3^μ	3^μ		
			(EL)	$(14)^m$	$(9)^s$, 3^s	6^μ	3^μ		Lange Periode in L unsicher.
			C		5^s				
			F	$23^h\ (28)^m$				$JP-F = 18^m$	

1903 September.

Nummer	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Dauer	Bemerkungen
10	13	I r	JP	$8^h\ 5^m\ 6^s$	4^s	$0{,}8^\mu$	$(0{,}1)^\mu$	JP – JS = $2^m\ 34^s$	Die NS-Componente von P kaum merklich. L wenig hervortretend. Erdbeben in Mittelrumänien. $\Delta_e = 1400$ km, $\Delta_e = 1400$ km.
			JS	$7^m\ 40^s$	4^s	$1{,}2^\mu$	$0{,}8^\mu$	JP – F = 30^m	
			(EL) u. M	$9^m\ 10^s$	$\{12^s$	6^μ	7^μ		
					$\{\ 2^s$	$0{,}8^\mu$	$0{,}4^\mu$		
			C		5^s—6^s				
			F	$8^h\ (35)^m$					
11	13	II r	JP	$15^h\ 33^m\ 10^s$	3^s	1^μ	$0{,}5^\mu$	JP – JS = $4^m\ 52^s$	
			JS	$38^m\ 2^s$	6^s	4^μ	4^μ	JP – F = 65^m	
			EL	$39^m\ (12)^s$	16^s	20^μ	10^μ		
			M	44^m	14^s	45^μ	40^μ		
			F	$16^h\ 40^m$					
12	13	I r	(JP)	$19^h\ 1^m\ (0)^s$	4^s	$0{,}4^\mu$	$0{,}2^\mu$	JP – JS = (5^m)	Dem vorigen Beben ähnlich, aber schwächer.
			(JS)	$(6)^m$	4^s	$0{,}2^\mu$	$0{,}4^\mu$	JP – EL = $(9)^m$	
			EL u. M	$10^m\ (0)^s$	14^s	6^μ	4^μ		
			C		6^s				
			F	$19^h\ (23)^m$					
13	14	I u	E	$13^h\ (20)^m$	15^s	0^μ	0^μ	E – F = 27^m	
			M	$23\frac{1}{2}^m$	15^s	4^μ	25^μ		
			F	$13^h\ (47)^m$					
14	18	I							Zwischen $10^h\ 40^m$ und $11^h\ 20^m$ in EW undeutliche Wellen T = 10^s; Erdbeben? Pulsationen?

1903 September.

Nummer	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Dauer	Bemerkungen
15	20	I							Gegen $12^1/_2{}^h$ in EW etwas stärkere Bewegung, aus den Pulsationen auftauchend.
16	23	Ir	(J)	$1^h\ 46^m\ 25^s$	3^s	1^μ	$0{,}5^\mu$	$(J)-EL = 4^m\ 40^s$	
			EL u. M_1	$51^m\ 5^s$	$\{20^s$	25^μ	15^μ	$(J)-F = 29^m$	$1^3/_4{}^h$ Erdbeben in Algier und auf den Canarischen Inseln.
					$\{5^s$	$0{,}8^\mu$	$0{,}4^\mu$		
			M_2	$53^m\ 30^s$	12^s	15^μ	8^μ		
			C		$9^s;\ 3^s$				
			F	$2^h\ 16^m$					
17	23	I	E	$9^h\ 54^m$	$\{15^s$	4^μ	4^μ		
					$\{5^s$	$1{,}5^\mu$	1^μ	$E-F = 16^m$	
			M	55^m	10^s	6^μ	6^μ		
			C		$9^s;\ 5^s$				
			F	$10^h\ 10^m$					
18	25	Iu	J(P)	$1^h\ 22^m\ 40^s$	3^s	$(0{,}1^\mu)$	—		
			EL u. M_1	$40^1/_2{}^m$	14^s	4^μ	$1{,}5^\mu$	$J(P)-EL = 17^m\ (50)^s$	J(P) in EW ganz schwach, in NS nicht merkbar.
			M_2	$47^1/_2{}^m$	10^s	7^μ	4^μ	$J(P)-F = 49^m$	
			C		9^s				
			F	$2^h\ (12)^m$					
19	27	I	M	$15^h\ 50^m$	14^s	4^μ	3		In EW Bewegung schon von $15^3/_4{}^h$ merklich.
			F	$16^h\ 10^m$					
20	28	I	E	$16^h\ 25^m$	6^s	$0{,}8^\mu$			NS-Componente fehlt infolge Versagens der Schreibvorrichtung.
			M	28^m	12^s	4^μ		$E-F = 15^m$	
			F	$16^h\ 40^m$					

1903 October.

Nummer	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	A_N	Dauer	Bemerkungen
1	3		E F	$21^h\ 23^m$ $22^h\ 40^m$					Undeutliche Wellen von ca. $^1/_2$ m Periode tauchen aus den Pulsationen auf. Es erscheint zweifelhaft, ob es sich um Beben oder nur um pulsatorische Erscheinungen handelt.
2	4		E F	$6^h\ 36^m$ $6^h\ 40^m$					
3	11		M F	$5^h\ 27^m$ $5^h\ 55^m$	20^s	20^μ	10^μ		
4	14		E F	$4^h\ 43^m$ $4^h\ 46^m$					Einige undeutliche Wellen in EW.
5	19	I u	JP_1 $J(P_2)$ J(S) C F	$3^h\ 14^m\ 7^s$ $16^m\ (20)^s$ $21^m\ (0)^s$ $3^h\ (55)^m$	$(3)^s$ 3^s 3^s $6^s;\ 8^s$	1^μ 5^μ 5^μ	— 2^μ 4^μ	$JP_1 - JS = 6^m\ 53^s$ $JP_1 - F = 42^m$	Die späteren Phasen sind dem Schema — wohl infolge der mehrfachen Einsätze — nicht einzuordnen. Für NS befindet sich das Maximum der Bewegung etwa bei $3^h\ 31^m$ mit $T = 21^s$, $A_N = 25^\mu$. In EW kommen Wellen von so langer Schwingungsdauer überhaupt nicht vor und es fehlt hier ein ausgesprochenes Maximum der Bewegung.

1903 October.

Nummer	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Dauer	Bemerkungen
6	20	I (u)	JP	$3^h\ 9^m\ 50^s$	2^s	$0,5^\mu$	$0,5^\mu$	JP – E(L) = $47^m\ 10^s$	Vielleicht gehören JP und E(L) zu zwei verschiedenen Beben.
			E(L)u.M_E	57^m	40^s	20^μ	10^μ	JP – F = 104^m	
			M_N	$4^h\ 7^m$	30^s	5^μ	30^μ		
			C		$(15)^s$				
			F	$4^h\ (54)^m$					
7	21	I (v)	JP	$7^h\ 26^m\ 18^s$	1^s	$0,2^\mu$	$0,8^\mu$	JP – F = $1^m\ 54^s$	JP an das vorige Beben erinnernd, aber ohne die dort nachfolgenden langen Wellen.
			M	$27^m\ 4^s$	3^s	$1,2^\mu$	$0,4^\mu$		
			F	$28^m\ 12^s$					
8	21	I u	(JP)	$10^h\ 13^m\ 45^s$	3^s	$0,4^\mu$	$0,2^\mu$	(JP) – EL = $(22^m\ 15^s)$	Pulsationen machen die Feststellung von JP unsicher.
			EL u. M_E	46^m	35^s	40^μ	30^μ	JP – F = (86^m)	
			M_N	53^m	21^s	30^μ	35^μ		
			C		10—15^s				
			F	$11^h\ 40^m$					
9	23	II r	(E)	$3^h\ (4)^m$	7^s	3^μ	6^μ	E – F = 34^m	Starke Pulsationen.
			EL u. M	$5^1/_2{}^m$	$\{25^s,\ 7^s$	30^μ	60^μ		
						3^μ	5^μ		
			C		$9^s;\ 12^s$				
					3^s				
			F	$3^h\ (38)^m$					

1903 October.

Nummer	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Dauer	Bemerkungen
10	23	I u	E	14^h $(24)^m$	$2{,}5^s$	—	—		
			EL u. M_1	31^m	12^s	6^μ	6^μ		Bewegungen in L sehr unregelmäßig; besonders in der kurzen Periode starke Schwebungen, Schätzungen der A daher sehr unsicher.
					4^s	4^μ	4^μ	E—F = 32^m	
			M_2	34^m	14^s	20^μ	20^μ		
			C		$(6^s—9^s)$				
			F	14^h $(56)^m$					
11	24	I (u)	E	1^h $56^1/_2{}^m$	$(30)^s$				
			M	2^h $11^1/_2{}^m$	24^s	15^μ	10^μ	E—F = 28^m	
			F	2^h 25^m					
	28		E	$22^1/_2{}^h$					Starke Pulsationen, Auftauchen einiger langer Wellen in NS.
12	29	I u	J	14^h 39^m 15^s	10^s	3^μ	3^μ		
					$4{,}5^s$	3^μ	4^μ		
			M	15^h 26^m	40^s	50^μ	40^μ	J—F = 60^m	
					10^s	sehr	klein		Die Wellenzüge in C sehr regelmäßig.
			C		$20^s—25^s$	$(20)^\mu$	$(20)^\mu$		
			F	15^h $(40)^m$					
13	29	I u	E	19^h 45^m	18^s	6^μ	—		
			F	20^h					

1903 October.

Nummer	Datum	Charakter	Phasen	Z en (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Dauer	Bemerkungen
14	30	I u	(J)	$4^h\ 15^m\ 25^s$	10^s	3^μ	3^μ	(J) − F = 55^m	Gegen 5^h Wellen von über 30^s Periode; viele schwache Wellenzüge bilden C.
					$2{,}5^s$	sehr	klein		
			M	$41^1/_2{}^m$	15^s	10^μ	10^μ		
			F	$6^h\ 10^m$					

1903 November.

Nummer	Datum	Charakter	Phasen	Z en (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Dauer	Bemerkungen
1	10	I u	E	$18^h\ (15)^m$	20—30^s			E − F = 55^m	Einzelheiten wegen der Pulsationen nicht festzustellen.
			F	$19^h\ (10)^m$					
2	10	I (v)	J	$21^h\ (8^1/_2)^m$	$(1)^s$				Spuren eines Nahbebens in EW.
3	17	I (r)	J	$5^h\ 56^m\ (0)^s$	$(5)^s$	2^μ	1^μ	J − F = 14^m	
			M	$6^h\ 2^m\ (0)^s$	10^s	4^μ	5^μ		
			F	$6^h\ (10)^m$					
4	17	I (u)	E	$21^h\ 16^m$	22^s	$(15)^\mu$		F − F = 28^m	Es folgen mehrfach an- und abschwellende Wellenzüge T = 15^s — 20^s, A = 0^μ — 10^μ.
				21^m	18^s	10^μ	10^μ		
			F	$21^h\ 44^m$					
5	18	I (r)	(J)	$16^h\ 17^m$	5^s	$0{,}2^\mu$	$0{,}8^\mu$	(J) − F = 30^m	$16^h\ 19^m$ Verstärkung der sehr unregelmäßigen Bewegung.
			M	$24^m\ 20^s$	13^s	25^μ	20^μ		
			C		$(10)^s$				
			F	$16^h\ (47)^m$					

1903 November.

Nummer	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Dauer	Bemerkungen
6	24	I u	J	14h 3m 35s	10s	5"	—		J in beiden Componenten deutlich, weitere Details durch Pulsationen verdeckt.
				3m 45s	10s	—	10"	J – F = 61m	
			M	37m	20s	15"	25"		
			F	15h (4)m					
7	25	I r	E	23h 23m (0)s	2s	0,2"	0,2"		
			EL u. M	23¾m	10s	5"	5"	E – F = 13m	
					2s	4"	4"		
			C		(6)s				
			F	23h 36m					
8	26	II u	JP	11h 57m 42s	3s	2"	1"	JP – JS_1 = 7m 58s	Erdbeben im mittleren Sibirien 11¾h. Ein ausgesprochener Einsatz langer Wellen fehlt, statt dessen zwischen JS_2 und M_1 sehr unregelmäßige Bewegung, T zwischen 4s und 14s schwankend, im weiteren Verlauf des Bebens zeigt sich noch mehrfach ein erheblicher Wechsel der Amplituden.
			JS_1	12h 5m 40s	16s	12"	6"	JP – JS_2 = (11,5)m	
					4s	1,2"	0,4"		
			JS_2	9m (10)s	18s	5"	4"		
			M_1	21¾m	15s	80"	130"	JP – F = 87m	
			M_2	24¼	12s	75"	55"		
			C		10s				
			F	13h (25)m					

1903 December.

Nummer	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Dauer	Bemerkungen
1	1	I u	E	$7^h\ 7^m\ 30^s$	15^s	4^μ	7^μ		Die Anfangsstadien gehen in Pulsationen verloren.
			EL u. M_N	$7^h\ 13^m$	30^s	15^μ	20^μ		
			M_E	30^m	24^s	25^μ	20^μ		
			C		18^s—20^s			E—F = 57^m	
			F	$8^h\ (5)^m$					
2	1	I u	M_1	$15^h\ 5^1/_2{}^m$	32^s	25^μ	25^μ		
			M_2	10^m	$\{18^s$	10^μ	10^μ		
					$\{10^s$	1^μ	1^μ		
			F	$15^h\ 50^m$					
3	3	I (r)	E(L)	$9^h\ 36^1/_2{}^m$	30^s	10^μ	10^μ	EL—F = 23^m	
			M	$40^1/_2{}^m$	20^s	15^μ	15^μ		
			C		15^s				
			F	$10^h\ (0)^m$					
4	5	I u	J	$5^h\ 17^m\ 10^s$	$\{6^s$ $\{1^s$	1^μ	2^μ	J—F = 56^m	
			M	$36^m\ 0^s$	33^s	30^μ	20^μ		Ein ausgesprochenes EL fehlt. C recht unregelmäßig (Pulsationen).
			C		10^s—12^s				
			F	$6^h\ (13^m)$					

1903 December.

Nummer	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	A_N	Dauer	Bemerkungen
	5	(I)	M	$23^h\ 9^1/_2{}^m$	15^s	7^μ	7^μ		Einige Wellen, Erdbebennatur unsicher.
5	6/7	I u	J(S)	$23^h\ (26)^m$	25^s	12^μ	12^μ	$J(S)-F = 23^m$	
			M	$43^1/_2{}^m$	35^s	50^μ	20^μ		
			C		10^s-15^s				
			F	$0^h\ (12)^m$					C recht unregelmäßig.
6	7	I u	E	$15^h\ 16^m$	20^s	10^μ	10^μ		
			M	$48^1/_2{}^m$	22^s	100^μ	50^μ		
			C		18^s			$E-F = 72^m$	
			F	$16^h\ (28)^m$					
7	10	II u	(JP)	$17^h\ 10^m\ 35^s$	3^s	3^μ	2^μ	$JP-JS = (6^m\ 15^s)$	Starke Pulsationen machen die Bestimmung von JP unsicher.
			JS	$17^m\ 50^s$	$\{10^s$	15^μ	5^μ		
					$\{5^s$	2^μ	2^μ		
			E(L) u. M	28^m	$\{35^s$	150^μ	200^μ	$JP-E(L) = 17^m\ 25^s$	
					$\{7^s$	$0{,}8^\mu$	$0{,}4^\mu$		
			C		$\{7^s;10^s;15^s$ 22^s				
			F	$18\ (24)^m$				$JP-F = 68^m$	
8	18	I u	EL u. M	$13^h\ 19^1/_2{}^m$	$(30)^s$	15^μ	27^μ	$EL-F = 23^m$	
			F	$13^h\ 43^m$					

1903 December.

Nummer	Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden T	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Dauer	Bemerkungen
9	23	I u	J(S)	$1^h\ 22^m\ 10^s$	$\{2^s$	2^μ	3^μ	J(S) − F = 70^m	Bewegung, besonders von 1^h 44^m ab sehr unregelmäßig; die Periode T = 18^s erreicht bis zu 20 μ Amplitude in beiden Componenten; später Wellen bis zu 30^s Periode. Auffällig ist die große Intensität der kurzen Perioden im Anfange des Bebens.
					5^s	4^μ	4^μ		
					$(10)^s$				
			J	44^m	18^s	10^μ	10^μ		
			C		20^s; 10^s; 6^s				
			F	$2^h\ 32^s$					
10	28	II u	JP	$3^h\ 10^m\ 5^s$	3^s	$1{,}2^\mu$	$0{,}4^\mu$	JP − JS = $10^m\ 25^s$	
			JS	$20^m\ 30^s$	3^s	$0{,}4^\mu$	$1{,}2^\mu$	JP − E(L) = $33^m\ 55^s$	
			E(L)	$44^m\ 0^s$	45^s	100^μ	100^μ	JP − F = 74^m	
			M_N	$52^m\ 0^s$	$22{,}5^s$	100^μ	130^μ		
			M_E	$58^m\ 30^s$	$22{,}5^s$	150^μ	80^μ		
			C		16^s				
			F	$4^h\ (25)^m$					

Uebersicht über die Intensität der Mikroseismischen Pulsationen zu Göttingen. 1904 Juli 5—December 31.
(Vgl. Seite 442).

Tag	Monat					
	Juli	August	September	October	November	December
1		I	I	I	I	II
2		I	I	I	I	II
3		I	I	II	II	II
4		I	I	III	II	II
5	I	I	I	III	I	II
6	I	I	I	III	I	II
7	I	I	I	III	I	IV
8	I	I	I	II	II	IV
9	I	I	II	II	II	IV
10	I	I	II	III	II	IV
11	I	I	I	III	II	III
12	I	I	II	III	II	IV
13	I	I	II	III	II	III
14	I	I	I	II	II	III
15	I	I	I	II	III	III
16	I	I	I	II	II	III
17	I	I	I	II	I	III
18	I	II	I	I	I	III
19	I	I	I	I	I	I
20	I	I	I	I	II	II
21	I	I	II	I	IV	III
22	I	I	I	I	IV	IV
23	I	I	I	I	III	IV
24	I	I	I	I	III	III
25	I	I	I	III	II	II
26	I	I	I	III	II	II
27	I	II	I	II	III	II
28	I	II	I	II	III	III
29	I	II	I	II	III	III
30	I	II	I	II	II	III
31	I	II		II		III

Ueber eine Gauß'sche Reihe in verschiedenen Theilen ihres Convergenzgebietes.

Von

J. Thomae.

Dem Vorsitzenden Sekretär eingereicht am 10. September 1904.

Bekanntlich braucht eine Function $f(z)$ von der Form

$$f(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \cdots + \varphi_m(z) + \cdots$$

nicht in allen Theilen ihres Convergenzgebietes dieselbe analytische Function darzustellen, wenn $\varphi_m(z)$ nicht die m^{te} Potenz eines linearen Ausdruckes in z ist. Wenn aber nicht bemerkt worden zu sein scheint, daß hierfür schon Gauß ein schönes Beispiel gegeben hat, so liegt das wohl daran, daß er die Gebiete, in denen seine Entwickelung verschiedene analytische Functionen darstellt, nicht angegeben hat.

Gauß beweist nämlich im Band III seiner gesammelten Werke auf Seite 226, daß die drei Reihen

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, 4z(1-z)), \qquad F(2\alpha, 2\beta, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, z),$$
$$F(2\alpha, 2\beta, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, 1-z)$$

derselben Differentialgleichung zweiter Ordnung genüge leisten, und beschäftigt sich dann mit der Auflösung der Paradoxie, zu der er gelangt

$$F(2\alpha, 2\beta, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, z) = F(2\alpha, 2\beta, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, 1-z).$$

Die zweite und dritte Reihe sind analytische Functionen im ganzen Gebiete ihrer Convergenz, und es haben diese Gebiete ein Stück gemein. Die erste Reihe convergiert, so lange

$$abs\, z \,.\, abs(1-z) < \tfrac{1}{4}$$

ist, also im Innern einer Lemniscate, die die Puncte 0, 1 zu Brennpunkten, und den Punct $\frac{1}{2}$ zum Knotenpuncte hat. Wir wollen den Theil der Lemniscate, der den Punct 0 im Innern enthält, das Gebiet I, den, der den Punkt 1 enthält, das Gebiet II nennen. — Im Gebiet I hat der Ausdruck für $4^n z^n (1-z)^n$

$$4^n z^n - n 4^n z^{n+1} + n_2 4^n z^{n+2} - n_3 4^n z^{n+3} + \cdots$$

auch dann einen Werth, der absolut genommen kleiner als Eins ist, wenn darin z durch $abs\, z$ ersetzt wird. Es läßt sich deshalb die erste Reihe in diesem Gebiete in eine Reihe umsetzen, die nach Potenzen von z fortschreitet, und es folgt daraus, daß in diesem Gebiete die erste Reihe gleich der zweiten ist.

Im Gebiete II ist dies nicht mehr der Fall. Dort läßt sich vielmehr die erste Reihe in eine Reihe umsetzen, die nach Potenzen von $1-z$ fortschreitet, und es ist deshalb in diesem Gebiete die erste Reihe gleich der dritten.

Die erste Reihe stellt daher im Gebiete I eine bestimmte analytische Function dar, die durch die zweite Reihe definirt wird. Im Gebiete II aber stellt die erste Reihe nicht die analytische Fortsetzung der ersten Reihe, sondern, wie man hier wohl nicht unpassend setzen kann, nur einen Bestandtheil dieser Fortsetzung, nämlich die durch die dritte Reihe definierte analytische Function dar.

Für die Jacobi'schen Größen

$$K = \tfrac{1}{2}\pi F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, k^2) \qquad K' = \tfrac{1}{2}\pi F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, k'^2)$$

folgt hieraus, daß die Reihe, wenn k^2 als Variabele angesehen wird,

$$\tfrac{1}{2}\pi F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, 4k^2 k'^2)$$

im Gebiete I die Größe K, im Gebiete II die Größe K' darstellt.

Wirkung electrischer Schwingungen in optisch activen Körpern.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung vom 23. Juli 1904.

Alle Medien von einer physikalischen Symmetrie, welche durch Inversion in einander übergehende Koordinatenkreuze ungleichwerthig macht, haben die Eigenschaft, daß in ihnen ein (an sich rotationsfreies) Vectorfeld von polarem Character ein solches von axialem erregen kann und umgekehrt. Insbesondere sind hier zwischen den Komponenten X, Y, Z eines polaren und denen A, B, C eines axialen Vectors lineäre Beziehungen von der Gestalt

$$X = a_{11} A + a_{12} B + a_{13} C, \; \ldots .$$

möglich, deren Specialisirung für alle Krystallgruppen ich an einer andern Stelle angegeben habe [1]). Auch für isotrope Körper können derartige Beziehungen in der vereinfachten Form

$$X = aA, \quad Y = aB, \quad Z = aC$$

Gültigkeit besitzen, wenn in ihnen zwar entgegengesetzte Richtungen, nicht aber entgegengesetzte Drehungen gleichwerthig sind, — ein Symmetrieverhalten, das sich bekanntlich in der optischen Activität dieser Körper (die man vielleicht als pseudoisotrop bezeichnen könnte) anschaulich äußert.

Andere, als optische Singularitäten, die den speciellen Symmetrieeigenschaften entsprechen, sind bei jenen Medien bisher nicht aufgefunden worden. Da indessen die optischen Erscheinungen

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1903, p. 188.

auf electromagnetischen Vorgängen beruhen, so ist es wahrscheinlich, daß diese Körper auch electromagnetische Wirkungen im engern Sinne des Wortes (d. h. solche, die sich mit rein electromagnetischen Hülfsmitteln beobachten lassen) zu äußern vermögen, die auf ihren eigenartigen Symmetrieverhältnissen beruhen. Insbesondere müssen gemäß den Formeln der electromagnetischen Lichttheorie in pseudoisotropen Medien electrische Schwingungen in irgend einer Richtung magnetische Schwingungen in derselben Richtung erregen. Die Entwickelung der Theorie derselben und die Beschreibung einiger Versuche, die zu ihrem Nachweise unternommen worden sind, bilden den Gegenstand dieser Abhandlung.

I. Theorie.

a) Es bezeichnen, wie in der früheren Arbeit,

$K(X, Y, Z)$ die electrische Feldstärke mit ihren Componenten,
$R(A, B, C)$ „ magnetische „ „ „ „
$\mathfrak{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ die electrische Polarisation „ „ „
$\mathfrak{R}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ „ magnetische „ „ „ „
$\mathfrak{K}_h(\mathfrak{X}_h, \mathfrak{Y}_h, \mathfrak{Z}_h)$, $h = 1, 2, \ldots$ die auf einzelnen Electronenschwingungen beruhenden electrischen Theilpolarisationen;
v ist die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum, a_h, b_h, d_h, e_h, sind Konstanten.

Für einen einaxigen activen Krystall, dessen Hauptaxe in die Z-Axe fällt, lautet dann das von mir aufgestellte und von Herrn Drude gedeutete Erklärungssystem der optischen Activität:

$$(1)\qquad \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = v\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right), \ldots \qquad \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = v\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right), \ldots$$

$$(2)\qquad \mathfrak{X} = X + \sum \mathfrak{X}_h, \ldots; \qquad \mathfrak{A} = A + \sum \frac{d_h}{e_h}\frac{\partial \mathfrak{X}_h}{\partial t}, \ldots$$

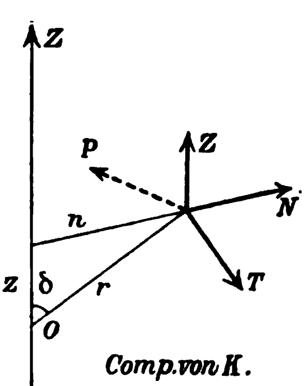
$$(3)\qquad \mathfrak{X}_h + a_h \frac{\partial \mathfrak{X}_h}{\partial t} + b_h \frac{\partial^2 \mathfrak{X}_h}{\partial t^2} + d_h \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = e_h X, \ldots$$

Dabei sind die Parameter a_h, b_h, d_h, e_h in den Gleichungen für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ resp. $\mathfrak{X}_h$, $\mathfrak{Y}_h$ dieselben, in denjenigen für $\mathfrak{C}$ und für $\mathfrak{Z}_h$ aber andere, was durch die Bezeichnungen a'_h, b'_h, d'_h, e'_h in den letzteren angedeutet werden soll.

Für periodische Vorgänge ist

$$\partial \varphi / \partial t = i \varphi / \vartheta ,$$

wobei $\tau = 2 \pi \vartheta$ die Periode bezeichnet. Wir wollen den Fall näher untersuchen, daß der Zustand außer von t und z nur von $n = \sqrt{x^2 + y^2}$ abhängt. Bezeichnet man dann gemäß Fig. 1 die Komponenten von K und R nach der Richtung von n resp. mit N und G, die normal dazu in positivem Drehsinn um die $+Z$-Axe wirkenden mit P und F, so nehmen die Formeln (1) die Gestalt an



Comp. von K.

Z
C
F
G
n
z
δ
r
O

Comp. von R.

Fig. 1.

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
i \mathfrak{N} &= - v \vartheta \frac{\partial F}{\partial z}, \\
i \mathfrak{P} &= + v \vartheta \left(\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial n} \right), \\
i \mathfrak{Z} &= + v \vartheta \left(\frac{\partial F}{\partial n} + \frac{1}{n} F \right); \\
i \mathfrak{G} &= + v \vartheta \frac{\partial P}{\partial z}, \\
i \mathfrak{F} &= - v \vartheta \left(\frac{\partial N}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial n} \right), \\
i \mathfrak{C} &= - v \vartheta \left(\frac{\partial P}{\partial n} + \frac{1}{n} P \right).
\end{aligned}
$$

Für die Komponenten $\mathfrak{P}_h, \mathfrak{N}_h, \mathfrak{Z}_h$ der Theilpolarisation $\mathfrak{K}_h$ liefern die Formeln (3) bei Einführung der Abkürzungen

$$
(5)\qquad 1 + \frac{i a_h}{\vartheta} - \frac{b_h}{\vartheta^2} = D_h, \quad 1 + \frac{i a_h'}{\vartheta} - \frac{b_h'}{\vartheta^2} = D_h',
$$

$$
(6)\qquad \mathfrak{N}_h D_h + \frac{i d_h}{\vartheta} \mathfrak{G} = e_h N, \quad \mathfrak{P}_h D_h + \frac{i d_h}{\vartheta} \mathfrak{F} = e_h P,
$$

$$
\mathfrak{Z}_h D_h' + \frac{i d_h'}{\vartheta} \mathfrak{C} = e_h' Z;
$$

hieraus folgen für die electrischen Gesammtpolarisationen nach (2[1]) die Ausdrücke

$$
(7)\qquad
\begin{gathered}
\mathfrak{N} + i \frac{\mathfrak{G} \delta}{\vartheta} = N \varDelta, \quad \mathfrak{P} + i \frac{\mathfrak{F} \delta}{\vartheta} = P \varDelta, \\
\mathfrak{Z} + i \frac{\mathfrak{C} \delta'}{\vartheta} = Z \varDelta',
\end{gathered}
$$

wobei gesetzt ist[1])

$$(8)\qquad \sum \frac{d_h}{D_h} = \delta, \qquad \sum \frac{d'_h}{D'_h} = \delta',$$
$$1 + \sum \frac{e_h}{D_h} = \varDelta, \quad 1 + \sum \frac{e'_h}{D'_h} = \varDelta'.$$

In gleicher Bezeichnung und bei Beschränkung auf die Glieder erster Ordnung bezüglich der Activitätsconstanten d liefert (2^a) für die magnetischen Gesammtpolarisationen

$$(9)\qquad \mathfrak{G} = G + i\frac{N\delta}{\vartheta}, \quad \mathfrak{F} = F + i\frac{P\delta}{\vartheta},$$
$$\mathfrak{C} = C + i\frac{Z\delta'}{\vartheta}.$$

In Gliedern erster Ordnung ist hiernach $\mathfrak{G}, \mathfrak{F}, \mathfrak{C}$ mit G, F, C zu vertauschen.

Durch Elimination von G, F, C aus (1) resultirt das System

$$N\varDelta + v^2\vartheta^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial N}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial n}\right) = 2v\delta\frac{\partial P}{\partial z},$$
$$(10)\qquad P\varDelta + v^2\vartheta^2\left(\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial n^2} + \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{P}{n}\right)\right) = -2v\delta\frac{\partial N}{\partial z} + v(\delta+\delta')\frac{\partial Z}{\partial n},$$
$$Z\varDelta' - v^2\vartheta^2\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial N}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial n}\right) + \frac{1}{n}\left(\frac{\partial N}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial n}\right)\right] = -v(\delta+\delta')\left(\frac{\partial P}{\partial n} + \frac{1}{n}P\right).$$

Diese Beziehungen verknüpfen P mit N und Z mit Hülfe der Activitätskonstanten δ und δ', derart, daß das Auftreten jeder einzelnen der beiden Komponentengattungen, die bei verschwindender Activität von einander unabhängig sind, jetzt die andere nothwendig macht. Insbesondere erkennt man, daß eine parallel der Z-Axe stattfindende electrische Erregung in dem (zunächst unbegrenzt gedachten) activen Körper eine Komponente P, und damit eine rotatorische electrische Schwingung um die Z-Axe hervorruft, wie eine solche in unactiven Medien eine zur Z-Axe parallele magnetische Erregung begleitet. Ihr Auftreten ist der Ausdruck der S. 468 erwähnten Thatsache, daß in dem activen Körper eine electrische Schwingung eine ihr parallele magnetische bewirkt.

Handelt es sich um die Erregung eines im Endlichen begrenzten activen Körpers, so kommen zu den Formeln (10) noch die Grenzbedingungen, welche verlangen, daß die tangentialen Komponenten der electrischen und der magnetischen Kraft stetig durch die Grenze gehen.

1) Die δ haben hiernach jetzt eine etwas andere Bedeutung, als in der früheren Arbeit.

Wir beschränken uns im Weiteren auf den Fall, daß der active Körper durch eine Rotationsfläche um die Z-Axe begrenzt ist, und wollen die Rechnung insbesondere für eine Kugel um den Coordinatenanfang durchführen. Bezeichnet r den Radiusvector nach dem Coordinatenanfang, so lauten die Grenzbedingungen zunächst

$$(11)\quad \begin{aligned} \overline{P}_a &= \overline{P}_i, & (\overline{N}_a - \overline{N}_i)\cos(z,r) - (\overline{Z}_a - \overline{Z}_i)\cos(n,r) &= 0,\\ \overline{F}_a &= \overline{F}_i, & (\overline{G}_a - \overline{G}_i)\cos(z,r) - (\overline{C}_a - \overline{C}_i)\cos(n,r) &= 0; \end{aligned}$$

dabei ist nach (9) und (4)

$$(12)\quad \begin{aligned} F &= i\left[v\vartheta\left(\frac{\partial N}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial n}\right) - \frac{P\delta}{\vartheta}\right],\\ G &= -i\left[v\vartheta\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{N\delta}{\vartheta}\right],\\ C &= i\left[v\vartheta\left(\frac{\partial P}{\partial n} + \frac{P}{n}\right) - \frac{Z\delta'}{\vartheta}\right]. \end{aligned}$$

Was die periodische Erregung der Kugel betrifft, so stellen wir uns vor, die Kugel befinde sich mit ihrem Centrum in einem Schwingungsbauch eines den ganzen Raum erfüllenden Systems ebener stehender electrischer Wellen, und nehmen den Durchmesser der Kugel als klein neben der Wellenlänge an. Für die erregende Welle setzen wir demgemäß zunächst

$$Z_0 = M\cos\alpha t\cos\beta x,$$

wobei $\alpha = 1/\vartheta = v\beta$ ist, unter v, wie oben, die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume verstanden. Für das Bereich der Kugel dürfen wir dann nach der Annahme, daß der Kugelradius klein gegen die Wellenlänge ist, schreiben

$$(13)\qquad Z_0 = M\cos\alpha t.$$

Ein solches stehendes electrisches Wellensystem erregt nach den für den Außenraum specialisirten Gleichungen (1) im Allgemeinen auch magnetische Schwingungen; indessen sind dieselben am Orte der Kugel ersichtlich von verschwindender Amplitude und dürfen daher völlig außer Betracht bleiben.

Bei einer Kugel von verschwindender Activität ($\delta = 0$, $\delta' = 0$) müßte nach Symmetrie die rotatorische electrische Kraftcomponente P gleich Null sein; bei wie in Wirklichkeit immer äußerst kleinen δ und δ' wird P als klein von erster Ordnung betrachtet werden dürfen.

Die erste und dritte Gleichung (10) und ebenso der Ausdruck

(12') für F enthalten P nur in Gliedern zweiter Ordnung. Es entspricht den oben eingeführten Vernachlässigungen, diese Ausdrücke zu streichen. Hierdurch separiren sich die Variabeln N, Z, P in einer bemerkenswerthen Weise. Die erste und zweite Gleichung (10) mit der zweiten und dritten Grenzbedingung (11) enthalten nur N und Z und bestimmen die Erregung der inactiv gedachten Kugel; die zweite Gleichung (10) und die erste und vierte Grenzbedingung (11) gestatten aus den zuvor berechneten N und Z die für die Wirkung der Activität characteristische Componente P zu bestimmen. Demgemäß zerfällt die Lösung unserer Aufgabe in zwei völlig getrennte Theile. Bei ihrer Behandlung wollen wir den in Wirklichkeit stets sehr kleinen Unterschied, zwischen $\varDelta$ und $\varDelta'$ ignoriren, also $\varDelta'$ mit $\varDelta$ vertauschen, d. h., dem ersten Problem eine isotrope Kugel zu Grunde legen.

b) Die Gleichungen des ersten Problems lauten dann nach (10), wenn man kurz $v^2/\varDelta = \omega^2$ setzt,

$$(14)\qquad \begin{aligned} &N + \omega^2 \vartheta^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial N}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial n}\right) = 0, \\ &Z - \omega^2 \vartheta^2 \left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial N}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial n}\right) + \frac{1}{n}\left(\frac{\partial N}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial n}\right)\right] = 0; \end{aligned}$$

dazu kommen die Grenzbedingungen, die sich bei Einführung der im Meridian senkrecht zum Radiusvector r stehenden Componente (s. Fig. 1)

$$(15)\qquad N\cos(z, r) - Z\cos(n, r) = T$$

schreiben lassen

$$(16)\qquad \begin{aligned} &\overline{T}_a = \overline{T}_i, \\ &\overline{\frac{\partial N_a}{\partial z}} - \overline{\frac{\partial Z_a}{\partial n}} = \overline{\frac{\partial N_i}{\partial z}} - \overline{\frac{\partial Z_i}{\partial n}}. \end{aligned}$$

Aus (14) ergiebt sich leicht

$$\frac{\partial N}{\partial n} + \frac{N}{n} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

und die Benutzung dieser Formel reducirt (14) auf

$$(17)\qquad \begin{aligned} &N + \omega^2 \vartheta^2 \left[\frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial N}{\partial n} + \frac{N}{n}\right)\right] = 0, \\ &Z + \omega^2 \vartheta^2 \left[\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial n^2} + \frac{1}{n}\frac{\partial Z}{\partial n}\right] = 0. \end{aligned}$$

Man genügt diesen Bedingungen bekanntlich durch die Ansätze

$$(18) \qquad n N = \frac{\partial}{\partial z}\left(n \frac{\partial \Pi}{\partial n}\right), \quad n Z = -\frac{\partial}{\partial n}\left(n \frac{\partial \Pi}{\partial n}\right),$$

wobei gelten muß

$$(19) \qquad \frac{\partial}{\partial n}(\Pi + \omega^2 \vartheta^2 \Delta \Pi) = 0.$$

Für den äußeren Raum ist $\omega = v$, und wir setzen

$$(20) \qquad \begin{cases} v\vartheta = 1/p \text{ und} \\ p^2 \Pi_a + \Delta \Pi_a = 0. \end{cases}$$

Einen Ausdruck für Π, der im Unendlichen (wie nöthig) verschwindet und auch endlich bleibt, wenn die Schwingungsperiode unendlich groß wird, also unendlich kleine Werte des Parameters p in Frage kommen, ist

$$(21) \qquad \Pi_a = \frac{m \cos p r}{r}.$$

Dem durch (13) bestimmten Z_0 entspricht dabei eine Function Π_0, gegeben durch

$$(22) \qquad \Pi_0 = -\tfrac{1}{4} Z_0 r^2,$$

und die vollständige Lösung im äußeren Raum wird durch $\Pi_a + \Pi_0$ dargestellt.

Für den Innenraum der Kugel setzen wir

$$(23) \qquad \begin{cases} \omega\vartheta = 1/q \text{ und} \\ q^2 \Pi_i + \Delta \Pi_i = 0 \end{cases}$$

und genügen dem durch die Reihe

$$(24) \qquad \Pi_i = \frac{l}{q^2}\left(1 - \frac{q^2 r^2}{6} + \frac{q^4 r^4}{120} - \frac{q^6 r^6}{5040} \pm \cdots\right)$$

Die beiden Coefficienten m und l, die Producte aus Constanten in $\cos a t$ darstellen, bestimmen sich durch die Grenzbedingungen ($11^{2,3}$), die für die Kugeloberfläche, d. h. für $r = r$ gelten.

Für die Tangentialkomponente T der elektrischen Kraft ergiebt sich aus (18)

$$(25) \qquad n T = \frac{\partial}{\partial r}\left(n \frac{\partial \Pi}{\partial n}\right);$$

zugleich folgt aus denselben Formeln und aus (19)

$$(26) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial n} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial n}\right) + \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial n}\left(n \frac{\partial \Pi}{\partial n}\right)\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial n} \Delta \Pi = -\frac{1}{\omega^2 \vartheta^2} \frac{\partial \Pi}{\partial n}. \end{aligned}$$

Die Grenzbedingungen werden also zu

$$
(27)\qquad
\begin{aligned}
q^2 \overline{\frac{\partial \Pi_i}{\partial n}} &= p^2 \overline{\frac{\partial (\Pi_a + \Pi_0)}{\partial n}},\\
\overline{\frac{\partial}{\partial r}\left(n \frac{\partial \Pi_i}{\partial n}\right)} &= \overline{\frac{\partial}{\partial r}\left(n \frac{\partial (\Pi_a + \Pi_0)}{\partial n}\right)};
\end{aligned}
$$

da aber alle Π nur r enthalten, so giebt dies einfacher

$$
(28)\qquad
\begin{aligned}
q^2 \overline{\frac{\partial \Pi_i}{\partial r}} &= p^2 \overline{\frac{\partial (\Pi_a + \Pi_0)}{\partial r}},\\
\overline{\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \Pi_i}{\partial r}\right)} &= \overline{\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial (\Pi_a + \Pi_0)}{\partial r}\right)}.
\end{aligned}
$$

Durch Einsetzen der Werthe (21), (22) und (24) erhält man hieraus

$$
\begin{aligned}
&\frac{q^2 l \bar{r}^3}{3}\left(1 - \frac{q^2 \bar{r}^2}{10} + \frac{q^4 \bar{r}^4}{280} \mp \cdots\right)\\
&= p^2 \left(m (\cos p\bar{r} + p\bar{r} \sin p\bar{r}) + \tfrac{1}{2} Z_0 \bar{r}^2\right),\\
&\frac{2 l \bar{r}^3}{3}\left(1 - \frac{q^2 \bar{r}^2}{5} + \frac{3 q^4 \bar{r}^4}{280} \mp \cdots\right)\\
&= -m \left((1 - p^2 \bar{r}^2) \cos p\bar{r} + p\bar{r} \sin p\bar{r}\right) + Z_0 \bar{r}^2.
\end{aligned}
$$

Wir beschränken uns sogleich auf den Fall, daß höhere Potenzen von $p\bar{r}$ und $q\bar{r}$, als die zweite, neben Eins vernachlässigt werden können, und schreiben demgemäß

$$
(30)\qquad
\begin{aligned}
\frac{q^2 l \bar{r}^3}{3}\left(1 - \frac{q^2 \bar{r}^2}{10}\right) &= p^2 \left(m\left(1 + \frac{p^2 \bar{r}^2}{2}\right) + \tfrac{1}{2} Z_0 \bar{r}^2\right),\\
\frac{2 l \bar{r}^3}{3}\left(1 - \frac{q^2 \bar{r}^2}{5}\right) &= -m\left(1 - \frac{p^2 \bar{r}^2}{2}\right) + Z_0 \bar{r}^2;
\end{aligned}
$$

hieraus folgt für l und m in gleicher Annäherung

$$
(31)\qquad
\begin{aligned}
&l\left[q^2\left(1 - \frac{q^2 \bar{r}^2}{10} - \frac{p^2 \bar{r}^2}{2}\right) + 2 p^2 \left(1 - \frac{q^2 r^2}{5} + \frac{p^2 \bar{r}^2}{2}\right)\right]\\
&\quad = \frac{3}{4} p^2 Z_0 (6 + p r^2),\\
&m\left[q^2\left(1 + \frac{q^2 \bar{r}^2}{5} - \frac{p^2 \bar{r}^2}{2}\right) + 2 p^2 \left(1 + \frac{q^2 \bar{r}^2}{10} + \frac{p^2 \bar{r}^2}{2}\right)\right]\\
&\quad = \bar{r}^2 Z_0 \left[q^2 \left(1 + \frac{q^2 \bar{r}^2}{5}\right) - p^2 \left(1 + \frac{q^2 \bar{r}^2}{10}\right)\right],
\end{aligned}
$$

was sich noch in verschiedene Formen bringen läßt.

c) Die Gleichungen des **zweiten** Problemes lauten nach (10) und (11) bei Benutzung von (12) und einer kleinen Umformung

$$(32)\qquad \begin{aligned} &P+\omega^2\vartheta^2\left(\frac{\partial^2 P}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial n^2}+\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{P}{n}\right)\right) \\ &\qquad = -\frac{v}{\Delta}\left(2\delta\frac{\partial N}{\partial s}-(\delta+\delta')\frac{\partial Z}{\partial n}\right), \end{aligned}$$

$$(33)\qquad \bar{P}_a = \bar{P}_i,\quad \bar{r}\,\frac{\overline{\partial(P_a-P_i)}}{\partial r} = v\,(\overline{N_i s}\,\delta-\overline{Z_i n}\,\delta')\,q^2.$$

Dabei sind für N und Z die aus dem ersten Problem folgenden Werthe einzusetzen.

Nun ist Π_i durch (24) gegeben; aus diesem Ausdruck folgt

$$n\frac{\partial \Pi_i}{\partial n} = -\frac{l n^2}{3}\left(1-\frac{q^2 r^2}{10}\right),$$

somit also nach (18)

$$(34)\qquad \begin{aligned} N_i &= \frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial n\,\partial s} = \frac{l q^2 n s}{15}, \\ Z_i &= -\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial n}\left(n\frac{\partial \Pi_i}{\partial n}\right) = \frac{2l}{3}\left(1-\frac{q^2(s^2+2n^2)}{10}\right). \end{aligned}$$

Hiernach nimmt (32) die Gestalt an

$$(35)\qquad \begin{aligned} &P_i+\omega^2\vartheta^2\left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 P_i}{\partial n^2}+\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{P_i}{n}\right)\right) \\ &\qquad = -\frac{v}{15\Delta}(6\delta+4\delta')\,l q^2 n = -kn, \end{aligned}$$

wobei k eine Abkürzung ist,

Im Außenraum gilt dieselbe Gleichung, nur ist k mit Null und ω mit v zu vertauschen. Setzt man

$$(36)\qquad P_i = -kn+Q_i,\quad P_a = Q_a,$$

so kann man den Gleichungen genügen, indem man

$$(37)\qquad Q = \partial\Phi/\partial n$$

und

$$(38)\qquad p^2\Phi_a+\Delta\Phi_a = 0,\quad q^2\Phi_i+\Delta\Phi_i = 0$$

macht. Dabei sind wie früher

$$(39)\qquad \begin{aligned} \Phi_a &= \frac{h\cos pr}{r}, \\ \Phi_i &= \frac{g}{q^2}\left(1-\frac{q^2r^2}{6}+\frac{q^4r^4}{120}\mp\cdots\right) \end{aligned}$$

Lösungen der Formeln (38).

Da es sich in dem vorliegenden Problem um die Bestimmung von lauter Größen handelt, die als sehr klein erster Ordnung gelten, so können wir uns bei der Bestimmung der Factoren h und g, die analog, wie oben m und l, Producte aus Constanten in $\cos at$ sind, auf die erste Annäherung bezüglich der kleinen Zahlen $p\bar{r}$ und $q\bar{r}$ beschränken. Dies kommt darauf heraus, daß die Werthe $\Phi_a = h/r$, $\Phi_i = g\left(1 - \frac{q^2 r^2}{6}\right)/q^2$, $N_i = 0$, $Z_i = 2l/3$, $l = qp^2 Z_0 / 2(q^2 + 2p^2)$ benutzt werden. Eine einfache Rechnung ergiebt dann

$$(40) \qquad h = -\frac{2v\delta' q^2 l \bar{r}^3}{9}, \quad g = -3k - \frac{2v\delta' q^2 l}{3}.$$

Das Resultat, das, als der Beobachtung eventuell zugänglich, das größte Interesse verdient, ist der hieraus folgende Werth für die im Außenraum erregte circular um die z-Axe schwingende elektrische Kraft P_a. Man erhält aus (36) und (37)

$$(41) \qquad P_a = \partial \Phi_a / \partial n = -hn/r^3.$$

Um von der Größenordnung, die P_a bei erreichbaren Werthen von Z_0 annehmen kann, eine Vorstellung zu erhalten wenden wir den Ausdruck (40) auf den Aequator der erregten Kugel an, setzen also

$$(42) \qquad \overline{P}_a = \frac{v\delta' \bar{r} q^2 p^2}{q^2 + 2p^2} Z_0.$$

Dabei ist nach (20) und (23) $q^2/p^2 = v^2/\omega^2 = \Delta$, d. h. gleich dem Quadrat des Brechungsindex, das für so lange Wellen, wie hier vorausgesetzt, mit der Dielectricitätskonstanten identificirt werden kann. Demgemäß können wir schreiben

$$(43) \qquad \overline{P}_a = \frac{\delta' \bar{r}}{v \vartheta^2} \cdot \frac{\Delta}{\Delta + 2} \cdot Z_0.$$

Die von mir durchgeführten Beobachtungen an Quarz haben die Verhältnisse δ/ϑ_N δ'/ϑ_N geliefert,[1]) wobei ϑ_N die Wellenlänge von *Na*-Licht bezeichnet. δ/ϑ_N fand sich gleich $3,5 . 10^{-6}$, δ'/ϑ_N sehr viel kleiner. Bei isotropen Körpern ist $\delta = \delta'$.

Wir wollen, um die Größenordnung von $\overline{P}_a$ zu schätzen, ein isotropes Medium voraussetzen, das die größere der Quarzconstanten besitzt, also $\delta' = 3,5 . \vartheta_N . 10^{-6}$ setzen. Nehmen wir noch $\Delta/(\Delta + 2)$ rund $= 0,6$ an, so haben wir abgerundet

1) W. Voigt. Gött. Nachr. l. c.

$$(44) \qquad \bar{P}_a = 2.10^{-5} \frac{\vartheta_x}{\vartheta} \cdot \frac{2\pi \bar{r}}{\lambda} \cdot Z_0,$$

unter λ die Wellenlänge der erregenden electrischen Schwingungen im leeren Raum verstanden.

Dies $\bar{P}_a$ mag in einer dem Kugeläquator sehr nahen Rolle von a Windungen inducirend wirken, dann ist die in der Rolle erregte electromotorische Kraft

$$(45) \qquad E = 4.10^{-5} \cdot \frac{\vartheta_x}{\vartheta} \cdot a \pi^2 \frac{\bar{r}}{\lambda} \cdot 2 \bar{r} Z_0,$$

wobei $2 \bar{r} Z_0 = e$ die electromotorische Kraft (resp. die Potentialdifferenz) der erregenden Schwingung auf der Strecke des Kugeldurchmessers darstellt. Ist $\lambda = 10^4$, so ist $\vartheta_x/\vartheta = 6.10^{-9}$ und für $r = 4$ erhält man rund

$$(46) \qquad E = a e . 10^{-15}.$$

Für den wohl erreichbaren Fall, daß $e = 2.10^4$ Volt ist, ergiebt sich bei $a = 200$ der Werth $E = 4.10^{-9}$ Volt, — also ein außerordentlich kleiner Betrag.

II. Beobachtungen.

Wenngleich nach dem Vorstehenden die von der Theorie geforderte Wirkung sehr klein ist, so schien es mir doch wünschenswerth zu sein, einen Versuch zu ihrem Nachweis zu machen; die Fortschritte in der Technik der electrischen Schwingungen, welche die letzte Zeit gebracht hat, ließen das Problem immerhin nicht ganz hoffnungslos erscheinen. Die Herren Dr. Bose und Dr. Reich von dem hiesigen physikalischen Institut haben mich bei diesen Experimenten mit ihren Erfahrungen unterstützt.

Ueber die schließlich benutzte Anordnung giebt die nebenstehende schematische Figur 2 Aufschluß.

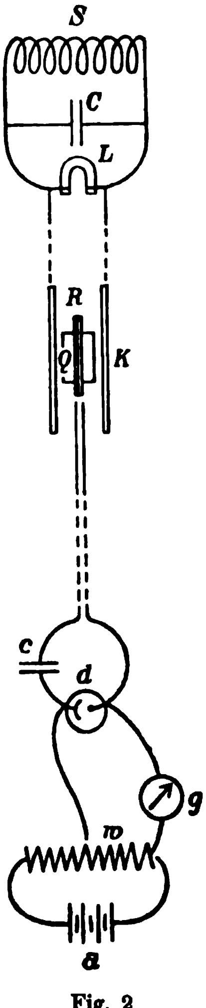


Fig. 2

S ist die Sekundärspirale des Inductors, *C* eine veränderliche Capacität, *L* eine als Funkenstrecke dienende Quecksilberlampe [1])

1) H. Th. Simon und M. Reich, Phys. Zeitschr. 4 p. 368, 1903; G. W. Pierse, ib. 5, 426, 1904, Orok. Am. Ac. of Sc. 39. p. 389, 1904.

von der in Fig. 3 angegebenen Form; bei letzterer waren, um ein gleichmäßiges Brennen und dementsprechend gleichmäßige Schwingungen zu erzielen, die als Electroden dienenden Quecksilbermenisken sehr klein gewählt, was eine Kühlung der betreffenden Stelle des Rohres durch eine größere äußere Quecksilbermasse erforderte.

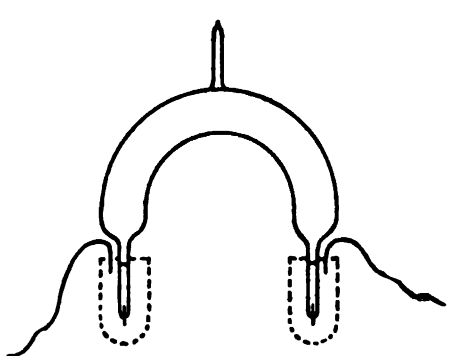


Fig. 3

K ist ein aus zwei Messingplatten von ca 24 cm Durchmesser und 8 cm Abstand gebildeter Kondensator, in dem das Quarzpräparat *Q* — entweder eine Kugel von ca 2 cm Radius oder aber ein regelmäßiger Abschnitt einer sechsseitigen Säule von größeren Dimensionen, der bei einem nur qualitativen Versuche statt einer Kugel benutzt werden durfte — eingeführt wurde. Das Präparat umgab die flache Drahtrolle *R*, deren Windungen und Zuleitungen in einer zu den Condensatorplatten parallelen Ebene lagen, und die deshalb durch Schwingungen infolge wechselnder Ladungen des Condensators nicht inducirt wurden.

Die Zuleitungen führten zu den Electroden eines Schlömilch[1])-Detectors *d*; die eine enthielt einen Condensator *c*. Electrische Schwingungen in den Zuleitungen setzen bekanntlich den Widerstand dieses Detectors stark herab, so daß der erregende Strom (aus einem 4-Volt-Accumulator *a* mit Hülfe eines Regulirwiderstandes *w* abgezweigt) deren Bestehen an dem Galvanometer *g* (1 Theilstrich = 3.10^{-7} Amp.) durch einen stark vergrößerten Ausschlag anzeigt.

Die hauptsächliche Schwierigkeit der Beobachtung liegt in den von dem primär erregenden System (*S*, *C*, *L*) direct nach dem Detector fortgepflanzten Schwingungen. Bei aller Vorsicht ließ sich nicht vermeiden, daß magnetische Kraftlinien die Rolle *R* zwischen den Kondensatorplatten durchsetzten und auch ohne Anwesenheit des Quarzpräparates in ihr eine electromotorische Kraft inducirten. Wäre der Schlömilch-Detector ein quantitativ wirkender Apparat, und wäre die Quecksilberlampe ein sich ganz

1) W. Schlömilch, Electrotechn. Zeitschr. **24**, p. 959, 1903; M. Reich, Physik. Zeitschr. **5**, p. 338, 1904; M. Dieckmann, ib. **5**, p. 529, 1904.

gleichbleibender Unterbrecher, so würde jene secundäre Induction durch die Combination von Beobachtungen mit und ohne Quarz eliminiert werden können. Aber beides ist entfernt nicht der Fall, unmittelbar auf einander folgende Beobachtungen bei ungeänderten äußern Umständen lieferten im allgemeinen stark wechselnde Galvanometerausschläge.

Die Beobachtungen wurden so angestellt, daß in häufigem Wechsel der Kondensator K leer und mit dem Quarz in der Lage Axe $\parallel$ Kraftlinien oder Axe $\perp$ Kraftlinien benutzt wurde. In der zweiten Position ist wegen der Verschiedenheit der Activitätsconstanten parallel und normal der Axe die obige Theorie nicht streng anwendbar, man kann sich aber leicht davon überzeugen, daß eine der Formel (45) analoge auch in diesem Fall gelten muß.

Die optischen Beobachtungen lassen erwarten, daß in der ersten Position die Wirkung des Quarzes erheblich geringer sein müßte, als in der zweiten; dies Verhältnis trat in der That gerade bei den Versuchen, wo die störenden Wirkungen recht herabgedrückt waren, mehrfach ziemlich deutlich hervor. Indessen können die Beobachtungen keineswegs als abgeschlossen gelten und sollen wiederaufgenommen werden, sobald ein Detector von sicherer quantitativer Wirkung und ein regelmäßig wirkender Unterbrecher zur Verfügung stehen.

Göttingen, im Juli 1904.

Ueber die Fortpflanzung der Strahlung in dispergierenden und absorbierenden Medien.

Von

M. Laue.

Vorgelegt in der Sitzung vom 23. Juli 1904 von Herrn W. Voigt.

Einleitung.

In zwei Arbeiten „Ueber die Aenderung der Schwingungsform des Lichtes beim Fortschreiten in einem dispergierenden und absorbierenden Mittel“ hat Herr W. Voigt[1]) darauf hingewiesen und an dem Beispiel eines die Elektricität leitenden Mediums, für welches die elektromagnetische Lichttheorie in ihrer ältesten Gestalt auf die sogenannte Telegraphengleichung führt, weiter ausgeführt, daß natürliches Licht beim Durchgang durch ein solches Medium seine Schwingungsform ändert; es erscheint wohl denkbar, daß diese Aenderung sich auch im Spektrum bemerkbar macht, daß z. B. schmale Spektrallinien sich dabei verbreitern.

Die hier angeregte Frage scheint mir nun von großem Interesse für die Strahlungstheorie zu sein, und doch ist meines Wissens eine derartige Wirkung von ihr bisher nicht berücksichtigt worden. In der folgenden Untersuchung wollen wir daher den Schluß von der Aenderung der Schwingungsform auf die Aenderung des Spektrums auf rechnerischem Wege ziehen. Doch beschränken wir uns nicht auf den Fall der Telegraphengleichung, wir machen überhaupt keine specielle Voraussetzung über das Absorptions- und das Dispersionsgesetz. Die einzige Annahme soll sein, daß sowohl der

---

1) W. Voigt. Ann. d. Phys. u. Chem. 68, pag. 598, 1899 und Ann. d Phys. 4, pag. 208, 1901.

Absorptionskoefficient als der Brechungsindex in dem unten näher zu erörternden Sinn langsam veränderliche Funktionen der Schwingungszahl ν des Lichtes sind.

Die Gleichungen, mit deren Hülfe wir den Uebergang von der Schwingungsform zur Energieverteilung im Spektrum vollziehen, entnehmen wir der Arbeit „Ueber irreversible Strahlungsvorgänge" von Herrn M. Planck;[1]) zu diesem Zweck übernehmen wir auch die Bezeichnungen dieser Arbeit. Nur verändern wir die Gleichungen insofern, als wir an die Stelle der dort gebrauchten trigonometrischen Funktionen die Exponentialfunktion mit imaginärem Argument setzen; durch Weglassung des imaginären Teils gehen unsere Gleichungen in die von Herrn Planck abgeleiteten über. Auf diese Weise wird unsere Rechnung übersichtlicher und kürzer.

§ 1. Die zu Grunde zu legenden Gleichungen.

Nach Gleichung 5) der erwähnten Arbeit[2]) setzen wir für die elektrische Feldstärke der betrachteten, linear polarisierten Strahlung

1) $$\int_0^\infty d\nu\, C_\nu e^{i(2\pi\nu t - \vartheta_\nu)}$$

Hat das Licht dann in einem dispergierenden und absorbierenden Medium die Strecke D zurückgelegt, so ist die Amplitude C_ν der Partialschwingung von der Schwingungszahl ν durch Absorption reduciert auf $C_\nu e^{-\varkappa_\nu D}$ und außerdem haben die Partialschwingungen infolge der Dispersion gegen einander Phasenverschiebungen erlitten. Ist n_ν der Brechungsindex für die Schwingungszahl ν, und verstehen wir unter v die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, so ist nach Zurücklegung der Strecke D die elektrische Feldstärke gegeben durch

2a) $$\int_0^\infty d\nu\, e^{-\varkappa_\nu D}\, C_\nu e^{i\left(2\pi\nu\left(t - \frac{D n_\nu}{v}\right) - \vartheta_\nu\right)}.$$

Bringen wir dies Integral auf die Form

$$\int_0^\infty d\nu\, C'_\nu e^{i(2\pi\nu t - \vartheta'_\nu)},$$

1) M. Planck. Ann. d. Phys. 1, pag. 69, 1900.
2) l. c. pag 78.

so ist

$$2)\qquad C'_\nu e^{i\vartheta'_\nu} = e^{-\varkappa_\nu D}\, C_\nu e^{i\left(\vartheta_\nu + \frac{2\pi D}{v} n_\nu \nu\right)}.$$

Diese Gleichung enthält alles, was sich über die Aenderung der Schwingungsform aussagen läßt.

Wir fragen nun nach der Intensität der Schwingungszahl ν_0 zur Zeit t, $J_0(t)$. Herr Planck definiert sie[1]) als proportional zur Energie eines von der Strahlung getroffenen Resonators von der Schwingungszahl ν_0, dessen Dämpfungsdekrement ϱ klein ist gegen 1, aber doch noch so groß, daß die Zeit des Abklingens einer einmaligen Erregung unmeßbar klein ist. Die erste Bedingung bezweckt, den Bereich der Schwingungszahlen, auf welche der Resonator anspricht, schmal zu machen; denn seine Breite ist von derselben Größenordnung wie $\varrho \nu_0$, also hier klein gegen ν_0. Die zweite Bestimmung bewirkt, daß der Resonator eine gleichzeitige Eigenschaft der Strahlung anzeigt. Daß man ϱ stets beiden Bedingungen genügend wählen kann, liegt daran, daß die Dauer einer Intensitätsmessung stets außerordentlich viele Perioden der Lichtschwingungen umfaßt. Auf diesem Wege findet man die Formel[2]):

$$3)\qquad \begin{cases} J_0(t) = \int_0^\infty d\mu\, (\mathfrak{B}^0_\mu - i\mathfrak{A}^0_\mu) e^{2\pi i \mu t}, \\ \mathfrak{B}^0_\mu - i\mathfrak{A}^0_\mu = \dfrac{2}{\varrho \nu_0} \int_0^\infty d\nu\, C_\nu C_{\nu+\mu} e^{i(\vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+\mu})} \sin^2 \delta_\nu, \end{cases}$$

wobei

$$\operatorname{cotg} \delta_\nu = \pi \frac{\nu_0^2 - \nu^2}{\varrho \nu_0 \nu}\ {}^{3)}.$$

Diese Gleichung bezieht sich auf die Strahlung vor dem Durchgang durch die absorbierende Schicht. Danach gilt wegen 2) die analoge Gleichung:

$$4)\qquad \begin{cases} J'_0(t) = \int_0^\infty d\mu\, (\mathfrak{B}^{0\prime}_\mu - i\mathfrak{A}^{0\prime}_\mu) e^{2\pi i \mu t}, \\ \mathfrak{B}^{0\prime}_\mu - i\mathfrak{A}^{0\prime}_\mu = \dfrac{2}{\varrho \nu_0} \int_0^\infty d\nu\, C'_\nu C'_{\nu+\mu} e^{i(\vartheta'_\nu - \vartheta'_{\nu+\mu})} \sin^2 \delta_\nu \\ = \dfrac{2}{\varrho \nu_0} \int_0^\infty d\nu\, e^{-(\varkappa_{\nu+\mu} + \varkappa_\nu) D} C_\nu C_{\nu+\mu} e^{i\left[\vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+\mu} + \frac{2\pi D}{v}\left(n_\nu \nu - n_{\nu+\mu}(\nu+\mu)\right)\right]} \sin^2 \delta_\nu \end{cases}$$

---

1) l. c. § 8 pag. 85—88.
2) l. c. Gleichung 19 pag. 88.
3) l. c. Gleichung 18 pag. 87.

Wir wollen hier noch die Bemerkung zitieren, welche Herr Planck an diese Gleichung knüpft, da sie für das folgende von größter Wichtigkeit ist: „Im allgemeinen werden die Werte von $\mathfrak{A}_\mu^0$ und $\mathfrak{B}_\mu^0$ noch von ϱ abhängig sein. In diesem Fall kann man von einer Intensität der Schwingungszahl ν_0 in bestimmtem Sinne gar nicht reden. Wir wollen nun für das Folgende die Voraussetzung machen, daß eine jede Schwingungszahl ν eine ganz bestimmte, mit der Zeit „langsam veränderliche" Intensität J_ν besitzt, unabhängig von der zu ihrer Messung dienenden Größe ϱ." In der Hypothese der natürlichen Strahlung ist diese Voraussetzung einbegriffen.

Schließlich müssen wir noch eine Bemerkung hinzufügen über die Größenordnung der in 3) und 4) auftretenden Werte von μ, für welche $\sqrt{\mathfrak{A}_\mu^{0\,2} + \mathfrak{B}_\mu^{0\,2}}$, resp. $\sqrt{\mathfrak{A}_\mu^{0'\,2} + \mathfrak{B}_\mu^{0'\,2}}$ merklich ist. Wenn $J_0(t)$ langsam, d. h. in meßbarer Weise mit der Zeit variieren soll, so muß $\frac{1}{\mu}$ eine meßbare Zeit ein. Nach dem oben Erwähnten soll aber $\frac{1}{\varrho\nu_0}$, die Relaxationszeit des Resonators, unmeßbar kurz sein. Also ist

$$5)\qquad \left\{\begin{array}{c} \varrho\nu_0 \text{ groß gegen } \mu; \\ \text{und da } \varrho \text{ selbst klein ist, a fortiori} \\ \nu \text{ groß gegen } \mu. \end{array}\right.$$

§ 2. Diskussion der Gleichungen 3) und 4) für kleine Werte von D.

Zur Diskussion der Gleichungen 3) und 4) ist zu unterscheiden zwischen schnell veränderlichen Funktionen von ν, wie es ϑ_ν ist, und langsam, d. h. in meßbarer Weise veränderlichen, wie $\varkappa_\nu$ und n_ν. Ist D nicht zu groß, so übertragen sich diese Eigenschaften auf die in 4) auftretenden Funktionen

$$e^{-(\varkappa_{\nu+\mu} + \varkappa_\nu)D} \text{ und } e^{\frac{2\pi i D}{v}\left(n_\nu \nu - n_{\nu+\mu}(\nu+\mu)\right)},$$

sodaß für diese bei der Integration nach ν (bei der wegen des Factors $\sin^2\delta_\nu$ in 3) und 4) factisch nur Werthe zur Geltung kommen, die ν_0 sehr nahe liegen) als konstant betrachten können.

Um zu übersehen, was wir dabei vernachlässigen, entwickeln wir die Funktionen $\varkappa_{\nu+\mu} + \varkappa_\nu$ und $n_\nu \nu - n_{\nu+\mu}(\nu+\mu)$, welche von den beiden Variabeln ν und μ abhängen, in eine Potenzreihe von dem Punkt $\mu = 0$, $\nu = \nu_0$ aus; auf dies Wertepaar beziehe sich der Index 0. Die Entwicklungen lauten:

$$\varkappa_{\nu+\mu} + \varkappa_\nu =$$

$$2\varkappa_0 + 2(\nu - \nu_0)\left(\frac{d\varkappa_\nu}{d\nu}\right)_0 + (\nu - \nu_0)^2\left(\frac{d^2\varkappa_\nu}{d\nu^2}\right)_0 + \cdots$$

$$+ \mu\left(\frac{d\varkappa_\nu}{d\nu}\right)_0 \qquad + (\nu - \nu_0)\mu\left(\frac{d^2\varkappa_\nu}{d\nu^2}\right)_0 + \cdots$$

$$+ \frac{1}{2}\mu^2\left(\frac{d^2\varkappa_\nu}{d\nu^2}\right)_0 \qquad + \cdots$$

$$+ \cdots$$

$$n_\nu \nu - n_{\nu+\mu}(\nu + \mu) =$$

$$-\mu\left(\frac{d(n_\nu \nu)}{d\nu}\right)_0 - (\nu - \nu_0)\mu\left(\frac{d^2(n_\nu \nu)}{d\nu^2}\right)_0 - \cdots$$

$$- \frac{1}{2}\mu^2\left(\frac{d^2(n_\nu \nu)}{d\nu^2}\right)_0 \qquad - \cdots$$

$$- \cdots$$

Bei der Integration nach ν in 4) wächst $\nu - \nu_0$ bis zur Größenordnung $\varrho\nu_0$; denn von dieser Größenordnung ist die Breite des Bereichs, in welchem $\sin^2\delta_\nu$ merkliche Werte annimmt. Dies geht aus der oben mitgeteilten Gleichung für $\operatorname{cotg}\delta_\nu$ hervor. Betrachten wir also die oben genannten Funktionen als konstant, so muß

6a) $$D\left[\varrho\nu_0\left(\frac{d\varkappa_\nu}{d\nu}\right)_0 + \frac{1}{2}\varrho^2\nu_0^2\left(\frac{d^2\varkappa_\nu}{d\nu^2}\right)_0 + \cdots\right] \text{ klein gegen } 1$$

und ebenso

6b) $$\frac{D}{v}\mu\left[\varrho\nu_0\left(\frac{d^2(n_\nu \nu)}{d\nu^2}\right)_0 + \cdots\right] \text{ klein gegen } 1$$

sein. In beiden Reihenentwicklungen ist nun aber ein jedes Glied der m-ten Zeile nach 5) klein gegen das über ihm stehende der $(m-1)$ten Zeile, wenn man $\varrho\nu_0$ für $(\nu - \nu_0)$ setzt; und daraus folgt, daß wir konsequenterweise von den Potenzreihen nur die ersten Glieder $2\varkappa_0$ und

$$-\mu\left(\frac{d(n_\nu \nu)}{d\nu}\right)_0 = -\mu\left(n_\nu + \nu\frac{dn_\nu}{d\nu}\right)_0$$

zu berücksichtigen haben. Durch Einführung dieser Vereinfachungen geht aus dem Vergleich von 3) und 4) hervor:

$$\mathfrak{B}_\mu^{\nu\prime} - i\,\mathfrak{A}_\mu^{\nu\prime} = e^{-2\varkappa_0 D}(\mathfrak{B}_\mu^0 - i\,\mathfrak{A}_\mu^0)\,e^{\frac{-2\pi i\mu D}{v}\left(n_\nu + \nu\frac{dn_\nu}{d\nu}\right)_0},$$

also

$$7)\qquad J_0'(t) = e^{-2\varkappa_0 D} J_0\left(t - \frac{D}{v}\left(n_\nu + \nu\frac{dn_\nu}{d\nu}\right)_0\right)$$

Daraus folgt: Solange die Bedingungen 6a) und 6b) erfüllt sind, pflanzt die Intensität der Schwingungszahl ν_0 sich mit der „Gruppengeschwindigkeit" fort:

$$\frac{v}{\left(n_\nu + \nu\frac{dn_\nu}{d\nu}\right)_0}.$$

Die Schwächung durch Absorption ist dieselbe wie bei streng monochromatischem Licht. Aenderungen im Spektrum treten also nur auf, insofern sie durch die Veränderlichkeit von $\varkappa_\nu$ und der Gruppengeschwindigkeit mit ν bedingt sind. Eine Verbreiterung von Spektrallinien ist ausgeschlossen.

Nun hat Herr H. Wanner[1]) gezeigt, daß die *D*-Linien sich verbreitern, ja daß selbst ein schwaches kontinuierliches Spektrum entsteht, wenn man das von der Natriumflamme ausgesandte Licht durch wiederholte Spiegelungen immer wieder durch sie hindurchleitet. Herr W. Voigt[2]) führte diese Erscheinung unter Anderem auch auf die Aenderung der Schwingungsform beim Durchgang des Lichts durch die absorbierende und dispergierende Natriumflamme zurück. Genügt die hier erreichte Annäherung zur Diskussion dieses Experiments, — und wir werden im folgenden Paragraphen schwerwiegende Gründe für diese Annahme finden — so fällt diese Erklärung weg. Doch erwächst hieraus keine Schwierigkeit, da ja Herr Voigt noch eine andere mögliche Ursache für diese Verbreiterung angiebt.

Für die Gruppengeschwindigkeit findet man meist den Ausdruck

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{qv}{n_\nu}\right)$$

angegeben, wobei $\frac{2\pi}{q}$ die Wellenlänge ist. Da letztere in unserer Bezeichnungsweise durch $\frac{v}{n_\nu \nu}$ gegeben ist, ist

$$8)\qquad 2\pi n_\nu \nu = vq;$$

und daraus folgt:

1) H. Wanner, Ann. d. Phys. u. Chem. 68, pag. 143, 1899.

2) W. Voigt, Ann. d. Phys. u. Chem. 68, pag. 604, 1899.

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{qv}{n_\nu}\right) = 2\pi\,\frac{d\nu}{dq} = \frac{v}{n_\nu + \nu\,\dfrac{dn_\nu}{d\nu}}$$

in Uebereinstimmung mit dem oben gefundenen Wert.

§ 3. Diskussion der Gleichungen 3) und 4) für grössere Werte von D.

Lassen wir D größer und größer werden, so kommen wir einmal an eine Grenze, an der die Gültigkeit der Bedingungen 6), oder wenigstens der einen von ihnen, aufhört, und damit wird auch das Resultat des vorhergehenden Paragraphen, die Gleichung 7), ungültig. Wir dürfen dann die Funktionen $e^{-(\varkappa_{\nu+\mu}+\varkappa_\nu)D}$ und $e^{\frac{2\pi i D}{v}\left(n_\nu \nu - n_{\nu+\mu}(\nu+\mu)\right)}$ bei der Integration nach ν in Gleichung 4) nicht mehr als konstant ansehen. Ueber den Zusammenhang von $\mathfrak{B}_\mu^{0\prime} - i\mathfrak{A}_\mu^{0\prime}$ und $\mathfrak{B}_\mu^0 - i\mathfrak{A}_\mu^0$ läßt sich etwas Bestimmtes erst dann aussagen, wenn wir die Funktionen C_ν und ϑ_ν selbst, d. h. die Schwingungsform kennen. Diese kennen wir aber nie, alle spektralanalytischen Hilfsmittel liefern nur $J_0(t)$, oder, was dasselbe sagt, $\mathfrak{B}_\mu^0 - i\mathfrak{A}_\mu^0$, den Mittelwert der in 4) auftretenden Größe $C_\nu C_{\nu+\mu} e^{i(\vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+\mu})}$ [1]). (Bei Bildung dieses Mittelwerts kommen, wie schon oben erwähnt ist, nur solche Werte von ν zur Geltung, die nahe bei ν_0 liegen). Das Problem ist also zunächst unbestimmt. Wir können nur sagen, daß im allgemeinen die Aenderung der Schwingungsform jetzt auch das Spektrum beeinflussen wird, — in Uebereinstimmung mit dem von Herrn Voigt aus der Integration der Telegraphengleichung gezogenen Schluß.

Die Schwierigkeit, vor der wir hier stehen, ist offenbar ganz analog der, welche Herr Planck mittels der Hypothese der natürlichen Strahlung überwindet. Für die Energie eines von der Strahlung getroffenen Resonators, welcher der oben angegebenen Bedingung des „idealen" Resonators (nämlich $\varrho\nu_0$ groß gegen μ) nicht genügt, gilt nämlich: [2])

$$U_0 = \int d\mu\,(b_\mu - i a_\mu)e^{2\pi i\mu t}$$

9) $$b_\mu - i a_\mu = \frac{3c^3}{16\pi^2\sigma\nu_0^3}\int d\nu\, C_\nu C_{\nu+\mu} e^{i(\vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+\mu} + \gamma_\nu - \gamma_{\nu+\mu})}\sin\gamma_\nu \sin\gamma_{\nu+\mu}$$

---

1) Siehe für das Folgende M. Planck, Irreversible Strahlungsvorgänge, § 9, pag. 88—91.

2) l. c. Gleich 13) pag. 84.

Hier ist c die Lichtgeschwindigkeit in dem Medium, in welches der Resonator eingebettet ist, σ sein Dämpfungsdekrement und

$$\operatorname{cotg} \gamma_\nu = 2\pi \frac{\nu_0 - \nu}{\sigma \nu_0} \text{ [1]}$$

Um U_0 zu ermitteln, bedarf man zunächst auch der Kenntnis von C_ν und ϑ_ν, sodaß es unmöglich scheint, die Frage nach U_0 zu beantworten.

Herr Planck löst nun das Problem durch die Annahme, daß die Abweichungen der schnell veränderlichen Funktion

$$C_\nu C_{\nu+\mu} e^{i(\vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+\mu})}$$

von ihrem Mittelwert $\mathfrak{B}_\mu^0 - i\mathfrak{A}_\mu^0$ so unregelmäßig sind, daß man sie in 9) durch diesen Mittelwert ersetzen kann. Dies ist die Hypothese der natürlichen Strahlung.

Versuchen wir auf demselben Wege weiter zu kommen. Unser Problem läßt sich formulieren: Wie verhält sich ein „idealer“ Resonator mit vorgeschaltetem Farbenfilter unter dem Einfluß der Strahlung? Auch zur Beantwortung dieser Frage muß doch die Kenntnis des Spektrums ausreichen. Ersetzen wir also in 4) $C_\nu C_{\nu+\mu} e^{i(\vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+\mu})}$ durch $\mathfrak{B}_u^0 - i\mathfrak{A}_\mu^0$; so finden wir

$$\mathfrak{B}_\mu^{0\prime} - i\mathfrak{A}_\mu^{0\prime} = (\mathfrak{B}_\mu^0 - i\mathfrak{A}_\mu^0) \times$$
$$\times \frac{2}{\varrho \nu_0} \int d\nu \; e^{-(\varkappa_{\nu+\mu} + \varkappa_\nu) D} \cdot e^{\frac{2\pi i D}{v}\left(n_\nu \nu - n_{\nu+\mu}(\nu+\mu)\right)} \sin^2 \delta_\nu.$$

Dann aber ist $\mathfrak{B}_\mu^{0\prime} - i\mathfrak{A}_\mu^{0\prime}$ noch von ϱ abhängig, das außer in dem Faktor $\frac{2}{\varrho \nu_0}$ noch in $\sin^2 \delta_\nu$ auftritt. Nach dem im § 1 Gesagten widerspricht dies dem Begriff der natürlichen Strahlung.

Diesen Schluß können wir noch auf anderem Wege bestätigen. Wir stellen die 9) entsprechende Gleichung für die Strahlung nach dem Durchgang durch die absorbierende Schicht auf:

---

1) l. c. Gl. 6) pag. 79.

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{q\tau}{\varkappa_\nu}\right) = 2\varkappa\,\frac{d\nu}{dq} = \frac{\tau}{\varkappa_\nu + \nu\,\frac{d\varkappa_\nu}{d\nu}}$$

in Uebereinstimmung mit dem oben gefundenen Wert.

§ 3. Diskussion der Gleichungen 3) und 4) für grössere Werte von D.

Lassen wir D größer und größer werden, so kommen wir einmal an eine Grenze, an der die Gültigkeit der Bedingungen 6), oder wenigstens der einen von ihnen, aufhört, und damit wird auch das Resultat des vorhergehenden Paragraphen, die Gleichung 7), ungültig. Wir dürfen dann die Funktionen $e^{-(\varkappa_{\nu+\mu} + \varkappa_\nu) D}$ und $e^{\frac{2\pi i D}{v}\left(n_\nu \nu - n_{\nu+\mu}(\nu+\mu)\right)}$ bei der Integration nach ν in Gleichung 4) nicht mehr als konstant ansehen. Ueber den Zusammenhang von $\mathfrak{B}_\mu^{o\prime} - i\mathfrak{A}_\mu^{o\prime}$ und $\mathfrak{B}_\mu^o - i\mathfrak{A}_\mu^o$ läßt sich etwas Bestimmtes erst dann aussagen, wenn wir die Funktionen C_ν und ϑ_ν selbst, d. h. die Schwingungsform kennen. Diese kennen wir aber nie, alle spektralanalytischen Hilfsmittel liefern nur $J_0(t)$, oder, was dasselbe sagt, $\mathfrak{B}_\mu^o - i\mathfrak{A}_\mu^o$, den Mittelwert der in 4) auftretenden Größe $C_\nu C_{\nu+\mu} e^{i(\vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+\mu})}$[1]). (Bei Bildung dieses Mittelwerts kommen, wie schon oben erwähnt ist, nur solche Werte von ν zur Geltung, die nahe bei ν_0 liegen). Das Problem ist also zunächst unbestimmt. Wir können nur sagen, daß im allgemeinen die Aenderung der Schwingungsform jetzt auch das Spektrum beeinflussen wird, — in Uebereinstimmung mit dem von Herrn Voigt aus der Integration der Telegraphengleichung gezogenen Schluß.

Die Schwierigkeit, vor der wir hier stehen, ist offenbar ganz analog der, welche Herr Planck mittels der Hypothese der natürlichen Strahlung überwindet. Für die Energie eines von der Strahlung getroffenen Resonators, welcher der oben angegebenen Bedingung des „idealen" Resonators (nämlich $\varrho\nu_0$ groß gegen μ) nicht genügt, gilt nämlich:[2])

$$U_0 = \int d\mu\,(b_\mu - i a_\mu)\,e^{2\pi i \mu t}$$

9)
$$b_\mu - i a_\mu = \frac{8c^3}{16\pi^2\sigma\nu_0^3}\int d\nu\, C_\nu C_{\nu+\mu}\, e^{i(\vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+\mu} + \gamma_\nu - \gamma_{\nu+\mu})}\sin\gamma_\nu \sin\gamma_{\nu+\mu}$$

1) Siehe für das Folgende M. Planck, Irreversible Strahlungsvorgänge, § 9, pag. 88–91.

2) l. c. Gleich 13) pag. 84.

$$n_\nu + \nu \frac{d n_\nu}{d \nu} = \frac{d(n_\nu \nu)}{d \nu}$$

eine langsam veränderliche Funktion von ν ist, so ist

$$\frac{\nu}{\frac{d(n_\nu \nu)}{d\nu}} \frac{d^2(n_\nu \nu)}{d\nu^2}$$

eine mäßige Zahl. Da $\frac{d(n_\nu \nu)}{d\nu}$ selbst weder sehr groß noch sehr klein ist, so gilt dasselbe für $\nu \frac{d^2(n_\nu \nu)}{d\nu^2}$. $1/\mu$ soll eine meßbare Zeit sein, wir werden es nicht zu groß wählen, wenn wir es gleich 10^{-6} sec setzen, und den Bedingungen für ϱ genügen wir, wenn wir $\varrho = 10^{-5}$ wählen. Da $v = 3.10^{10}$ cm sec^{-1}, finden wir dann für D die Größenordnung 10^9 cm; und wir dürfen wohl behaupten, daß auf dieser Strecke auch der durchsichtigste ponderable Stoff die Licht- und Wärmestrahlung vollständig absorbiert.

Ist 6a) nicht erfüllt, so ist

$$\varkappa_\nu D \text{ mindestens von gleicher Ordnung wie } \frac{\varkappa_\nu}{\varrho \nu \frac{d\varkappa_\nu}{d\nu}}.$$

In schmalen Absorptionsstreifen kann nun $\frac{\nu}{\varkappa_\nu} \frac{d\varkappa_\nu}{d\nu}$ Werte wie 10^8 annehmen; trotzdem ist nach unseren Festsetzungen über ϱ $e^{-\varkappa_\nu D}$ ein so kleiner Bruch, daß der Nachweis der so geschwächten Strahlung kaum möglich sein dürfte. Immerhin führt diese Schätzung zu der schon von Herrn Planck ausgesprochenen Vermutung, daß man mit den feinen Hülfsmitteln der Optik der Grenze, an welcher der Konflikt mit dem zweiten Hauptsatz beginnt, erheblich näher kommen kann, als mit den verhältnismäßig roheren der Thermodynamik.

§ 4. Vergleich mit einem ähnlichen Problem.

Obwohl mir der im vorhergehenden Paragraphen gezogene Schluß durchaus zwingend zu sein scheint, möchte ich ihn durch Hinweis auf ein ähnliches Problem noch plausibler machen.

In einer Arbeit „Ueber die Natur des weißen Lichtes“ weist Herr M. Planck[1]) darauf hin, daß man durch fortgesetzte Ver-

1) M. Planck Ann. d. Phys. 7 pag. 391, 1902. Siehe pag. 398 oben.

größerung des Auflösungsvermögens spektralanalytischer Apparate schließlich mit dem zweiten Hauptsatz in Konflikt gerät. Nun ist das Auflösungsvermögen eines Prismas seiner Dicke proportional. So sehen wir auch hier, daß man durch Vergrößerung der Dicke einer dispergierenden Schicht an die Grenzen der Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes käme, wenn nicht die Absorption vorher die Strahlung auslöschte.

Der hier angewandte Satz läßt sich nun auf eine unserer bisherigen Untersuchung ganz analoge Art beweisen. Wir beschränken uns dabei auf den Fall eines Interferenzspektroskops (Gitter, Stufengitter oder Lummer'sche planparallele Platte). Interferieren mit einander p Strahlenbündel, ist die Verzögerung des $(n+1)$ten gegen das erste nu, und ist s^n seine relative Amplitude, so sind aus der durch 1) gegebenen Strahlung

$$\int_0^\infty d\nu\, C_\nu \sum_0^{p-1} s^n e^{i(2\pi\nu(t-nu)-\vartheta_\nu)}.$$

Bringt man das Integral auf die Form

$$\int_0^\infty d\nu\, C'_\nu e^{i(2\pi\nu t-\vartheta'_\nu)},$$

so erhält man in Analogie zu 2):

$$2')\quad \begin{aligned} C'_\nu e^{i\vartheta'_\nu} &= C_\nu e^{i\vartheta_\nu}\varphi(\nu); \\ \varphi(\nu) &= \frac{1-s^p e^{2p\pi iu\nu}}{1-se^{2\pi iu\nu}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt die 4) entsprechende Gleichung

$$4')\quad \left\{ \begin{aligned} J'_0(t) &= \int d\mu\, (\mathfrak{B}^{0\prime}_\mu - i\mathfrak{A}^{0\prime}_\mu)\, e^{2\pi i\mu t} \\ \mathfrak{B}^{0\prime}_\mu - i\mathfrak{A}^{0\prime}_\mu &= \frac{2}{\varrho\nu_0}\int d\nu\, \varphi(\nu)\,\overline{\varphi}(\nu+\mu)\, C_\nu C_{\nu+\mu}\, e^{i(\vartheta_\nu-\vartheta_{\nu+\mu})}\sin^2\delta_\nu, \end{aligned} \right.$$

wobei $\overline{\varphi}$ zu φ konjugiert komplex sein soll. Ist das Produkt pu, welches das Auflösungsvermögen bestimmt, nicht zu groß, so folgt hieraus

$$7')\quad J'_0(t) = |\varphi(\nu_0)|^2 J_0(t).$$

Sonst aber findet sich hier dieselbe Unmöglichkeit, die Hypothese der natürlichen Strahlung widerspruchsfrei anzuwenden, wie im letzten Paragraphen.

Die Aehnlichkeit beider Probleme ist nun keineswegs auf die Formeln beschränkt, sondern sie liegt im Wesen der Sache. Man kann eine dispergierende Platte von hinreichender Dicke auch als Spektroskop brauchen, wenn man die zu analysierende Strahlung nur kurze Zeit auf sie fallen läßt. Ist die Gruppengeschwindigkeit veränderlich mit der Schwingungszahl[1]), so erhält man nach dem Durchgang durch die Platte die einzelnen Schwingungszahlen zwar nicht räumlich getrennt, wie bei den gebräuchlichen Apparaten, wohl aber zeitlich. Das Auflösungsvermögen ist offenbar proportional sowohl zur Plattendicke D, als auch zur Dispersion der Gruppengeschwindigkeit, d. h. im einfachsten Fall zu $\frac{d^2(n_\nu \nu)}{d\nu^2}$, und gerade das Produkt aus diesen beiden Größen tritt in 6b) auf, wenn man sich dort auf das erste Glied beschränkt. In ähnlicher Weise liesse sich selektive Absorption verwerten, und zwar wäre hier das Auflösungsvermögen im einfachsten Fall proportional zu $D\frac{d\varkappa_\nu}{d\nu}$, dem Ausdruck, der in 6a) auftritt.

§ 5. Die Aenderung der Schwingungsform.

Kehren wir zurück zu unserem ursprünglichen Problem, der Fortpflanzung der Strahlung durch dispergierende und absorbierende Medien. Von Interesse ist noch die Frage: Kann in dem in § 2 betrachteten Bereich kleiner Werte von D schon eine merkliche Veränderung der Schwingungsform eintreten, oder findet diese erst statt, wenn D größere Werte annimmt? In letzterem Falle wäre es noch fraglich, ob eine Aenderung der Schwingungsform in der Natur tatsächlich vorkommt.

Bei der Beantwortung dieser Frage können wir uns von vornherein auf schmale Spektrallinien beschränken, denn nach 7) werden ja, wenigstens bei veränderlicher Intensität, die Teile des Spektrums zeitlich von einander getrennt, also muß bei einem kontinuirlichen Spektrum auch eine Aenderung in der Schwingungsform auftreten. Handelt es sich aber um monochromatisches Licht, treten also in 1) nur solche Werte von ν mit merklichem C_ν auf, welche nahe bei ν_0 liegen, so darf man in 2a) von der Abhängigkeit der Absorption von ν absehen und von der Reihenentwicklung

1) Ist sie es nicht, so ist in 6b) der Faktor von D gleich Null, also die Bedingung 6b) für alle Werte von D erfüllt.

$$n_\nu \nu = (n_\nu \nu)_0 + (\nu - \nu_0)\left(\frac{d(n_\nu \nu)}{d\nu}\right)_0 + \frac{(\nu-\nu_0)^2}{2!}\frac{d^2(n_\nu \nu)}{d\nu_0^2} + \cdots$$

alles fortlassen bis auf die beiden ersten Glieder; nach 6) spielt das Vernachlässigte für kleine Werte von D keine Rolle; man erhält so an Stelle von 2a)

$$e^{-\varkappa_0 D} e^{\frac{2\pi i D}{v}\nu_0^2\left(\frac{d n_\nu}{d\nu}\right)_0} \int d\nu\, C_\nu\, e^{i\left[2\pi\nu\left(t - \frac{D}{v}\left(\frac{d(n_\nu \nu)}{d\nu}\right)_0\right) - \vartheta_\nu\right]}.$$

Man sieht, an zwei Orten, welche um die Strecke

$$\frac{v}{\nu_0^2\left(\frac{d n_\nu}{d\nu}\right)_0}$$

von einander entfernt sind, ist, von der Schwächung durch Absorption abgesehen, der zeitliche Verlauf des Lichtvektors derselbe. Die Zeit, welche zwischen dem Auftreten entsprechender Zustände in diesen Punkten vergeht, berechnet sich so, wie wenn jeder Zustand sich mit Gruppengeschwindigkeit $\frac{v}{\frac{d(n_\nu \nu)}{d\nu}}$ fortpflanzte. In dazwischen liegenden Punkten ist aber der zeitliche Verlauf des Lichtvektors ein ganz anderer[1]).

Ueber das Verhältnis der Strecke $\frac{v}{\nu_0^2\left(\frac{d n_\nu}{d\nu}\right)_0}$ zu den durch die Bedingungen 6) für D gezogenen Grenzen läßt sich im Allgemeinen nichts aussagen. Die Aenderung der Schwingungsform kann also schon innerhalb der Grenze auftreten, welche durch die Bedingungen 6) für D gezogen ist.

§ 6. Ein Beispiel.

Einfache Sinusschwingungen waren bisher von der Betrachtung, die sich nur auf natürliches Licht bezog, ausgeschlossen. Der Satz, daß die Energie sich mit Gruppengeschwindigkeit fortpflanzt, gilt aber auch für sie. Denn er läßt sich bekanntlich durch Betrachtung des Schwingungsvorgangs beweisen, welcher durch

1) Dies Resultat wurde vor kurzem von Herrn A. Schuster auf nur wenig anderem Wege abgeleitet. (The propagation of waves through dispersive media. Boltzmannfestschrift pag. 569, 1904).

Uebereinanderlagerung zweier Sinusschwingungen von nahezu gleicher Schwingungszahl entsteht; und von hieraus führt ein einfacher Grenzübergang zu der einzelnen Sinusschwingung. Der einzige Unterschied liegt darin, daß der angeführte Satz hier bedingungslos gilt, da ja derartige geordnete Vorgänge zum zweiten Hauptsatz der Thermodynamik keine Beziehung haben. Dies wollen wir für den Fall bestätigen, daß die Dispersion durch das Mitschwingen elektrisch geladener Ionen verursacht ist. Wir beschränken uns dabei auf Gebiete unmerklicher Absorption und übertragen eine Ueberlegung, durch welche Herr O. Reynolds[1]) den Wert der Gruppengeschwindigkeit für die Wellen auf der Oberfläche von Flüssigkeiten berechnete, auf dies optische Problem.

Wären Gruppen- und Phasengeschwindigkeit mit einander identisch, so würde während einer Schwingungsperiode durch ein zur Strahlrichtung senkrechtes Flächenstück $d\omega$ ebensoviel Energie hindurchgestrahlt, wie sich in dem Cylinder befindet, welcher $d\omega$ zur Basis und die Wellenlänge $\frac{v}{n_\nu \nu}$ zur Höhe hat. Beträgt die Strahlung während einer Periode aber das α-fache dieser Energiemenge, so ist die Gruppengeschwindigkeit auch das α-fache der Phasengeschwindigkeit, oder, um es durch eine Formel auszudrücken,

$$u = \frac{vS}{n_\nu E},$$

wenn u die Gruppengeschwindigkeit, $S d\omega$ die Strahlung durch $d\omega$ in einer Periode und $E d\omega$ die Energie ist, welche sich in dem Cylinder von der Basis $d\omega$ und der Höhe $\frac{v}{n_\nu \nu}$ befindet.

Die Bezeichnungen entnehmen wir Herrn Voigt's magneto-optischen Arbeiten[2]); es ist also Y die y-Komponente der elektrischen, N die z-Komponente der magnetischen Feldstärke, $\mathfrak{Y}_h$ die y-Komponente des „elektrischen Hülfsvektors" $\mathfrak{K}_h$[3]). Nur ersetzen wir ϑ durch $\frac{1}{2\pi\nu}$. Die Lösung des Gleichungensystems lautet für eine in der x-Richtung fortschreitende, in der xz-Ebene polarisierte, ebene Welle:

---

1) O. Reynolds, Nature 16, pag. 343, 1877, siehe auch H. Lamb, Hydrodynamics, pag. 382, 1895.

2) Z. B. W. Voigt, Ann. d. Phys. u. Chem. 67, pag. 345, 1899.

3) Für $\mathfrak{Y}_h$ gilt: $\mathfrak{Y}_h + b_h \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}_h}{\partial t^2} = \varepsilon_h Y$, wenn wir das Dämpfungsglied fortlassen.

$$Y = a \sin 2\pi\nu\left(t - \frac{x n_\nu}{v}\right), \quad N = n_\nu a \sin 2\pi\nu\left(t - \frac{x n_\nu}{v}\right).$$

$$\mathfrak{Y}_h = \frac{\varepsilon_h a}{1 - 4\pi^2 b_h \nu^2} \sin 2\pi\nu\left(t - \frac{x n_\nu}{v}\right);$$

$$n_\nu^2 = 1 + \sum \frac{\varepsilon_h}{1 - 4\pi^2 b_h \nu^2}.$$

Daraus folgt

$$S = \frac{v}{4\pi}\int_0^{\frac{1}{\nu}} Y N dt = \frac{a^2 v n_\nu}{8\pi\nu}$$

$$E = \frac{1}{8\pi}\int_0^{n_\nu \frac{v}{\nu}}\left[Y^2 + N^2 + \sum \frac{1}{\varepsilon_h}\left(\mathfrak{Y}_h^2 + b_h\left(\frac{d\mathfrak{Y}_h}{dt}\right)^2\right)\right] dx \text{ [1]}$$

$$= \frac{a^2 v}{16\pi n_\nu \nu}\left(1 + n_\nu^2 + \sum \varepsilon_h \frac{1 + 4\pi^2 b_h \nu^2}{(1 - 4\pi^2 b_h \nu^2)^2}\right) = \frac{a^2 v}{8\pi n_\nu \nu}\left(1 + \sum \frac{\varepsilon_h}{(1 - 4\pi^2 b_h \nu^2)^2}\right)$$

$$u = \frac{v}{n_\nu}\frac{S}{E} = \frac{v n_\nu}{1 + \sum \frac{\varepsilon_h}{(1 - 4\pi^2 b_h \nu^2)^2}}.$$

Nun ist aber

$$n_\nu \nu \frac{dn_\nu}{d\nu} = \sum \frac{4\pi^2 \varepsilon_h b_h \nu^2}{(1 - 4\pi^2 b_h \nu^2)^2},$$

$$n_\nu + \nu \frac{dn_\nu}{d\nu} = \frac{1}{n_\nu}\left[1 + \sum \frac{\varepsilon_h}{(1 - 4\pi^2 b_h \nu^2)^2}\right],$$

also

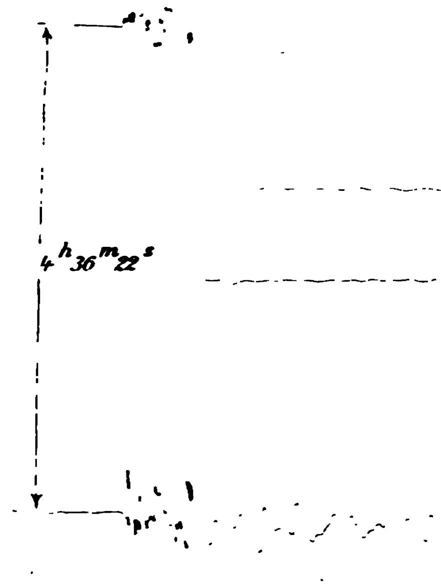
$$u = \frac{v}{n_\nu + \nu \frac{dn_\nu}{d\nu}},$$

q. e. d.

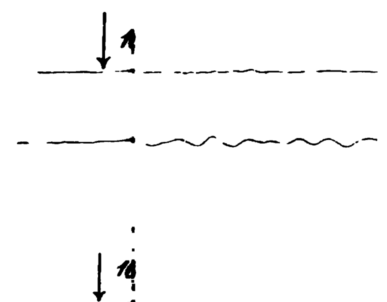
Hier ist $\frac{dn_\nu}{d\nu}$ positiv, also $u < \frac{v}{n_\nu}$. Diese Verzögerung der Energie gegen die Phasen liegt daran, daß die Strahlung S allein durch den Aether vermittelt wird, während zu der Energie E auch die Bewegung der Elektronen beiträgt.

---

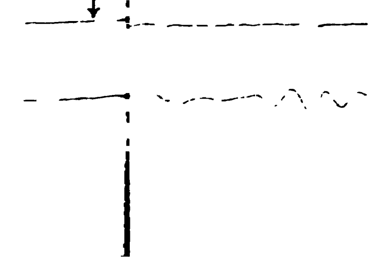
1) W. Voigt. Weiteres zur Theorie des Zeemanneffektes. Ann. d. Phys. u. Chem. 68, pag. 352, 1899, siehe besonders pag. 354, Gl. 5) und 6).



$4^h 36^m 22^s$



1



16

Etwas über Tensoranalysis.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung vom 29. Oktober 1904.

Daß die Vectoranalysis, die sich in der modernen Electrodynamik als so außerordentlich nützlich erwiesen hat, in anderen Gebieten der theoretischen Physik ungleich weniger leistet, liegt zum Theil daran, daß nur selten vectorielle Functionen ein Gebiet derartig fast absolut beherrschen, wie das in der Electrodynamik stattfindet. Schon in der Mechanik starrer Körper gesellen sich ihnen höhere Functionen, und in der Elasticitätslehre treten sie sogar in den Vordergrund. Eine Uebertragung der Methoden der Vectoranalysis auf diese Größen ist demgemäß von verschiedenen Autoren in Angriff genommen[1]). Dabei sind nach Lage des Problemes mehrere Wege möglich, und es hat vielleicht die Auseinandersetzung eines, wie mir scheint, von den bisher eingeschlagenen verschiedenen Verfahrens ein gewisses Interesse.

Im Folgenden stelle ich die wichtigsten Sätze zusammen, welche eine Uebertragung der Methode der Vectoranalysis auf die den Vectoren unmittelbar folgende höhere Art gerichteter Größen — die ich Tensoren zu nennen vorgeschlagen habe —, darstellen, und mache von ihnen Anwendungen auf die Ableitung der Gleichungen für die Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt und der Grundgesetze der deformirbaren, insbesondere der elastischen Medien. Daß noch höhere Arten ge-

---

1) S. z. B. als Neuestes zu dieser Frage L. Prandtl, Jahresber. der Deutschen Math.-Vereinigung, Bd. XIII, p. 447, 1904. Diese Arbeit gelangte erst während des Druckes der obigen Notiz zu meiner Kenntniß.

richteter Größen in der Physik — und zwar in ihrer freiesten Entfaltung in der Krystallphysik — auftreten, habe ich an einer anderen Stelle[1]) gezeigt; ihre Rolle ist aber bisher keine so ausgedehnte, daß man die Methode der Vectoranalysis auf sie auszudehnen schon Veranlassung hätte.

Die Bezeichnung, die (insbesondere durch die Encyclopädie der Mathematik) gegenwärtig am meisten empfohlen wird[2]), ist einer Ausdehnung der Methode der Vectoranalysis nicht eben günstig. Schon die Wahl der Symbole für Vectoren — die deutschen Lettern — erschwert eine analoge Hervorhebung anderer Größenarten; es charakterisirt vielleicht die in der Electrodynamik vorliegenden singulären Verhältnisse recht deutlich, daß es keinen Anstoß erregte, durch die Bezeichnung alle Größen, die nicht Vectoren sind, in einem bunten Haufen zusammengefaßt den Vectoren allein gegenüberzustellen.

Bei dem allgemeinen Gebrauch, den lateinische und griechische Cursiv-Buchstaben gewohnheitsmäßig finden, weiß ich als Symbole für die Tensoren nichts Besseres als Current-Lettern (griechisch oder lateinisch) vorzuschlagen. Im Uebrigen ist zunächst eine weitgehende Einführung neuer Bezeichnungen nicht nöthig. Ich behalte die a. a. O. empfohlenen Symbole [.] Vectorproduct, (.) skalares Product bei und ergänze sie nur durch das Symbol [[.]] für ein Tensorproduct, zu dessen Wahl ich schon dadurch genöthigt war, daß das eine Zeichen { } für die gewöhnliche Klammer vorbehalten werden mußte. Weitere naheliegende Productbildungen bleiben, als zunächst noch nicht nöthig, vorbehalten. Dem Product vom Tensorcharacter ordnet sich, wie zu zeigen, eine Summe von analoger Natur zu, die ich durch das entsprechende Symbol [[+]] oder [[$\sum$]] bezeichne.

In einer (mir von jeher wichtigen) Hinsicht werde ich aber von den Vorschlägen der Math. Enc. abweichen; ich will die völlige Gleichheit zwischen gerichteten Grössen stets mit $\#$ bezeichnen, um deutlich hervorzuheben, daß es sich zugleich um die Gleichheit von Zahlenwerthen und den Parallelismus von Richtungen handelt.

Zum Schluß möchte ich noch ein empfehlendes Wort für die von mir vorgeschlagene Bezeichnung Tensor für zweiseitige gerichtete Größen einlegen. Es ist ja unangenehm, daß der Name Tensor in der Vectoranalysis bereits in einem anderen Sinne

1) W. Voigt, Ann. d. Physik, 5, p. 241, 1901.

2) Encyclopädie der math. Wiss., V (2), p. 70 u. f.

geführt wird; aber einerseits ist er an jener Stelle entbehrlich und durch Zahlwerth des Vectors völlig ersetzbar, andererseits ist er so genau dem Namen des Vectors nachgebildet, nämlich von einer besonders einfachen und anschaulichen Art der betreffenden Größen hergeleitet, und giebt das Charakteristische so deutlich wieder, daß ich ihn in der neuen Verwendung für sehr nützlich halte. Schließlich wäre es ja kein Unglück, wenn der Name an zwei Stellen in verschiedener Bedeutung angewendet würde.

§ 1. *Tensortripel und ihre Componenten.* Als Tensortripel definiren wir ein System von drei zueinander normalen zweiseitigen gerichteten Größen, Tensoren, die wir mit $\mathrm{T}_1\,\mathrm{T}_2\,\mathrm{T}_3$ bezeichnen. Das Tripel hat sechs Bestimmungsstücke, die Zahlwerthe der drei Tensoren, die wir speziell unter $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3$ verstehen wollen, und die drei Winkel, die die Orientirung des Tripels gegen ein festes Koordinatensystem bestimmen. Die Zahlwerthe $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3$ können beliebig positiv oder negativ gewählt werden. Wegen der Zweiseitigkeit der Tensoren ist bezüglich der Bestimmung der Richtungswinkel eine gewisse Willkürlichkeit nothwendig, die sich darin äußert, daß statt des Systemes der neuen Richtungscosinus, die die einen Seiten der Tensoren bestimmen, auch die entgegengesetzten gewählt werden können.

Um die Componenten des Tensortripels zu definiren, knüpfen wir an die centrische Oberfläche zweiten Grades an, deren reciproke Halbaxenquadrate mit $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3$ übereinstimmen; ihre Gleichung sei in Bezug auf die absolut festen Axen X, Y, Z

$$(1) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A'yz + 2B'zx + 2C'xy = \pm 1.$$

Dann nennen wir A, B, C die Componenten erster, A', B', C' diejenigen zweiter Art nach den Richtungen X, Y, Z für das Tripel $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3$.

Beziehen wir die Oberfläche auf ihre Hauptaxen, so muß ihre Gleichung nach dem Gesagten die Form annehmen

$$(2) \qquad \mathrm{T}_1 a^2 + \mathrm{T}_2 b^2 + \mathrm{T}_3 c^2 = \pm 1,$$

wobei a, b, c je nach einer Seite von $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3$ gezählt werden, die an sich beliebig ist, aber stets so gewählt werden mag, daß a, b, c ein directes Coordinatenkreuz bildet.

Ist das System Richtungscosinus zwischen den beiden Axenkreuzen durch das Schema

(3)

	a	b	c
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

gegeben, so ist der Zusammenhang zwischen T_1, T_2, T_3 und den sechs Componenten bestimmt durch die Formeln

$$(4)\qquad \begin{aligned} A &= \sum T_h \alpha_h^2, & B &= \sum T_h \beta_h^2, & C &= \sum T_h \gamma_h^2, \\ A' &= \sum T_h \beta_h \gamma_h, & B' &= \sum T_h \gamma_h \alpha_h, & C' &= \sum T_h \alpha_h \beta_h. \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke empfehlen sich auch deshalb besonders als Bestimmungsstücke für ein Tensortripel, weil für sie in wichtigen Gebieten der Physik, insbesondere dem der Elasticität, das Superpositionsprinzip in derselben Form, wie für Vectorkomponenten gilt. Beliebig viele, zu gleichzeitiger Wirkung kommende Tensortripel sind dort einem einzigen Tripel äquivalent, dessen Componenten durch die Summen der parallelen Componenten gleicher Art der einzelnen Tripel gegeben sind.

§ 2. *Einige allgemeine Beziehungen.* Die Tensoranalysis tritt der Vectoranalysis gegenüber insbesondere dadurch von vornherein in Nachtheil, daß der Uebergang von den Componenten zum resultirenden Tripel (übereinstimmend mit dem Problem der Bestimmung der Hauptaxen einer centrischen Oberfläche zweiten Grades) nicht allgemein ausführbar ist, während die Bildung eines resultirenden Vectors aus seinen Componenten überaus leicht gelingt. Nur zwei wichtige Beziehungen für das resultirende Tripel ergeben sich ohne Weiteres.

Nach (4) ist erstens

$$(5)\qquad A + B + C = T_1 + T_2 + T_3;$$

die Summe der drei Componenten erster Art ist gleich der Summe der drei Tensorgrößen, — sie ist somit auch vom Coordinatensystem unabhängig, d. h. ein Scalar.

Wir knüpfen hieran sogleich eine Folgerung. Für ein Tripel mit drei gleichen Tensoren $T_1 = T_2 = T_3 = T_0$ lautet das System der Componenten

$$\begin{aligned} A_0 &= T_0, & B_0 &= T_0, & C_0 &= T_0, \\ A_0' &= 0, & B_0' &= 0, & C_0' &= 0. \end{aligned}$$

Die Superposition dieses Tripels mit dem in (4) enthaltenen giebt wieder Komponenten eines Tensortripels oder kürzer Tensorcom-

ponenten. Setzen wir insbesondere $T_0 = -(T_1+T_2+T_3) = -(A+B+C)$, so ergiebt sich, daß wenn A, B, C, A', B', C' Tensorcomponenten sind, Gleiches auch von dem System

$$(6) \qquad \begin{cases} -(B+C),\ -(C+A),\ -(A+B),\ A',\ B',\ C', \\ \text{gilt, somit auch von} \\ (B+C),\ (C+A),\ (A+B),\ -A',\ -B',\ -C'. \end{cases}$$

Nach (4) ist ferner zweitens

$$(7) \qquad A^2+B^2+C^2+2(A'^2+B'^2+C'^2) = T_1^2+T_2^2+T_3^2.$$

Es ist also auch das linksstehende Aggregat aus allen sechs Componenten vom Coordinatensystem unabhängig, somit ein Scalar.

Beiläufig sei bemerkt, daß die Ausdrücke (5) und (7) die einzigen Invarianten ersten und zweiten Grades aus den Tensorcomponenten darstellen und daß außer ihnen nur noch eine Invariante dritten Grades existirt.

§ 3. *Bezeichnungen für Tensoranalysis.* Wir haben bisher uns irgend welcher Methoden der Vectoranalysis nicht bedient. Für tensoranalytische Ueberlegungen bezeichnen wir das Tensortripel kurz durch T (oder eine andere Current-Letter) und ersetzen, um die Analogie zu den Symbolen $\mathfrak{V}_x$, $\mathfrak{V}_y$, $\mathfrak{V}_z$ eines Vectors $\mathfrak{V}$ herzustellen, die bisherigen Bezeichnungen der Componenten

$$A \quad B \quad C \quad A' \quad B' \quad C'$$

durch

$$T_{xx} \quad T_{yy} \quad T_{zz} \quad T_{yz} \quad T_{zx} \quad T_{xy}.$$

Aus den Formeln (1) und (4) ergiebt sich übereinstimmend, daß die Tensorcomponenten

$$T_{xx} \quad T_{yy} \quad T_{zz} \quad T_{yz} \quad T_{zx} \quad T_{xy}$$

sich bei einer Coordinatentransformation verhalten wie die Functionen

$$x^2 \quad y^2 \quad z^2 \quad yz \quad zx \quad xy.$$

Für manche allgemeine Betrachtungen ist es unbequem, daß die $T_{xx}, \dots T_{xy}$ sich nicht orthogonal transformiren; ich habe deshalb gelegentlich[1]) ein etwas anderes System von Componenten von den Werthen

$$T_{xx} \quad T_{yy} \quad T_{zz} \quad \sqrt{2}\,T_{yz} \quad \sqrt{2}\,T_{zx} \quad \sqrt{2}\,T_{xy}$$

als orthogonale Tensorcomponenten benutzt. Bei spe-

1) W. Voigt, l. c.

ciellen Anwendungen sind die oben eingeführten mitunter bequemer und sollen demgemäß hier beibehalten werden.

§ 4. *Das Tensorproduct aus zwei Vectoren.* Nach dem Gesagten ist, wenn $\mathfrak{V}$ einen Vector bezeichnet, das System Producte aus seinen Componenten

$$(8) \qquad \mathfrak{V}_x^2 \quad \mathfrak{V}_y^2 \quad \mathfrak{V}_z^2 \quad \mathfrak{V}_y\mathfrak{V}_z \quad \mathfrak{V}_z\mathfrak{V}_x \quad \mathfrak{V}_x\mathfrak{V}_y$$

ein specielles System von Tensorcomponenten; es entspricht ersichtlich dem Falle, daß zwei von den T_1, T_2, T_3 verschwinden, und der allein übrige Tensor eine Richtunng mit $\mathfrak{V}$ gemein hat.

Ein allgemeineres System Tensorcomponenten läßt sich aus zwei Vectoren $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ bilden nach dem Schema

$$\mathfrak{U}_x\mathfrak{V}_x, \quad \mathfrak{U}_y\mathfrak{V}_y, \quad \mathfrak{U}_z\mathfrak{V}_z,$$
$$\tfrac{1}{2}\{\mathfrak{U}_y\mathfrak{V}_z+\mathfrak{V}_y\mathfrak{U}_z\}, \quad \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{U}_z\mathfrak{V}_x+\mathfrak{V}_z\mathfrak{U}_x\}, \quad \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{U}_x\mathfrak{V}_y+\mathfrak{V}_x\mathfrak{U}_y\},$$

und dieses legt nahe, analog den Definitionen des skalaren und des Vectorproductes ein Tensorproduct aus zwei Vectoren

$$(9) \qquad [[\mathfrak{U}\,.\,\mathfrak{V}]] = [[\mathfrak{V}\,.\,\mathfrak{U}]]$$

einzuführen, dessen sechs Componenten die oben angegebenen Werthe besitzen. In Uebertragung der Bezeichnung der Vectoranalysis haben wir dann zu schreiben

$$(10) \qquad [[\mathfrak{U}\,.\,\mathfrak{V}]]_{xx} = \mathfrak{U}_x\mathfrak{V}_x, \ldots \quad [[\mathfrak{U}\,.\,\mathfrak{V}]]_{yz} = \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{U}_y\mathfrak{V}_z+\mathfrak{V}_y\mathfrak{U}_z\}, \ldots$$

Damit die Componenten zweiter Art verschwinden, das Tensortripel also auf die Hauptaxen bezogen sei, muß gelten

$$\frac{\mathfrak{U}_y}{\mathfrak{U}_z} = -\frac{\mathfrak{V}_y}{\mathfrak{V}_z}, \quad \frac{\mathfrak{U}_z}{\mathfrak{U}_x} = -\frac{\mathfrak{V}_z}{\mathfrak{V}_x}, \quad \frac{\mathfrak{U}_x}{\mathfrak{U}_y} = -\frac{\mathfrak{V}_x}{\mathfrak{V}_y}.$$

Es ist klar, daß dieselben nur befriedigt sein können, wenn ein Componentenpaar z. B. $\mathfrak{U}_z$ und $\mathfrak{V}_z$ verschwindet; hier bleibt dann die letzte der vorstehenden Bedingungen allein übrig. Die Vectoren $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ liegen also in der Ebene der zwei Tensoren T_1 und T_2 und zwar symmetrisch zu einem von ihnen.

Da man nach der dritten Bedingung $\mathfrak{V}_x = -k\mathfrak{U}_x$, $\mathfrak{V}_y = +k\mathfrak{U}_y$ setzen kann, so gilt bei Einführung des Hauptaxensystemes

$$T_1 = \mathfrak{U}_x\mathfrak{V}_x = -k\mathfrak{U}_x^2, \quad T_2 = \mathfrak{U}_y\mathfrak{V}_y = +k\mathfrak{U}_y^2, \quad T_3 = 0;$$

das in (10) definirte Tensortripel hat also immerhin noch speziellen Charakter. Da derselbe aber die Transformationseigenschaften nicht beeinflußt, so werden wir unten die Ausdrücke (10) unbedenklich zur Construction allgemeiner Tensorfunctionen benutzen dürfen.

Es mag darauf aufmerksam gemacht werden, daß nach obiger Konstruction von Tensorcomponenten aus Vectorkomponenten zwei Arten von Tensortripeln zu unterscheiden sind.

Haben die beiden Vectoren $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ gleichen Charakter, sind sie also beide polar oder beide axial, d. h., kehren für beide die Componenten bei Inversion des Coordinatensystemes die Vorzeichen um oder nicht um, so behalten bei dem gleichen Vorgang die Tensorcomponenten ihr Vorzeichen; haben $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ verschiedenen Charakter, so kehren sie es um.

Man wird die erste Art als polar, die zweite als axial bezeichnen können; insofern ein gedehnter Cylinder die Symmetrie eines einzelnen Tensors der ersten, ein gedrillter diejenige der zweiten Art besitzt. Beide Arten kommen in der Physik vor [1]).

Analoge Unterscheidungen können bei den in den folgenden Paragraphen aus Vectoren und Tensoren abgeleiteten Functionen gemacht werden; sie sollen aber nicht jedes Mal erörtert werden.

Es ist bekannt, daß Differentialquotienten von Vectorcomponenten nach Coordinaten sich bei Coordinatentransformationen ebenso verhalten wie die Producte derselben in die betreffenden Coordinaten; demgemäß sind

$$\frac{\partial \mathfrak{V}_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{V}_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathfrak{V}_z}{\partial z},$$
$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{V}_z}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{V}_y}{\partial z}\right), \quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{V}_x}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{V}_z}{\partial x}\right), \quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{V}_y}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{V}_x}{\partial y}\right)$$

gleichfalls Tensorcomponenten.

§ 5. *Die Tensorsumme eines Systems von Vectoren.* Noch nach einer zweiten Richtung kann man von dem Werthsystem (8) zu allgemeinen Tensorcomponenten gelangen; in der That haben die Ausdrücke

$$(11) \qquad \begin{gathered} \mathfrak{U}_x^2 + \mathfrak{V}_x^2, \quad \mathfrak{U}_y^2 + \mathfrak{V}_y^2, \quad \mathfrak{U}_z^2 + \mathfrak{V}_z^2, \\ \mathfrak{U}_y \mathfrak{U}_z + \mathfrak{V}_y \mathfrak{V}_z, \quad \mathfrak{U}_z \mathfrak{U}_x + \mathfrak{V}_z \mathfrak{V}_x, \quad \mathfrak{U}_x \mathfrak{U}_y + \mathfrak{V}_x \mathfrak{V}_y \end{gathered}$$

dieselben Transformationseigenschaften, wie (8), sind aber im Gegensatz zu jenen von einander unabhängig. Dabei ist die Beschränkung auf nur zwei Vectoren $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ offenbar unnöthig, und man kann, indem man durch $\sum$ die Summe über beliebig viele Vectoren andeutet, das allgemeine System Tensorcomponenten bilden

$$\begin{gathered} \sum \mathfrak{V}_x^2, \quad \sum \mathfrak{V}_y^2, \quad \sum \mathfrak{V}_z^2, \\ \sum \mathfrak{V}_y \mathfrak{V}_z, \quad \sum \mathfrak{V}_z \mathfrak{V}_x, \quad \sum \mathfrak{V}_x \mathfrak{V}_y. \end{gathered}$$

1) W. Voigt, l. c. p. 255.

Das zugehörige Tensortripel, die Tensorsumme eines Systemes von Vectoren, sei in

$$(12)\qquad [[\sum \mathfrak{B}^2]]$$

abgekürzt, wo dann gilt

$$(13)\qquad [[\sum \mathfrak{B}^2]]_x = \sum \mathfrak{B}_x^2, \ldots$$

Die Tensorsumme hat stets polaren Character.

In consequenter Anwendung der Bezeichnungen (9) und (12) wird man den Tensor mit den Componenten (8) durch $[[\mathfrak{B}.\mathfrak{B}]]$ oder $[[\mathfrak{B}^2]]$ bezeichnen.

§ 6. *Das Tensorproduct aus einem Vector und einem Tensortripel.* Setzen wir an Stelle von $\mathfrak{B}$ in $[[\mathfrak{U}.\mathfrak{B}]]$ das Vectorproduct $[\mathfrak{B}.\mathfrak{W}]$ aus den beiden Vectoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{W}$ ein, so bleibt der Charakter des Ausdruckes ungeändert. Seine sechs Componenten lauten

$$\mathfrak{U}_x[\mathfrak{B}.\mathfrak{W}]_x = \mathfrak{U}_x\{\mathfrak{B}_y\mathfrak{W}_z - \mathfrak{B}_z\mathfrak{W}_y\}, \ldots$$

$$\tfrac{1}{2}\{\mathfrak{U}_y[\mathfrak{B}.\mathfrak{W}]_z + \mathfrak{U}_z[\mathfrak{B}.\mathfrak{W}]_y\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\Big\{\mathfrak{U}_y\{\mathfrak{B}_x\mathfrak{W}_y - \mathfrak{B}_y\mathfrak{W}_x\} + \mathfrak{U}_z\{\mathfrak{B}_z\mathfrak{W}_x - \mathfrak{B}_x\mathfrak{W}_z\}\Big\}, \ldots$$

Bildet man diese Ausdrücke bei vertauschtem $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{W}$ und addirt die sich entsprechenden nach Multiplication mit $\frac{1}{2}$, wodurch wieder Tensorcomponenten entstehen, so treten in den Resultaten die Ausdrücke (10) auf, die allgemeinere Tensorcomponenten darstellen, und wir können behaupten, daß auch die sechs Functionen

$$\mathfrak{B}_y T_{xz} - \mathfrak{B}_z T_{xy}, \ldots$$

$$\tfrac{1}{2}\Big\{\{\mathfrak{B}_x T_{yy} - \mathfrak{B}_y T_{xy}\} - \{\mathfrak{B}_x T_{zz} - \mathfrak{B}_z T_{xz}\}\Big\}, \ldots$$

Tensorcomponenten sind. Es entspricht genau den Verfügungen der Vectoranalysis, wenn wir ein Tensorproduct

$$(14)\qquad [[\mathfrak{B}.T]] = -[[T.\mathfrak{B}]]$$

aus einem Vector und einem Tensortripel einführen, dessen sechs Componenten die obigen Functionen sind. Es gilt dann also

$$(15)\qquad \begin{aligned} [[\mathfrak{B}.T]]_{xx} &= \mathfrak{B}_y T_{xz} - \mathfrak{B}_z T_{xy}, \ldots \\ [[\mathfrak{B}.T]]_{yz} &= \tfrac{1}{2}\Big\{\{\mathfrak{B}_x T_{yy} - \mathfrak{B}_y T_{xy}\} - \{\mathfrak{B}_x T_{zz} - \mathfrak{B}_z T_{xz}\}\Big\}, \ldots \end{aligned}$$

Die Ausdrücke für die Componenten erster Art zeigen, daß, wenn man das Tensorproduct $[[\mathfrak{B}.T]] = \Theta$ setzt,

$$\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 = 0$$

ist; das Tensorproduct aus einem Vector und einem Tensor hat

also insofern speciellen Character, als die Summe der Zahlwerthe für die Tensoren des Tripels verschwindet, was für die characteristische Oberfläche (1) des Tripels eine leicht erkennbare specielle (hyperbolische) Form zur Folge hat.

Die Axen X, Y, Z, auf die sich die Ausdrücke (15) beziehen, sind vollkommen willkürlich; läßt man sie in je eine Seite der Tensoren $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3$ fallen — was durch Vertauschung der Indices x, y, z mit 1, 2, 3 angedeutet werden mag —, so wird aus (15) sehr einfach

$$(16) \qquad \begin{aligned} [[\mathfrak{V}.\mathrm{T}]]_{11} &= 0, \ldots \\ [[\mathfrak{V}.\mathrm{T}]]_{23} &= \tfrac{1}{2}\mathfrak{V}_1 \{\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_3\}, \ldots \end{aligned}$$

§ 7. *Das Vectorproduct aus einem Vector und einem Tensortripel.* Knüpft man an das Vectorproduct

$$[\mathfrak{U}.\mathfrak{V}]$$

an und vertauscht darin $\mathfrak{V}$ mit $[\mathfrak{V}.\mathfrak{W}]$, so hat das Product die Componenten

$$\mathfrak{U}_y\{\mathfrak{V}_x\mathfrak{W}_y - \mathfrak{W}_x\mathfrak{V}_y\} - \mathfrak{U}_z\{\mathfrak{V}_z\mathfrak{W}_x - \mathfrak{W}_z\mathfrak{V}_x\}, \ldots;$$

das oben angewendete Verfahren ergiebt, daß

$$\{\mathfrak{U}_x\mathrm{T}'_{yy} - \mathfrak{V}_y\mathrm{T}'_{xy}\} + \{\mathfrak{V}_x\mathrm{T}'_{zz} - \mathfrak{V}_z\mathrm{T}'_{xz}\}, \ldots$$

Vectorcomponenten sind.

Nun ist aber in § 2 gezeigt, daß wenn $\mathrm{T}'_{xx}, \ldots \mathrm{T}'_{yz}, \ldots$ Tensorcomponenten sind, Gleiches auch von

$$\mathrm{T}'_{yy} + \mathrm{T}'_{zz}, \ldots -\mathrm{T}'_{yz}, \ldots$$

gilt; wir können somit bei Einführung eines neuen Tensortripels T für die letzteren Componenten die betrachteten Vectorcomponenten auch schreiben

$$\mathfrak{V}_x\mathrm{T}_{xx} + \mathfrak{V}_y\mathrm{T}_{xy} + \mathfrak{V}_z\mathrm{T}_{xz}, \ldots$$

Dies veranlaßt die Einführung eines Vectorproductes

$$(17) \qquad [\mathfrak{V}.\mathrm{T}] = [\mathrm{T}.\mathfrak{V}]$$

aus einem Vector und einem Tensortripel mit den Componenten

$$(18) \qquad [\mathfrak{V}.\mathrm{T}]_x = \mathfrak{V}_x\mathrm{T}_{xx} + \mathfrak{V}_y\mathrm{T}_{xy} + \mathfrak{V}_z\mathrm{T}_{xz}, \ldots$$

Auch hier sind die Ausdrücke für die Componenten nach den Richtungen der Tensoren $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3$ — auf denen eine Seite hervor-

zuheben ist — von Interesse; es gilt nämlich, wenn diese Richtungen wieder durch die Indices 1, 2, 3 characterisirt werden, höchst einfach

$$[\mathfrak{V}.\mathrm{T}]_1 = \mathfrak{V}_1 \mathrm{T}_1, \ldots \tag{19}$$

Diese Formeln geben Aufschluß über die Lage und Größe des in (17) und (18) eingeführten wichtigen Vectors $[\mathfrak{V}.\mathrm{T}]$. Da nämlich $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3$ in § 1 als die reciproken Quadrate der Halbaxen a, b, c einer gewissen centrischen Oberfläche zweiten Grades definirt sind, so haben die in (19) angegebenen Componenten die Werthe

$$[\mathfrak{V}.\mathrm{T}]_1 = \mathfrak{V}_1/a^2, \quad [\mathfrak{V}.\mathrm{T}]_2 = \mathfrak{V}_2/b^2, \quad [\mathfrak{V}.\mathrm{T}]_3 = \mathfrak{V}_3/c^2.$$

Hieraus ergiebt sich, daß wenn in jener Oberfläche ein Radius parallel zu $\mathfrak{V}$ gezogen wird, dann der Vector $[\mathfrak{V}.\mathrm{T}]$ der Normalen auf der Tangentenebene in dem Schnittpunkt der Oberfläche mit dem Radius parallel ist.

Für die Größe $|[\mathfrak{V}.\mathrm{T}]|$ des resultirenden Vectors gilt

$$|[\mathfrak{V}.\mathrm{T}]| = \sqrt{\frac{\mathfrak{V}_1^2}{a^4} + \frac{\mathfrak{V}_2^2}{b^4} + \frac{\mathfrak{V}_3^2}{c^4}}$$

oder, wenn man mit dem zu $\mathfrak{V}$ parallelen Radius r erweitert,

$$|[\mathfrak{V}.\mathrm{T}]| = \frac{V}{r}\sqrt{\frac{\mathrm{r}_1^2}{a^4} + \frac{\mathrm{r}_2^2}{b^4} + \frac{\mathrm{r}_3^2}{c^4}} = \frac{V}{rn},$$

wobei n die Länge des Lothes vom Centrum der Oberfläche auf die Tangentenebene und V die Grösse von $\mathfrak{V}$ bezeichnet. —

Wegen der schon am Ende von § 4 benutzten Transformationseigenschaften der Differentialquotienten nach den Coordinaten sind übrigens nach (18) auch die Ausdrücke

$$\frac{\partial \mathrm{T}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{T}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{T}_{xz}}{\partial z}, \ldots$$

Componenten eines Vectors, den man wegen der großen Analogie mit der Divergenz eines Vectors passend durch div T bezeichnen kann. Wie das Symbol Δ, so bedeutet hiernach auch div eine verschiedene Größe je nach der Natur seines Argumentes.

§ 8. *Ein scalares Product aus zwei Tensortripeln.* Ein scalares Product aus einem Vector und einem Tensortripel existirt nicht; die beiden Functionen, die wir vorstehend betrachtet haben, sind die einzigen lineär aus einem Vector und einem Tensortripel zusammengesetzten Gebilde, die in das Bereich von Skalaren, Vectoren und

Tensoren fallen; es existirt zwar noch ein Product, das die Eigenschaften einer gerichteten Größe **dritten** Grades besitzt[1]), aber von diesen sollte hier ausdrücklich abgesehen werden. Dagegen kommen für uns noch zwei Producte aus zwei Tensortripeln in Betracht.

Die Functionen $(\mathfrak{U}.\mathfrak{X}).(\mathfrak{V}.\mathfrak{W})$ und $(\mathfrak{U}.\mathfrak{W}).(\mathfrak{V}.\mathfrak{X})$, unter $\mathfrak{X}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ Vectoren verstanden, sind Scalare, und Gleiches gilt von

$$\tfrac{1}{2}\left\{(\mathfrak{U}.\mathfrak{X}).(\mathfrak{V}.\mathfrak{W}) + (\mathfrak{U}.\mathfrak{W}).(\mathfrak{V}.\mathfrak{X})\right\}.$$

In diesem Ausdruck treten aber, wie man leicht erkennt, die Combinationen (10) sowohl für die Vectoren $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ wie für die Vectoren $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{W}$ auf; derselbe läßt sich somit auf zwei Tensortripel T und Θ zurückführen, und man erhält als **skalares Tensorproduct** die Function

$$(20)\qquad \begin{aligned}(T.\Theta) &= (\Theta.T)\\ &= \Theta_{xx}T_{xx} + \cdots + \cdots + 2\Theta_{yz}T_{yz} + \cdots + \cdots\end{aligned}$$

Sind die beiden Tensortripel einander parallel, so gewinnt das scalare Tensorproduct den einfacheren Werth

$$(T.\Theta) = T_1\Theta_1 + T_2\Theta_2 + T_3\Theta_3.$$

§ 9. *Ein Tensorproduct aus zwei Tensortripeln.* Vertauscht man in dem Tensorproduct

$$[[\mathfrak{U}.\mathfrak{V}]]$$

aus zwei Vectoren erst $\mathfrak{U}$ mit $[\mathfrak{U}.\mathfrak{X}]$, $\mathfrak{V}$ mit $[\mathfrak{V}.\mathfrak{W}]$, sodann $\mathfrak{U}$ mit $[\mathfrak{U}.\mathfrak{W}]$ und $\mathfrak{V}$ mit $[\mathfrak{V}.\mathfrak{X}]$, so erhält man wieder Tensorproducte. Die aus

$$\tfrac{1}{2}\left\{[[[\mathfrak{U}.\mathfrak{X}].[\mathfrak{V}.\mathfrak{W}]]] + [[[\mathfrak{U}.\mathfrak{W}].[\mathfrak{V}.\mathfrak{X}]]]\right\}$$

folgenden Componenten lassen sich wiederum nach (10) auf zwei Tensortripel zurückführen und man kann daher ein **Tensorproduct**

$$(21)\qquad [[T.\Theta]] = [[\Theta.T]]$$

aus zwei Tensortripeln einführen, dessen Componenten lauten

$$(22)\qquad \begin{aligned}[][[T.\Theta]]_{xx} &= T_{yy}\Theta_{zz} + T_{zz}\Theta_{yy} - 2T_{yz}\Theta_{yz}, \ \ldots\\ [][[T.\Theta]]_{yz} &= 2\left\{T_{zx}\Theta_{xy} + T_{xy}\Theta_{zx}\right\} - \left\{T_{xx}\Theta_{yz} + \Theta_{xx}T_{yz}\right\}, \ \ldots\end{aligned}$$

Mit Hülfe dieser Beziehungen lassen sich nun leicht Producte von drei und mehr Factoren bilden; so gilt z. B. in leicht ersichtlicher Weise

$$(23)\qquad (\mathfrak{U}.[\mathfrak{V}.T]) = ([[\mathfrak{U}.\mathfrak{V}]].T).$$

1) W. Voigt, l. c.

Es mag aber von dergleichen Betrachtungen vorerst abgesehen und zum Schluß nur noch eine auf alle die untersuchten Producte bezügliche allgemeine Bemerkung gemacht werden.

Nach dem Character der ganzen Betrachtung gestatten die auf die verschiedenen Producte bezüglichen Formeln (10), (13), (15), (18), (20), (22) eine gewisse Umkehrung, insofern, wenn die Natur der links stehenden Glieder und diejenige der einen Factorengattung rechts gegeben ist, die gewonnenen Resultate sofort den Character der andern Factorengattung feststellen.

Um ein Beispiel zu geben, so zeigen die Formeln (18), daß wenn drei Aggregate von der rechtsstehenden Form, die in Vectorcomponenten mit nur sechs unabhängigen Factoren in der dort ersichtlichen Anordnung lineär sind, wieder Vectorcomponenten darstellen, dann die sechs Factoren Tensorcomponenten sein müssen.

§ 10. *Die Rotationsgleichungen für ein absolut festes Bezugssystem.* Die Schwerpunkts- und Flächensätze für ein Punktsystem lauten in vectorieller Schreibweise

$$(24)\qquad \frac{d}{dt}\sum m_h \mathfrak{v}_h \;\#\; \sum \mathfrak{F}_h, \qquad \frac{d}{dt}\sum m_h [\mathfrak{r}_h . \mathfrak{v}_h] \;\#\; \sum [\mathfrak{r}_h . \mathfrak{F}_h],$$

worin $\mathfrak{v}_h$ die Geschwindigkeit des Massenpunktes m_h, $\mathfrak{r}_h$ seinen Radius-Vector nach den Coordinatenanfang, $\mathfrak{F}_h$ die auf ihn wirkende äußere Kraft bezeichnet. Ist das System ein starrer Körper, der um den festgehaltenen Coordinatenanfang drehbar ist, und bezeichnet $\mathfrak{w}$ die Rotationsgeschwindigkeit, so ist

$$\mathfrak{v}_h \;\#\; [\mathfrak{w} . \mathfrak{r}_h];$$

also gilt hier

$$(25)\qquad \begin{aligned} &\frac{d}{dt}\sum m_h [\mathfrak{w} . \mathfrak{r}_h] \;\#\; \sum \mathfrak{F}_h \;\#\; \mathfrak{F}, \\ &\frac{d}{dt}\sum m_h \big[\mathfrak{r}_h . [\mathfrak{w} . \mathfrak{r}_h]\big] \;\#\; \sum [\mathfrak{r}_h . \mathfrak{F}_h] \;\#\; \mathfrak{D}, \end{aligned}$$

wobei $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{D}$ Abkürzungen für die Resultante aller nach einem — z. B. dem festen — Punkt gelegten Kräfte $\mathfrak{F}_h$ und für das aus ihnen folgende Drehungsmoment sind. — $\mathfrak{F}$ ist die Reaction des festen Punktes.

Nun gilt aber bekanntlich

$$(26)\qquad \big[\mathfrak{r}_h . [\mathfrak{w} . \mathfrak{r}_h]\big] \;\#\; \mathfrak{w}(\mathfrak{r}_h . \mathfrak{r}_h) - \mathfrak{r}_h(\mathfrak{r}_h . \mathfrak{w})$$

und das Einsetzen in die Summe $\sum$ liefert wegen der Bedeutung von $(\mathfrak{r}_h . \mathfrak{r}_h)$ und $(\mathfrak{r}_h . \mathfrak{w})$

$$(27)\qquad \begin{aligned} \sum m_h(\mathfrak{r}_h\,.\,\mathfrak{r}_h) &= \sum m_h r_h^2 \\ \sum m_h \mathfrak{r}_h(\mathfrak{r}_h\,.\,\mathfrak{w}) &= \sum m_h \mathfrak{r}_h\left\{x_h \mathfrak{w}_x + y_h \mathfrak{w}_y + z_h \mathfrak{w}_z\right\} \\ &= \mathfrak{w}_x \sum m_h x_h \mathfrak{r}_h + \mathfrak{w}_y \sum m_h y_h \mathfrak{r}_h + \mathfrak{w}_z \sum m_h z_h \mathfrak{r}_h. \end{aligned}$$

Nach (12) und (13) sind aber

$$\sum m_h x_h^2,\ \ldots\ \sum m_h y_h z_h,\ \ldots$$

Tensorcomponenten des Tripels

$$(28)\qquad [[\textstyle\sum m_h \mathfrak{r}_h^2]] \ \#\ \mathrm{T}^0,$$

in dem T^0 eine neue Bezeichnung darstellt, und die Vergleichung mit (18) liefert

$$(29)\qquad \begin{aligned} \sum m_h(\mathfrak{r}_h\,.\,\mathfrak{r}_h) &= \mathrm{T}_1^0 + \mathrm{T}_2^0 + \mathrm{T}_3^0 \\ \sum m_h \mathfrak{r}_h(\mathfrak{r}_h\,.\,\mathfrak{w}) &\ \#\ [\mathfrak{w}\,.\,\mathrm{T}^0]. \end{aligned}$$

Unsere Gleichung (25²) nimmt hierdurch die Form

$$(30)\qquad \frac{d}{dt}\left(\mathfrak{w}(\mathrm{T}_1^0 + \mathrm{T}_2^0 + \mathrm{T}_3^0) - [\mathfrak{w}\,.\,\mathrm{T}^0]\right) \ \#\ \mathfrak{D}$$

an, die sich bei Einführung des in § 5 definirten zweiten Tensortripels T mit den Componenten

$$(31)\qquad \mathrm{T}_{xx} = \sum m_h(y_h^2 + z_h^2),\ \ldots\ \mathrm{T}_{yz} = -\sum m_h y_h z_h,\ \ldots$$

schließlich reducirt auf die höchst einfache Beziehung

$$(32)\qquad \frac{d}{dt}[\mathfrak{w}\,.\,\mathrm{T}] \ \#\ \mathfrak{D}.$$

Das Tensortripel T resp. $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3$ ist dasjenige der Hauptträgheitsmomente des Körpers um den festen Punkt; die Komponenten erster Art $\mathrm{T}_{xx}, \mathrm{T}_{yy}, \mathrm{T}_{zz}$ stellen seine Trägheitsmomente, die zweiter Art $\mathrm{T}_{yz}, \mathrm{T}_{zx}, \mathrm{T}_{xy}$ seine Deviationsmomente nach den (festen) X-, Y-, Z-Coordinatenaxen dar.

§ 11. *Die Rotationsgleichungen für ein mit dem Körper bewegtes Bezugssystem.* Es ist bekannt, daß die in gewöhnlicher Form geschriebenen Differentialgleichungen der Rotation sich bemerkenswerth vereinfachen, wenn man sie auf ein geeignetes mit dem Körper fest verbundenes und mit ihm bewegtes Coordinatensystem bezieht. Wir wollen untersuchen, was unter gleicher Voraussetzung aus der Vectorgleichung (32) wird.

Allgemein gilt, wenn $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ Einheitsvectoren auf einem Axenkreuz a, b, c bezeichnen,

$$(33)\qquad \mathfrak{B}_a = (\mathfrak{B}\,.\,\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{B}),$$

und somit

$$\frac{d\mathfrak{B}_a}{dt} = \left(\mathfrak{B}\cdot\frac{d\mathfrak{a}}{dt}\right) + \left(\mathfrak{a}\cdot\frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right). \tag{34}$$

Nun ist aber bekanntlich im Falle der Rotation mit der Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$

$$\frac{d\mathfrak{a}}{dt} = [\mathfrak{a}.\mathfrak{w}]; \tag{35}$$

wir haben somit

$$\frac{d\mathfrak{B}_a}{dt} = (\mathfrak{B}.[\mathfrak{a}.\mathfrak{w}]) + \left(\mathfrak{a}\cdot\frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right),$$

oder wegen

$$(\mathfrak{B}.[\mathfrak{a}.\mathfrak{w}]) = (\mathfrak{a}.[\mathfrak{w}.\mathfrak{B}])$$

auch

$$\frac{d\mathfrak{B}_a}{dt} = \left(\mathfrak{a}\cdot\left\{[\mathfrak{w}.\mathfrak{B}] + \frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right\}\right), \tag{36}$$

ein Ausdruck, der die Form von (33) hat und demgemäß zu deuten ist. Hieraus ergiebt sich aber, daß, **wenn man die Componenten von $\mathfrak{B}$ nur auf mit dem Coordinatensystem a, b, c rotirende Richtungen bezieht**, zu ersetzen ist

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} \text{ durch } \frac{d\mathfrak{B}}{dt} + [\mathfrak{w}.\mathfrak{B}].$$

Bei Benutzung dieses Resultates und bei Berücksichtigung der Constanz der Componenten von T nach den mit dem Körper bewegten Axen nimmt die Gleichung (32) die Form an

$$\left[\mathrm{T}\cdot\frac{d\mathfrak{w}}{dt}\right] + [\mathfrak{w}.[\mathfrak{w}.\mathrm{T}]] \# \mathfrak{D}; \tag{37}$$

es ist dabei zu beachten, daß dieselbe über die Richtungen, nach denen die Componenten der in ihnen auftretenden Vectoren zu nehmen sind, noch weite Freiheit läßt.

Der wichtigste Fall ist der, daß jene Richtungen in die eine Seite der Tensoren $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3$ — die Hauptträgheitsaxen des Körpers — fallen. Hier reduciren sich nach (19) die Componenten von $[\mathfrak{w}.\mathrm{T}]$ auf

$$\mathfrak{w}_1\mathrm{T}_1, \quad \mathfrak{w}_2\mathrm{T}_2, \quad \mathfrak{w}_3\mathrm{T}_3,$$

und es folgt, da die T_h von der Zeit unabhängig sind, aus (37),

$$\begin{cases} T_1 \dfrac{d\mathfrak{w}_1}{dt} + \mathfrak{w}_2 \mathfrak{w}_3 \{T_3 - T_2\} = \mathfrak{D}_1, \\ T_2 \dfrac{d\mathfrak{w}_2}{dt} + \mathfrak{w}_3 \mathfrak{w}_1 \{T_1 - T_3\} = \mathfrak{D}_2, \\ T_3 \dfrac{d\mathfrak{w}_3}{dt} + \mathfrak{w}_1 \mathfrak{w}_2 \{T_2 - T_1\} = \mathfrak{D}_3. \end{cases}$$

Das sind die Eulerschen Gleichungen. —

Die Gleichung der lebendigen Kraft des rotirenden Körpers lautet nach (37)

$$\left(\mathfrak{w} . \left[T \cdot \frac{d\mathfrak{w}}{dt}\right]\right) + \left(\mathfrak{w} . [\mathfrak{w} . [\mathfrak{w} . T]]\right) = (\mathfrak{w} . \mathfrak{D});$$

da aber bekanntlich

$$(\mathfrak{U} [\mathfrak{V} . \mathfrak{W}]) = (\mathfrak{V} [\mathfrak{W} . \mathfrak{U}]) = (\mathfrak{W} [\mathfrak{U} . \mathfrak{V}])$$

ist, so findet sich

$$\left(\mathfrak{w} . [\mathfrak{w} . [\mathfrak{w} . T]]\right) = ([\mathfrak{w} . T] . [\mathfrak{w} . \mathfrak{w}]) = 0$$

und die obige Formel nimmt bei Berücksichtigung von (23) die Gestalt an

$$\left(\left[\left[\mathfrak{w} \cdot \frac{d\mathfrak{w}}{dt}\right]\right] \cdot T\right) = (\mathfrak{w} . \mathfrak{D})$$

was identisch ist mit

$$(38) \qquad \tfrac{1}{2} \frac{d}{dt} ([[\mathfrak{w}^2]] . T) = (\mathfrak{w} . \mathfrak{D}).$$

Für die lebendige Kraft ψ des rotirenden Körpers ergiebt sich hierdurch der Ausdruck

$$\psi = \tfrac{1}{2} ([[\mathfrak{w}^2]] . T).$$

§ 12. *Die Grundformeln für deformirbare Körper.* Bezeichnet ϱ die Dichte, $\mathfrak{v}$ die Verrückung, $\mathfrak{F}$ die auf die Volumeneinheit bezogene äußere Kraft, $\mathfrak{P}_{(n)}$ die auf eine Flächeneinheit normal zu n bezogene Druckkraft (nicht die Componente von $\mathfrak{P}$ nach der Richtung von n), so lautet der Schwerpunktssatz für ein beliebiges Bereich eines deformirbaren Körpers

$$\int \{\mathfrak{F} - \varrho \ddot{\mathfrak{v}}\} dk + \int \mathfrak{P}_{(n)} do \;\#\; 0;$$

hierbei ist das erste Integral über das Volumen, das zweite über die Oberfläche des abgegrenzten Bereiches erstreckt.

Bei festgehaltenem n ist $\mathfrak{P}_{(n)}$ ein Vector; es gilt demgemäß, wenn, wie gewöhnlich, $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ auf den Coordinatenaxen aufgetragene

Einheitsvectoren und $X_{(n)}, Y_{(n)}, Z_{(n)}$ die Componenten von $\mathfrak{P}_{(n)}$ nach den Axen bezeichnen,

(40) $$\mathfrak{P}_{(n)} \mathrel{\#} \mathfrak{i} X_{(n)} + \mathfrak{j} Y_{(n)} + \mathfrak{k} Z_{(n)}.$$

Das Verhalten von $\mathfrak{P}_{(n)}$ bei veränderlichen n ergiebt sich in bekannter Weise durch Anwendung der Gleichung (39) auf ein unendlich kleines Tetraeder mit Flächen normal zu x, y, z und n, wobei das Raumintegral neben dem Oberflächenintegral ignorirt werden kann, zu

(41) $$\mathfrak{P}_{(n)} \mathrel{\#} \mathfrak{P}_{(x)} \cos(n, x) + \mathfrak{P}_{(y)} \cos(n, y) + \mathfrak{P}_{(z)} \cos(n, z)$$

oder bei Einführung eines parallel n liegenden Einheitsvectors $\mathfrak{n}$

(42) $$\mathfrak{P}_{(n)} \mathrel{\#} \mathfrak{P}_{(x)} \mathfrak{n}_x + \mathfrak{P}_{(y)} \mathfrak{n}_y + \mathfrak{P}_{(z)} \mathfrak{n}_z.$$

Hierbei haben die Indices (x), (y), (z) dieselbe Bedeutung wie (n), d. h. characterisiren das Flächenelement, gegen welches der Druck wirkend gedacht ist.

Setzt man den Ausdruck (41) in (39) ein, verwandelt das Oberflächenintegral in ein Raumintegral und berücksichtigt, daß über das Integrationsgebiet keinerlei Annahme gemacht ist, so erhält man

(43) $$\mathfrak{F} - \varrho \ddot{\mathfrak{v}} - \frac{\partial \mathfrak{P}_{(x)}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{P}_{(y)}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{P}_{(z)}}{\partial z} \mathrel{\#} 0.$$

Der Flächensatz für dasselbe Gebiet des deformirbaren Körpers lautet, falls $\mathfrak{r}$ wiederum den Radiusvector vom Coordinatenanfang bezeichnet,

(44) $$\int [\mathfrak{r} . \{\mathfrak{F} - \varrho \ddot{\mathfrak{v}}\}] + \int [\mathfrak{r} . \mathfrak{P}_{(n)}] \, do \mathrel{\#} 0.$$

Bei Anwendung auf ein unendlich kleines Parallelopiped mit Flächen normal zu x, y, z, wobei wiederum das Raumintegral neben dem Flächenintegral zu ignoriren ist, ergeben sich daraus in bekannter Weise die Beziehungen

(45) $$Y_{(z)} = Z_{(y)}, \quad Z_{(x)} = X_{(z)}, \quad X_{(y)} = Y_{(x)}.$$

Wegen ihrer Gültigkeit gestattet der aus (40) und (42) folgende Ausdruck für den Vector $\mathfrak{P}_{(n)}$, nämlich

(46) $$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{(n)} \mathrel{\#} \; & \mathfrak{i} \{ X_{(x)} \mathfrak{n}_x + X_{(y)} \mathfrak{n}_y + X_{(z)} \mathfrak{n}_z \} \\ + \; & \mathfrak{j} \{ Y_{(x)} \mathfrak{n}_x + Y_{(y)} \mathfrak{n}_y + Y_{(z)} \mathfrak{n}_z \} \\ + \; & \mathfrak{k} \{ Z_{(x)} \mathfrak{n}_x + Z_{(y)} \mathfrak{n}_y + Z_{(z)} \mathfrak{n}_z \}, \end{aligned}$$

die Vergleichung mit den Formeln (18); dieselbe ergiebt, daß

$$X_{(x)}, Y_{(y)}, Z_{(z)}, Y_{(z)} = Z_{(y)}, Z_{(x)} = X_{(z)}, X_{(y)} = Y_{(x)}$$

Componenten eines Tensortripels (des Tripels der Hauptdrucke) sind, das T heißen möge, und daß bei erneuter Einführung des Einheitsvectors $\mathfrak{n}$ in der Richtung n geschrieben werden kann

(47) $$\mathfrak{P}_{(n)} \;\#\; [\mathfrak{n} . \mathrm{T}].$$

Auch kann man nun nach dem am Ende von § 7 Gesagten

(48) $$\frac{\partial \mathfrak{P}_{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{P}_{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{P}_{(z)}}{\partial z} \;\#\; \operatorname{div} \mathrm{T}$$

setzen und demgemäß der Gleichung (43) die einfache Gestalt

(49) $$\mathfrak{F} - \varrho \ddot{\mathfrak{v}} - \operatorname{div} \mathrm{T} \;\#\; 0$$

geben.

§ 13. *Specialisirung für elastische Körper.* In der Elasticitätslehre sind die Druckcomponenten $X_{(x)}, \ldots X_{(y)}$ homogene lineäre Functionen der sechs Deformationsgrößen

$$x_{(x)} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad y_{(y)} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad z_{(z)} = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$y_{(z)} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad z_{(x)} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad x_{(y)} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

und es folgt aus § 4, daß

$$x_{(x)}, \; y_{(y)}, \; z_{(z)}, \; \tfrac{1}{2} y_{(z)}, \; \tfrac{1}{2} z_{(x)}, \; \tfrac{1}{2} x_{(y)}$$

gleichfalls Tensorcomponenten sind.

Sind die Componenten eines Vectors $\mathfrak{U}$ homogene lineäre Functionen derjenigen eines Vectors $\mathfrak{B}$, so schreibt man diesen Zusammenhang nach dem Vorschlag von Lorentz symbolisch

$$\mathfrak{U} \;\#\; (a)\mathfrak{B}, \quad \mathfrak{B} \;\#\; (a')\mathfrak{U}.$$

Genau ebenso kann man den analogen Zusammenhang zwischen zwei Tensortripeln T und Θ in der Form

(50) $$\mathrm{T} \;\#\; (c)\Theta, \quad \Theta \;\#\; (c')\mathrm{T}$$

darstellen.

In dem speciellen Falle, daß die beiden Tripel einander parallel sind, läßt sich diese Beziehung auf die einfachere Form

(51) $$\mathrm{T}_1 = c^0_{11}\Theta_1 + c^0_{12}\Theta_2 + c^0_{13}\Theta_3, \; \ldots$$

bringen, und wenn das Medium, auf welches sie sich bezieht, isotrop ist, wird speciell

(52) $$\begin{aligned} \mathrm{T}_1 &= c\Theta_1 + c_1\Theta_2 + c_1\Theta_3, \\ \mathrm{T}_2 &= c_1\Theta_1 + c\Theta_2 + c_1\Theta_3, \\ \mathrm{T}_3 &= c_1\Theta_1 + c_1\Theta_2 + c\Theta_3. \end{aligned}$$

Bezogen auf ein beliebiges Coordinatensystem giebt dies

(53) $$\begin{aligned} T_{xx} &= c\Theta_{xx} + c_1\Theta_{yy} + c_1\Theta_{zz}, \ldots \\ T_{yz} &= \{c - c_1\}\Theta_{yz}, \ldots \end{aligned}$$

Identificiren wir T_{xx} mit $-X_{(x)} \ldots$, T_{xy} mit $-X_{(y)}$, Θ_{xx} mit $x_{(x)} \ldots$, Θ_{yz} mit $\frac{1}{2} y_{(z)} \ldots$, so wird nach (40)

(54) $$\begin{aligned} -\mathfrak{P}_{(x)} &= \mathfrak{i}\{c\Theta_{xx} + c_1\Theta_{yy} + c_1\Theta_{zz}\} \\ &+ \{c - c_1\}\{\mathfrak{j}\Theta_{xy} + \mathfrak{k}\Theta_{zx}\}, \ldots \end{aligned}$$

d. h. wegen (5)

(55) $$\begin{aligned} -\mathfrak{P}_{(x)} &= \mathfrak{i} c_1\{\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3\} \\ &+ \{c - c_1\}\{\mathfrak{i}\Theta_{xx} + \mathfrak{j}\Theta_{xy} + \mathfrak{k}\Theta_{xz}\}, \ldots \end{aligned}$$

Schreibt man kurz den Scalar

$$\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 = \vartheta,$$

und bedenkt, daß

$$\Theta_{xx}\mathfrak{n}_x + \Theta_{xy}\mathfrak{n}_y + \Theta_{xz}\mathfrak{n}_z, \ldots$$

nach (18) die Componenten des Vectorproductes $[\mathfrak{n}.\Theta]$ sind, so ergiebt sich aus (42) und (53)

(57) $$\mathfrak{P}_{(n)} \# c_1\vartheta\mathfrak{n} + \{c - c_1\}[\mathfrak{n}.\Theta].$$

$\mathfrak{P}_{(n)}$ erscheint hiernach als die Resultante aus dem mit $\mathfrak{n}$ parallelen Vector $c_1\vartheta$, der die Rolle eines hydrostatischen Druckes spielt, und dem Vector $\{c - c_1\}[\mathfrak{n}.\Theta]$ über dessen Richtung und Größe in § 7 gesprochen ist. $\mathfrak{P}_{(x)}$, $\mathfrak{P}_{(y)}$, $\mathfrak{P}_{(z)}$ sind aber nicht etwa die Componenten von $\mathfrak{P}_{(n)}$ nach den Coordinatenaxen; sie stellen sich nach (41) vielmehr als die Componenten eines zu *n* parallelen Vectors von der Größe $|\mathfrak{P}_{(n)}|$ dar, der keine directe physikalische Bedeutung besitzt.

Führt man die Ausdrücke $x_{(x)}, \ldots \frac{1}{2}x_{(y)}$ für $\Theta_{xx}, \ldots \Theta_{xy}$ ein, so wird aus (55) wegen $\mathfrak{i}u + \mathfrak{j}v + \mathfrak{k}w \# \mathfrak{v}$

(58) $$-\mathfrak{P}_{(x)} \# \mathfrak{i}\tfrac{1}{2}\{c + c_1\}\vartheta + \tfrac{1}{2}\{c - c_1\}\left(\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial x}\right),$$

wobei $\vartheta = \operatorname{div}\mathfrak{v}$ ist, und das Einsetzen in (43) ergiebt

(59) $$\mathfrak{F} - \varrho\ddot{\mathfrak{v}} + \tfrac{1}{2}\{c + c_1\}\operatorname{grad}\vartheta + \tfrac{1}{2}\{c - c_1\}\Delta\mathfrak{v} \# 0,$$

d. h. die vectorielle Form der Bewegungsgleichungen für isotrope elastische Körper.

Daß das scalare Tensorproduct $(T.\Theta)$ aus § 8 bei der hier benutzten Deutung der beiden Tensortripel T und Θ die doppelte Energie der Volumeneinheit des deformirten elastischen Körpers

darstellt, ist bekannt. Setzt man wie oben

$$\mathrm{T} \# (c)\Theta, \quad \Theta \# (c')\mathrm{T},$$

so erhält man dafür die beiden völlig allgemeinen Ausdrücke $\big((c)\Theta\,.\,\Theta\big)$ und $\big((c')\mathrm{T}\,.\,\mathrm{T}\big)$. Eine specielle Form für isotrope Körper ergiebt sich aus (52) zu

$$(60)\qquad \begin{aligned} &c\,\{\Theta_1^2+\Theta_2^2+\Theta_3^2\}+2c_1\{\Theta_2\Theta_3+\Theta_3\Theta_1+\Theta_1\Theta_2\}\\ &\quad=\{c-c_1\}\{\Theta_1^2+\Theta_2^2+\Theta_3^2\}+c_1\{\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3\}^2.\end{aligned}$$

Beide Klammerausdrücke sind nach § 2 invariant und lassen sich nach den Formeln (5) und (7) in den allgemeinen Tensorcomponenten ausdrücken.

Bezogen auf ein beliebiges Coordinatensystem giebt dies

$$(53)\qquad \begin{aligned} \mathrm{T}_{xx} &= c\Theta_{xx} + c_1\Theta_{yy} + c_1\Theta_{zz}, \ldots \\ \mathrm{T}_{yz} &= \{c - c_1\}\,\Theta_{yz}, \ldots \end{aligned}$$

Identificiren wir T_{xx} mit $-X_{(x)}\ldots$, T_{xy} mit $-X_{(y)}$, Θ_{xx} mit $x_{(x)}\ldots$, Θ_{yz} mit $\frac{1}{2}y_{(z)}\ldots$, so wird nach (40)

$$(54)\qquad \begin{aligned} -\mathfrak{P}_{(x)} = \mathfrak{i}\,\{c\Theta_{xx} + c_1\Theta_{yy} + c_1\Theta_{zz}\} \\ + \{c - c_1\}\{\mathfrak{j}\Theta_{xy} + \mathfrak{k}\Theta_{xz}\}, \ldots \end{aligned}$$

d. h. wegen (5)

$$(55)\qquad \begin{aligned} -\mathfrak{P}_{(x)} = \mathfrak{i}\,c_1\{\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3\} \\ + \{c - c_1\}\{\mathfrak{i}\Theta_{xx} + \mathfrak{j}\Theta_{xy} + \mathfrak{k}\Theta_{xz}\}, \ldots \end{aligned}$$

Schreibt man kurz den Scalar

$$\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 = \vartheta,$$

und bedenkt, daß

$$\Theta_{xx}\mathfrak{n}_x + \Theta_{xy}\mathfrak{n}_y + \Theta_{xz}\mathfrak{n}_z, \ldots$$

nach (18) die Componenten des Vectorproductes $[\mathfrak{n}.\Theta]$ sind, so ergiebt sich aus (42) und (53)

$$(57)\qquad \mathfrak{P}_{(n)} \;\#\; c_1\vartheta\mathfrak{n} + \{c - c_1\}[\mathfrak{n}.\Theta].$$

$\mathfrak{P}_{(n)}$ erscheint hiernach als die Resultante aus dem mit $\mathfrak{n}$ parallelen Vector $c_1\vartheta$, der die Rolle eines hydrostatischen Druckes spielt, und dem Vector $\{c - c_1\}[\mathfrak{n}.\Theta]$ über dessen Richtung und Größe in § 7 gesprochen ist. $\mathfrak{P}_{(x)}$, $\mathfrak{P}_{(y)}$, $\mathfrak{P}_{(z)}$ sind aber nicht etwa die Componenten von $\mathfrak{P}_{(n)}$ nach den Coordinatenaxen; sie stellen sich nach (41) vielmehr als die Componenten eines zu n parallelen Vectors von der Größe $|\mathfrak{P}_{(n)}|$ dar, der keine directe physikalische Bedeutung besitzt.

Führt man die Ausdrücke $x_{(x)}, \ldots \frac{1}{2}x_{(y)}$ für $\Theta_{xx}, \ldots \Theta_{xy}$ ein, so wird aus (55) wegen $\mathfrak{i}u + \mathfrak{j}v + \mathfrak{k}w \;\#\; \mathfrak{v}$

$$(58)\qquad -\mathfrak{P}_{(x)} \;\#\; \mathfrak{i}\tfrac{1}{2}\{c + c_1\}\,\vartheta + \tfrac{1}{2}\{c - c_1\}\left(\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial x}\right),$$

wobei $\vartheta = \operatorname{div}\mathfrak{v}$ ist, und das Einsetzen in (43) ergiebt

$$(59)\qquad \mathfrak{F} - \varrho\ddot{\mathfrak{v}} + \tfrac{1}{2}\{c + c_1\}\operatorname{grad}\vartheta + \tfrac{1}{2}\{c - c_1\}\Delta\mathfrak{v} \;\#\; 0,$$

d. h. die vectorielle Form der Bewegungsgleichungen für isotrope elastische Körper.

Daß das scalare Tensorproduct $(\mathrm{T}.\Theta)$ aus § 8 bei der hier benutzten Deutung der beiden Tensortripel T und Θ die doppelte Energie der Volumeneinheit des deformirten elastischen Körpers

formation unterworfen wird, ist in allgemeinster Form als Punktmenge, genauer als abgeschlossene resp. perfecte Punktmenge aufzufassen. Dann ist zu fragen, welche Eigenschaften einer solchen Punktmenge bei umkehrbar eindeutiger und stetiger Transformation invariant bleiben, und wie man diese Invarianz erweisen kann. Einfache Begriffe dieser Art lassen sich leicht anführen; zu ihnen gehören der Zusammenhang, die Dimension, der Gegensatz zwischen überall dicht und nirgends dicht, die Gebietsteilung, die die Punktmenge bewirkt, die Zusammenhangszahl der einzelnen Gebiete u. s. w. u. s. w. Freilich ist bisher nur wenig geschehen, um die Invarianz dieser Begriffe zu erhärten. Und doch bedarf es im wesentlichen nur einer consequenten Ausnutzung und teilweisen Erweiterung der bisherigen Resultate, um dies, zunächst einmal für die ebenen Punktmengen, zu erreichen.

Ich erlaube mir, dies in vorläufiger kurzer Form hier darzulegen. Die früher von mir veröffentlichten „Beiträge zur Theorie der Punktmengen"[1]), an die sich die folgenden Untersuchungen enge anschließen, finden damit zugleich ihren naturgemäßen Abschluß. Zugleich erweist sich der dort eingeführte Begriff der einfachen Curve und des einfachen Curvenbogens[2]) wirklich als die naturnotwendige Verallgemeinerung des Polygons und der Strecke. Uebrigens lassen sich für die meisten der bekannten Resultate neue einfache Beweise geben, die ich bei dieser Gelegenheit teilweise mitteile. Allem Anschein nach sind die benutzten Methoden ohne Schwierigkeit auf den Raum übertragbar.

1. Was die umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung betrifft, so ist formal zu unterscheiden, ob sie nur für die Punktmengen definirt ist, auf die sie sich bezieht, oder aber für die ganze Ebene. Ein wesentlicher Unterschied ist hierin freilich nicht enthalten; die erste Abbildung kann immer zu der zweiten erweitert werden, was ich jedoch hier nicht näher ausführen will.

2. Ich stelle nun einige Begriffe und Sätze aus meinen früheren Arbeiten zusammen, deren ich mich im Folgenden bediene.

---

1) Math. Ann. 58, S. 195, u. 59, S. 129.

2) Man hat meist mit einem weit specielleren Curvenbegriff operirt, der regulären oder abteilungsweise regulären Curve. Aber selbst für ihn ist der Nachweis, daß die Sätze der Analysis situs gelten und Invarianz besitzen, nie geführt worden. Auch ist klar, daß dieses Problem nur eine solche Specialisirung des Curvenbegriffs zuläßt, die aus ihm selber folgt.

Ist $\mathfrak{T}$ eine nirgends dichte ebene Menge, bedeutet $\mathfrak{E}$ die Menge *aller* Punkte einer Ebene, und setzt man

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{T} + \mathfrak{M},$$

so heißt $\mathfrak{M}$ *Complementärmenge* von $\mathfrak{T}$. Sie bildet entweder ein *einziges* zusammenhängendes *Gebiet*, oder zerfällt in ein *endliche*, resp. *abzählbare* Menge von *Teilgebieten*. Die Menge $\mathfrak{T}$ besteht aus den *Grenzpunkten* dieser Gebiete. Dasjenige Gebiet, dem der unendlich ferne Punkt zugehört [1]), heißt äußeres Gebiet. Zerfällt $\mathfrak{M}$ insbesondere in *zwei* Gebiete $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$, so hat man

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_i + \mathfrak{T}_a + \mathfrak{T}_{ai}$$

wo $\mathfrak{T}_i$ resp. $\mathfrak{T}_a$ die Punkte bedeuten, die Grenzpunkte nur von $\mathfrak{J}$ oder nur von $\mathfrak{A}$ sind. Diese Mengen können sich auf Null reduciren. Dagegen existirt die Menge $\mathfrak{T}_{ai}$ immer. Sie ist perfect und zusammenhängend und heißt *eigentliche geschlossene Curve*. Jede zusammenhängende Teilmenge einer geschlossenen Curve heißt ein *eigentlicher Curvenbogen* [2]).

Unter einem *einfachen Weg* l oder einem *Weg* schlechthin, der von einem Punkt m von $\mathfrak{M}$ zu einem Punkt t von $\mathfrak{T}$ führt, verstehe ich einen Streckenzug, der von t abgesehen, ganz zu $\mathfrak{M}$ gehört, und entweder aus einer endlichen Zahl von Strecken besteht, oder aber, falls er unendlich viele enthält, in t seinen einzigen Grenzpunkt besitzt. Zwei Wege l_1 und l_2, die von m nach verschiedenen Punkten t_1 und t_2 von $\mathfrak{T}$ führen, lassen sich so legen, daß sie einander nicht kreuzen; sie sollen zusammen als ein *von* t_1 *zu* t_2 führender Weg bezeichnet werden.

Zwei von einem Punkt m zu *demselben* Punkt t führende Wege, die sich nirgends kreuzen, bilden ein *Wegpolygon*. Für jeden Punkt m existiren Wegpolygone, zu deren Innerem kein Punkt von $\mathfrak{T}$ gehört; ein solches soll ein $\mathfrak{T}$ *ausschließendes*

---

1) Die Ebene $\mathfrak{E}$ wird zweckmäßig als Ebene der Functionentheorie vorausgesetzt. Dann ist auch das Aeußere ein einfach zusammenhängendes Gebiet, was vielfach nützlich ist.

2) Die Bezeichnung „eigentlich" ist gewählt, um für den Begriff „Curve" seine allgemeinste Bedeutung zu ermöglichen. Zu den „Curven" rechnet man ja auch jedes durch eindeutige und stetige Functionen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ dargestellte Gebilde, wie z. B. auch die Pianosche „Curve". Dies entspricht dem von Herrn *Hurwitz* befolgten Sprachgebrauch. Vgl. Verhandlungen des ersten internationalen Math. Congresses, Leipzig 1899, S. 101. Vgl. übrigens auch meine eignen Ausführungen, Math. Ann. 58. S. 216.

Polygon heißen. Liegt kein Punkt von $\mathfrak{T}$ außerhalb des Polygons, so soll es ein $\mathfrak{T}$ einschließendes heißen. Ist $\mathfrak{T}$ eine Menge, für die $\mathfrak{M}$ ein einziges Gebiet bildet, so existiren für jeden Punkt m einschließende Polygone.

Ist $\mathfrak{T}$ insbesondere eine zusammenhängende Menge, und sind l_1 und l_2 zwei von m zu t_1 und t_2 führende Wege, so kann man eine gewisse zusammenhängende Teilmenge $\mathfrak{T}_1$ von $\mathfrak{T}$, der t_1 und t_2 angehören, so definiren, daß sie mit l_1 und l_2 ein gewisses Teilgebiet $\mathfrak{M}_1$ von $\mathfrak{M}$ bestimmt. Ist $\mathfrak{T}$ eine geschlossene Curve, so bestimmen t_1 und t_2 zwei solche Teilmengen von $\mathfrak{T}$, resp. zwei solche Teilgebiete von $\mathfrak{M}$.

3. Wenn man zu einem Punkt t von irgend einem, also auch von jedem Punkt eines Gebietes $\mathfrak{M}$ aus einen Weg legen kann, so heißt t erreichbar für $\mathfrak{M}$: im andern Fall heißt t nicht erreichbar[1]). Dieser Unterschied ist für das folgende von großer Wichtigkeit. Es beruht darauf, daß auch er zu den oben genannten invarianten Eigenschaften gehört. Uebrigens kann, wenn $\mathfrak{T}$ gemeinsame Grenze zweier verschiedenen Gebiete ist, ein Punkt von $\mathfrak{T}$ für das eine erreichbar, für das andere nicht erreichbar sein. Beispiele dieser Art kann man sich leicht bilden. Es besteht der Satz, daß jeder Punkt von $\mathfrak{T}$ Grenzpunkt erreichbarer Punkte ist.

Unter den geschlossenen Curven stellen diejenigen den einfachsten Typus dar, deren sämtliche Punkte sowohl für das Gebiet $\mathfrak{J}$, wie für das Gebiet $\mathfrak{A}$ erreichbar sind; ich habe sie einfache geschlosssene Curven $\mathfrak{C}$ genannt. Jede zusammenhängende Teilmenge von $\mathfrak{C}$ heißt ein einfacher Curvenbogen.

Man kann noch fragen, unter welchen Bedingungen eine irgendwie gegebene Punktmenge $\mathfrak{T}$ einen einfachen Curvenbogen darstellt. Dazu muß ihre Complementärmenge $\mathfrak{M}$ zusammenhängend sein; verbindet man überdies zwei Punkte t_1 und t_2 mit einem Punkte von $\mathfrak{M}$ durch Wege l_1 und l_2, so muß die dadurch definirte Teilmenge $\mathfrak{T}_1$ (Nr. 2) selbst ein einfacher Curvenbogen sein. Jeder Punkt von $\mathfrak{T}_1$ muß also gemeinsamer Grenzpunkt von $\mathfrak{M}_1$ und dem Restgebiete $\mathfrak{M}_2$ sein.

4. Wir beschränken uns nunmehr zunächst auf geschlossene Curven, die wir wieder durch $\mathfrak{T}$ bezeichnen; das Gebiet $\mathfrak{M}$ kann dann sowohl ihr Inneres, wie ihr Aeußeres sein.

Nun sei

$$\{t^{(\nu)}\} = t', t'', t''', \ldots\ldots t^{(\nu)}, \ldots\ldots$$

1) Nicht erreichbar sind z. B. diejenigen Punkte der durch $y = \sin 1/x$ bestimmten perfecten Menge, die auf der y-Axe zwischen $+1$ und -1 liegen.

eine Folge erreichbarer Punkte, die den Punkt t als einzigen Grenzpunkt besitzt; ferner sei $l^{(\nu)}$ der von einem Punkt m zu $t^{(\nu)}$ führende Weg. Dann kann man unter diesen Punkten eine Teilmenge

$$\{t_\nu\} = t_1, t_2, t_3, \ldots\ldots t_\nu \ldots\ldots$$

so definiren, daß die Wege l_ν einander nicht kreuzen und stets l_ν zwischen $l_{\nu-1}$ und $l_{\nu+1}$ liegt. Darunter ist zu verstehen, daß wenn man um m einen zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Kreis schlägt, ihn die Wege l_ν in Punkten k_ν so durchdringen, daß die Punkte k_ν in natürlicher Ordnung aufeinander folgen, also k_ν zwischen $k_{\nu-1}$ und $k_{\nu+1}$ liegt. Eine solche Punktfolge soll eine natürlich geordnete oder eine einfache Punktfolge heißen.

Seien nun t_ν und $t_{\nu+1}$ zwei Punkte der obigen Folge und $\mathfrak{w}_\nu$ irgend ein Weg der von t_ν zu $t_{\nu+1}$ durch $\mathfrak{M}$ führt (Nr. 1); endlich sei m_ν irgend ein Punkt von $\mathfrak{w}_\nu$. Dann giebt es für die Abstände

$$\varrho(t_\nu, m_\nu) \quad \text{und} \quad \varrho(t_{\nu+1}, m_\nu)$$

ein Maximum ϱ_ν. Man denke sich nun alle Wege $\mathfrak{w}_\nu$, die durch $\mathfrak{M}$ führen und t_ν mit $t_{\nu+1}$ verbinden, so giebt es für die zugehörigen Größen ϱ_ν eine untere Grenze, die wir durch g_ν bezeichnen und die zu t_ν und $t_{\nu+1}$ gehörige Ausbiegung nennen. Man hat dann zu unterscheiden, ob die Ausbiegungen g_ν mit wachsendem ν gegen Null convergiren oder nicht. In dieser Hinsicht besteht der folgende, leicht zu beweisende Satz:

I. Ist $\{t_\nu\}$ eine einfache Punktfolge einer geschlossenen Curve, deren Ausbiegungen g_ν gegen Null convergiren, so ist ihr Grenzpunkt ein erreichbarer Punkt. Umgekehrt kann zu jedem erreichbaren Punkt eine derartige Punktfolge bestimmt werden.

Aus diesem Satz folgt, daß wenn t ein nicht erreichbarer Punkt für ein Gebiet $\mathfrak{M}$ ist, zu jeder einfachen Folge, die t als Grenzpunkt hat, Ausbiegungen gehören, die nicht gegen Null convergiren. Er läßt aber die Möglichkeit zu, daß man auch zu einem erreichbaren Punkt eine derartige Punktfolge bestimmen kann. Dies kann auch wirklich eintreten. Geht man jedoch von der geschlossenen Curve zu der einfachen geschlossenen Curve über, so ist diese Möglichkeit ausgeschlossen. In der That besteht der Satz:

II. Bei einer einfachen geschlossenen Curve hat jede einfache Punktfolge $\{t_\nu\}$ die Eigenschaft, daß ihre Ausbiegungen mit wachsendem ν gegen Null convergiren.

Der Beweis stützt sich wesentlich auf folgendes. Gemäß Nr. 2 bestimmen die Wege l_ν und $l_{\nu+1}$, die von m zu t_ν und $t_{\nu+1}$ führen, eine gewisse Teilmenge $\mathfrak{T}_\nu$ von $\mathfrak{T}$. Auf ihr giebt es Punkte t_ν'', deren Abstand von t_ν und $t_{\nu+1}$ jedenfalls größer als $^1/_2\, g_\nu$ ist. Falls nun für die Folge $\{t_\nu\}$ nicht $\lim g_\nu = 0$ ist, haben die Punkte t_ν'' mindestens einen von t verschiedenen Grenzpunkt t''. Von ihm läßt sich aber zeigen, daß er nicht zugleich für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ erreichbar sein kann.

Der obige Satz ist ein neuer Beleg dafür, daß in der einfachen Curve die naturgemäße Verallgemeinerung des einfachen Polygons enthalten ist. Um nicht zu ausführlich zu werden, will ich mich von nun an stets auf einfache geschlossene Curven und einfache Curvenbögen beschränken.

5. Von denjenigen Begriffen, deren Invarianz ganz oder teilweise erwiesen ist, erwähne ich zunächst den Zusammenhang und die Dimension, resp. den Gegensatz zwischen nirgends dicht und überall dicht. Für den Zusammenhang habe ich den Beweis bereits an anderer Stelle mitgeteilt, setze ihn aber der Vollständigkeit halber nochmals hierher. Ich definire die perfecte Menge $\mathfrak{T}$ als zusammenhängend, falls sie nicht in Teilmengen zerlegbar ist, deren jede perfect ist [1]). Sei $\mathfrak{T}'$ das Abbild von $\mathfrak{T}$. Wäre nun die Menge $\mathfrak{T}'$ nicht zusammenhängend, so zerfiele sie in zwei perfecte Teilmengen $\mathfrak{T}_1'$ und $\mathfrak{T}_{11}'$, und ihnen müßten bei der umkehrbar eindeutigen und stetigen Abbildung, zwei ebenfalls perfecte Teilmengen von $\mathfrak{T}$ entsprechen [2]), was nicht möglich ist. Also:

III. Der Zusammenhang einer Punktmenge verhält sich umkehrbar eindeutigen und stetigen Abbildungen gegenüber invariant.

Was die Dimension betrifft, so kennt man hier nur den zuerst von Herrn Netto ausgesprochenen Satz, daß ein Quadrat nicht umkehrbar eindeutiges und stetiges Abbild einer Strecke

---

1) Die Berechtigung dieser Definition habe ich Math. Ann. 59, S. 133 nachgewiesen. Vgl. auch C. Jordan, cours d'analyse, 2. Aufl. I, S. 25, wo sich die Definition zuerst findet.

2) Vgl. meinen Bericht im Jahrb. d. deutsch. Math. Ver. Bd. VIII, 2, S. 117.

sein kann. Sein einfachster Beweis beruht auf dem fundamentalen Gegensatz zwischen den abzählbaren und den nicht abzählbaren Mengen[1]). Zieht man nämlich im Quadrat eine Parallele zu einer Quadratseite, so muß ihr nach Satz III eine zusammenhängende Teilmenge der Strecke entsprechen, d. h. also ein Intervall. Nun besitzt die Menge der Parallelen die Mächtigkeit des Continuums, während Intervalle ohne gemeinsame Punkte auf der Strecke nur in abzählbarer Menge existiren, woraus die Behauptung folgt.

Hieraus kann aber noch keineswegs gefolgert werden, daß irgend einer ebenen Menge $\mathfrak{T}$, die nirgends dicht ist, als Bildmenge eine gleichfalls nirgends dichte Menge entspricht. Um dies zu zeigen, werden wir die vorstehende mehr negative Fragestellung in eine positive umwandeln, und die Erhaltung des bezüglichen Characters direct nachweisen. Dazu bedarf es weiterer Hilfsmittel. Als solche bieten sich am einfachsten der Satz des Herrn Jordan und seine Umkehrung dar.

6. Für den Satz des Herrn Jordan teile ich einen neuen Beweis mit, der ihn fast als unmittelbare Folge meiner oben erwähnten Beiträge erscheinen läßt. Ich tue dies auch deshalb, weil er eine Erweiterung zuläßt oder vielmehr deren bedarf. Der Jordansche Satz sagt nämlich nur aus, daß das umkehrbar eindeutige und stetige Abbild des Kreises eine geschlossene Curve ist; man kann aber zeigen:

IV. Das umkehrbar eindeutige und stetige Abbild des Kreises ist eine **einfache** geschlossene Curve.

Sei nämlich $\mathfrak{K}$ der Kreis und $\mathfrak{T}$ sein Abbild, so ist zunächst gemäß III $\mathfrak{T}$ eine zusammenhängende Menge. Sie muß aber auch nirgends dicht sein. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es sicher ein endliches Quadrat, das ihr angehörte. Dem entspräche in $\mathfrak{K}$ wieder eine zusammenhängende Teilmenge, also ein Kreisbogen. Dies ist aber nach Nr. 5 unmöglich.

Es handelt sich jetzt nur noch darum, aus der Gesamtheit aller nirgends dichten zusammenhängenden ebenen Mengen diejenigen herauszusuchen, die Abbild des Kreises sein können. Diese Mengen unterscheiden sich in erster Linie nach der Gebietsteilung, die sie für ihre Complementärmenge $\mathfrak{M}$ bewirken. Sie ist (Nr. 2)

---

1) Vgl. meine Note in diesen Nachrichten 1899, S. 290.

entweder ein einziges Gebiet, oder sie zerfällt in eine endliche resp. abzählbare Menge solcher Gebiete.

Sei nun $\mathfrak{M}$ irgend eines dieser Gebiete und $\mathfrak{T}'$ seine Grenze, so beweisen wir zunächst, dass jeder Punkt t' von $\mathfrak{T}'$ für $\mathfrak{M}$ erreichbar ist. Sei $\{t'_\nu\}$ eine gegen t' convergirende einfache Folge, so definiren die Wege l'_ν und $l'_{\nu+1}$, die von m zu t' führen, eine zusammenhängende Teilmenge $\mathfrak{T}_\nu$, der t'_ν und $t'_{\nu+1}$ angehören (Nr. 2). Ihr entspricht eine zusammenhängende Teilmenge $\mathfrak{K}_\nu$ von $\mathfrak{K}$, d. h. ein Kreisbogen $k_\nu \ldots k_{\nu+1}$. Die gegen k' convergirenden Punkte k'_ν bilden daher auf dem Kreis $\mathfrak{K}$ ebenfalls eine einfache Folge. Wäre nun t' nicht erreichbar, so könnte man gemäss Nr. 3 auf $\mathfrak{T}_\nu$ die Punkte t''_ν bestimmen; deren Bildpunkte müssten auf dem Bogen $\mathfrak{K}_\nu$ liegen und daher ebenfalls k' als Grenzpunkt haben. Der Grenzpunkt der Punkte t''_ν ist aber von t' verschieden; damit ist der Beweis geliefert.

Nun sei t irgend ein Punkt des Curvenbogens $\mathfrak{T}_\nu$ und $\mathfrak{M}_\nu$ das Teilgebiet von $\mathfrak{M}$, das die Wege l_ν und $l_{\nu+1}$ mit $\mathfrak{T}_\nu$ gemäß Nr. 2 bestimmen. Man kann dann in $\mathfrak{M}_\nu$ einen Weg l von m zu t legen. Nun bestimmen k'_ν und $k'_{\nu+1}$ außer $\mathfrak{K}_\nu$ noch einen zweiten Kreisbogen $\mathfrak{K}'_\nu$; ihm muß daher in $\mathfrak{T}$ eine zusammenhängende Teilmenge entsprechen, die t'_ν und $t'_{\nu+1}$ enthält. Daraus folgt, daß $\mathfrak{M}$ nicht ein einziges Gebiet sein kann. Denn sonst könnte man von m aus zwei Wege l' und l'' zu t führen, die ein die Menge $\mathfrak{T}$ einschließendes Polygon (Nr. 2) bestimmen. Zugleich bilden l und l' ein Polygon $\mathfrak{P}'$, das t'_ν einschließt, und l und l'' ein Polygon $\mathfrak{P}''$, das t''_ν einschließt, die zusammenhängende Menge $\mathfrak{T}'_\nu$ müßte daher auch von $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}''$ je einen Punkt enthalten. Dies könnte aber wiederum nur t sein, der nicht zur Menge $\mathfrak{T}'_\nu$ gehört.

Sei nun $\mathfrak{A}$ das äußere Teilgebiet von $\mathfrak{M}$, so giebt es eine einfache Curve $\mathfrak{C}$, die Grenze von $\mathfrak{A}$ ist. Verbindet man nun wieder einen Punkt von $\mathfrak{A}$ mit zwei Punkten c_1 und c_2 von $\mathfrak{C}$, so werden dadurch auf $\mathfrak{C}$ gemäß Nr. 2 zwei zusammenhängende Teilmengen definirt. Andererseits entsprechen den Punkten c_1 und c_2 auf $\mathfrak{K}$ zwei Punkte k_1 und k_2, die ebenfalls zwei und nur zwei zusammenhängende Teilmengen, nämlich zwei Kreisbögen definiren. Diese müssen also einander entsprechen, woraus folgt, daß die Curve $\mathfrak{C}$ die Menge $\mathfrak{T}$ erschöpft, also mit ihr identisch ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Eine unmittelbare Folge unseres Satzes lautet

IVa. Das umkehrbar eindeutige und stetige Abbild eines Kreisbogens ist ein einfacher Curvenbogen.

Die Umkehrung des vorstehenden Satzes IV habe ich bereits an anderer Stelle [1]) bewiesen; sie lautet:

V. Jede einfache geschlossene Curve läßt sich umkehrbar eindeutig und stetig auf den Kreis abbilden.

Ein einfacherer Beweis dieses Theorems, der das von Herrn Hilbert für einen Specialfall gegebene Verfahren verallgemeinert, ist inzwischen von Herrn Riesz gegeben worden [2]). Uebrigens werde ich selbst einen neuen, wesentlich einfacheren Beweis des Satzes an anderer Stelle mitteilen. Die in Nr. 3 definirte Erreichbarkeit ist damit als notwendige und hinreichende Eigenschaft für das bezügliche Abbild des Kreises dargetan.

Wir bedürfen aber noch der Umkehrung der in IVa ausgesprochenen Folgerung, d. h. des Satzes.

Va. Jeder einfache Curvenbogen läßt sich umkehrbar eindeutig und stetig auf einen Kreisbogen abbilden.

Dies ist evident, sobald der Curvenbogen als Teilmenge einer geschlossenen Curve gegeben ist. Den Beweis will ich aber auch für die oben (Nr. 3) aufgestellte mengentheoretische Definition des Curvenbogens andeuten. Man lege um einen Punkt m wieder den zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Kreis $\mathfrak{K}$ und ziehe von m zu zwei Punkten t_1 und t_2 die Wege l_1 und l_2, die $\mathfrak{K}$ in k_1 und k_2 treffen. Diese Wege bestimmen (Nr. 2) eine Teilmenge $\mathfrak{T}_1$ von $\mathfrak{T}$, die mit ihnen zusammen eine einfache geschlossene Curve bildet; daher ist $\mathfrak{T}_1$ auf einen Kreisbogen, insbesondere auf $k_1 \ldots k_2$ abbildbar. Nun sei t_3 ein nicht zu $\mathfrak{T}_1$ gehöriger Punkt, so wird der Weg l_3 den Kreis $\mathfrak{K}$ in k_3 außerhalb des Bogens $k_1 \ldots k_2$ kreuzen. So kann man fortfahren, doch muß dieser Proceß nach einer endlichen oder abzählbaren Menge von Schritten ein Ende erreichen; er bestimmt daher zwei notwendig verschiedene Punkte k' und k'', resp. einen Kreisbogen, der den Bildpunkt jedes Punktes von $\mathfrak{T}$ enthält. Er definirt zugleich zwei Punkte t' und t'' die wir Endpunkte von $\mathfrak{T}$ nennen.

8. Ein letzter Satz, dessen wir bedürfen, ist der folgende.

VI. Die Gebietsteilung, die durch eine einfache geschlossene Curve bewirkt wird, verhält sich bei umkehrbar eindeutiger und stetiger Abbildung invariant.

---

1) Math. Ann. 58, S. 230.

Dies besagt, daß dem Innern und Aeußern der einen Curve das Innere resp. das Aeußere der andern entspricht.

Dieser Satz, für den ich selbst, sowie Herr Bernstein und Herr Osgood bereits Beweise gegeben haben [1]), läßt sich in einfachster Form folgendermaßen ableiten.

Seien $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ die beiden Curven, $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$, resp. $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{A}'$ die inneren und äußeren Gebiete. Seien ferner m und m_1 zwei Punkte von $\mathfrak{J}$, und m' resp. m_1', die Bildpunkte. Dann ist m mit m_1 durch einen Streckenzug $\mathfrak{w}$ verbindbar, der keinen Punkt von $\mathfrak{C}$ enthält. Ihm entspricht in der Bildebene der einfache Curvenbogen $\mathfrak{w}'$, der keinen Punkt von $\mathfrak{C}'$ enthält. Nun sei der Abstand

$$\varrho(\mathfrak{w}', \mathfrak{C}') = \eta \text{ }^{2)},$$

so kann man, wegen der Stetigkeit der Abbildung, eine Größe δ bestimmen, so daß für irgend welche Punkte p, p_1, p', p_1',

$$\varrho(p', p_1') < \eta \quad \text{wird, falls} \quad \varrho(p, p_1) < \delta$$

gewählt wird. Nun kann man den Streckenzug $\mathfrak{w}$ mit einer endlichen Zahl von consecutiven Punkten m_i so erfüllen, daß

$$\varrho(m_i, m_{i+1}) < \delta$$

ist; für die auf $\mathfrak{w}'$ liegenden Bildpunkte m' wird daher

$$\varrho(m_i', m_{i+1}') < \eta$$

sein. Die Strecken $m_i' \ldots m_{i+1}'$ haben daher keinen Punkt mit $\mathfrak{T}'$ gemein und bestimmen daher einen Streckenzug, der entweder ganz zu $\mathfrak{J}'$ oder ganz zu $\mathfrak{A}'$ gehört. Daß nunmehr $\mathfrak{J}'$ dem $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}'$ dem $\mathfrak{A}$ entspricht, folgt ebenfalls aus der Stetigkeit der Abbildung.

9. Eine erste wichtige Folgerung der vorstehenden Sätze ist folgende. Den Ausgangspunkt der vorliegenden Untersuchungen und derjenigen, auf denen sie beruhen, bildet das Polygon endlicher Seitenzahl und die Analysis situs der aus solchen Polygonen zusammengesetzten Gebilde [3]). Diese wurden zunächst auf Polygone übertragen, die aus einfachen Wegen gebildet sind. Nunmehr folgt aber, daß alle die Begriffsbestimmungen und Sätze,

---

1) Diese Nachrichten, 1899, Heft 3 und 1900, Heft 1.

2) Unter $\varrho(\mathfrak{w}', \mathfrak{C}')$ vertsehe ich das Minimum aller Abstände eines Punktes von $\mathfrak{w}'$ von einem Punkt von $\mathfrak{C}'$.

3) Math. Ann. 58, S. 198 und 59, S. 130.

die ich aus methodischen Gründen zunächst für Streckenzüge aussprach, *auf beliebige einfache Curven und Curvenbögen übertragbar sind.* Hat man z. B. eine einfache geschlossene Curve $\mathfrak{C}$, und zwei einfache sich nicht kreuzende Curvenbögen, die von einem inneren Punkt m zu zwei Punkten t_1 und t_2 von $\mathfrak{C}$ laufen, so können wir eine analoge Figur herstellen, in der die Curvenbögen durch einfache Wege ersetzt sind, und können beide umgekehrt eindeutig und stetig so auf einander abbilden, daß die Wege den Curvenbögen entsprechen. Dann läßt sich aus Nr. 1 und Satz VI folgern, daß die Curvenbögen für das Innere von $\mathfrak{T}$ dieselbe Gebietsteilung bewirken wie die Wege l_1 und l_2.

Hieraus ist dann weiter zu folgern, daß die Sätze der Analysis situs, die die Teilung und Zusammensetzung von Polygonen betreffen, auch für allgemeinere Gebiete gelten, zunächst noch mit dem Vorbehalt, daß man einfache Curven und Curvenbögen als Operationsmittel benutzt [1]). Die Behauptung, daß in ihnen die naturgemäße Verallgemeinerung der Geraden vorliegt, erscheint also auch in dieser Hinsicht vollständig gerechtfertigt.

10. Die vorstehenden Sätze gestatten, auch für zwei allgemeinste Mengen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$, die umkehrbar eindeutige und stetige Abbilder von einander sind, *die Invarianz ihrer Structur*, resp. der für die Analysis situs in Betracht kommenden Eigenschaften, nachzuweisen. Es mag hier genügen, auf die Grundzüge des Beweises kurz hinzuweisen.

Ist $\mathfrak{T}$ zunächst eine zusammenhängende nirgends dichte Menge, und enthält sie eine Teilmenge $\mathfrak{T}_1$, die eine einfache geschlossene Curve ist, so muß dies auch für die Bildmenge $\mathfrak{T}'$ gelten; zugleich ist das Innere der einen Curve Abbild vom Innern der andern. Beachtet man nun, daß wenn eine Teilmenge $\mathfrak{T}_2$ von $\mathfrak{T}$ gemeinsame Grenze zweier Gebiete $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_1$ ist, dies auch für die Bildmenge $\mathfrak{T}_2'$ gelten muß, und daß einem gemeinsamen Punkt von $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ ein gemeinsamer Punkt von $\mathfrak{T}_1'$ und $\mathfrak{T}_2'$ entspricht, so kann daraus die Uebereinstimmung der durch $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ bewirkten *Gebietsteilung* leicht gefolgert werden.

Zerfällt andererseits $\mathfrak{T}$ in zwei getrennte Teilmengen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$, die in zwei Polygonen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ liegen, so zerfällt $\mathfrak{T}'$ in zwei Bildmengen $\mathfrak{T}_1'$ und $\mathfrak{T}_2'$, die von zwei einfachen Curven eingeschlossen werden. Auf Grund derjenigen Einteilung *aller* per-

1) Daß diese Beschränkung keine notwendige ist, habe ich bereits oben erwähnt.

fecten Mengen dieser Art, die ich in meinem zweiten Beitrag gegeben habe, folgert man hieraus ohne besondere Mühe, daß sich auch die Zusammenhangszahl jedes Gebietes sowie die Structur der in ihm enthaltenen Menge invariant verhält.

Ist endlich $\mathfrak{T}$ eine Menge allgemeinster Art, die auch überall dichte Bestandteile enthält, so sei $\mathfrak{U}$ ein solcher Bestandteil. Er wird dann notwendig von einer einfachen Curve $\mathfrak{C}$ eingeschlossen. Ihr entspricht die Curve $\mathfrak{C}'$ der Bildmenge; deren Inneres $\mathfrak{U}'$ entspricht $\mathfrak{U}$, und da jeder Punkt von $\mathfrak{U}$ zu $\mathfrak{T}$ gehört, so gehört auch jeder Punkt von $\mathfrak{U}'$ zu $\mathfrak{T}'$. Damit ist auch hier die Grundlage des Beweises geschaffen. Zusammenfassend kann man sagen:

VII. Die Structur der ebenen perfecten Mengen bleibt bei der umkehrbar eindeutigen und stetigen Abbildung invariant. Insbesondere entspricht jedem nirgends dichten Bestandteil der einen Menge ein ebensolcheu der andern, und jedem überall dichten ein überall dichter.

Daß der Satz auch für jede ebene abgeschlossene Menge gilt, bedarf kaum der Erwähnung.

11. Auf eine spezielle Folgerung will ich noch ausdrücklich hinweisen. Man kann eine Menge $\mathfrak{T}$ so auf eine Bildmenge beziehen, daß man jeder einfachen Curve von $\mathfrak{T}$ ein einfaches Polygon und jedem einfachen Curvenbogen einen Streckenzug zuordnet. Daraus folgt dann, daß die aus Polygonen und Streckenzügen aufgebauten Mengen nicht etwa nur einen Specialfall darstellen, sondern vielmehr Mengen vom allgemeinsten Typus repräsentiren.

Untersuchungen über Entladungserscheinungen in Geißler'schen Röhren.

Von

Eduard Riecke.

Vorgelegt in der Sitzung vom 29. October 1904.

II. Apparate und Messinstrumente [1]).

Den Beobachtungen selber mögen einige Bemerkungen über die dabei benutzten Apparate und Meßinstrumente vorangeschickt werden.

1. Die Geißler'sche Röhre, ihre Füllung und die zwei damit ausgeführten Beobachtungsreihen.

Der lichte Durchmesser der im Folgenden benutzten cylindrischen Röhre betrug 2,374 cm, die Dicke des Glases 0,1009 cm der Durchmesser der an kurzem Stile befestigten, als Kathode benutzten Aluminiumscheibe 2,307 cm, der Durchmesser der an längerem Stile befestigten Anode 2,309 cm. Der Abstand der Anode von der Kathode, die Länge der von der Entladung durchlaufenen Säule, betrug 23,83 cm.

Zur Füllung der Röhre diente käuflicher Stickstoff; die den Stickstoff enthaltende Bombe stand zunächst in Verbindung mit einer kugelförmigen Vorlage. Der Druck des darin enthaltenen Gases konnte mit einem Quecksilbermanometer gemessen werden. Mit Hülfe eines Zweiweghahnes kann die Vorlage entweder mit der atmosphärischen Luft, oder mit der Luftpumpe verbunden werden. Durch die erste Verbindung werde der Druck des in der Vorlage enthaltenen Gases gleich dem Bar

1) Vgl. die erste Mittheilung, diese Nachrichten 1904. S. 356.

meterstande b gemacht. Das Mischungsverhältniß des aus Stickstoff und Sauerstoff bestehenden Gases sei gegeben durch $N:O = x:y$; ist dann v das Volumen der Vorlage, so ist das Volumen des bei dem Drucke b in der Vorlage vorhandenen Stickstoffs gleich $\frac{x}{x+y}\, v$, das des Sauerstoffs gleich $\frac{y}{x+y}\, v$. Die Vorlage wird nun von der Luft abgeschlossen und mit der Stickstoffbombe verbunden; Stickstoff strömt ein und der Druck erreicht den Betrag $b+h$. Das Volumen des in der Vorlage befindlichen Sauerstoffs ist dann reduciert auf $\frac{y}{x+y} \cdot \frac{b}{b+h} \cdot v$. Bezeichnen wir das neue Mischungsverhältniß zwischen Stickstoff und Sauerstoff mit $x_1 | y_1$, so ist:

$$\frac{y_1}{x_1+y_1} = \frac{y}{x+y} \cdot \frac{b}{b+h}.$$

Die Vorlage werde nun gegen die Bombe abgeschlossen und wieder mit der Atmosphäre verbunden; der Druck wird dadurch von neuem auf den barometrischen reduciert. Wird darauf abermals Stickstoff zugelassen, bis der Ueberdruck h wieder erreicht ist, so wird das neue Mischungsverhältniß:

$$\frac{y_2}{x_2+y_2} = \frac{y}{y+x} \left(\frac{b}{b+h}\right)^2.$$

Nach n Einströmungen mit immer gleichem Drucküberschuß h wird das Verhältniß:

$$\frac{y_n}{x_n+y_n} = \frac{y}{x+y} \left(\frac{b}{b+h}\right)^n.$$

Bei dem benutzten Apparate konnte $h = \frac{1}{4} b$ gemacht werden; gehen wir aus von atmosphärischer Luft, so ist $\frac{y}{x+y} = 5$; daraus folgt für

$$n = \quad 11 \qquad 21 \qquad 31$$

$$\frac{y_n}{x_n+y_n} = 0{,}018 \quad 0{,}0018 \quad 0{,}0002.$$

In die Röhrenleitung, die von der Vorlage nach der Quecksilberluftpumpe führte, waren 3 Waschflaschen eingeschaltet; von diesen waren 2 mit Pyrogallussäure, die dritte mit koncentrierter Schwefelsäure gefüllt. Die Röhrenleitung endigte in einer feinen Kapillaren, die von unten in eine durch Quecksilber gegen die Atmosphäre abgeschlossene Barometerröhre eingeführt war. Der

torricellische Raum stand in unmittelbarer Verbindung mit der Geißler'schen Röhre, nur war zwischen beide noch eine mit wasserfreier Phosphorsäure gefüllte Röhre eingeschaltet.

Die erstmalige Füllung der Geißler'schen Röhre mit Stickstoff wurde in folgender Weise vorgenommen. Es wurden zunächst 11 Füllungen der Vorlage mit Stickstoff ausgeführt, und dabei die Vorlage nach jeder Füllung direkt mit der Atmosphäre verbunden. Bei 10 weiteren Füllungen wurde der überschüssige Gasinhalt durch die Waschflaschen hindurch theils in die Atmosphäre, theils in die Pumpe entleert, um die Luft aus den Verbindungsröhren zu verdrängen. Hierauf wurde bis zu einem Drucke von 0,019 mm ausgepumpt und dann Stickstoff zugelassen, der Druck in der Pumpe stieg dabei auf 0,283 mm. Unter diesen Verhältnissen wurden einige Vorversuche angestellt, bei denen die Stromstärken verhältnißmäßig hohe Werthe bis zu 5 Milliampère erreichten. Die Pumpe wurde darauf noch 4 mal bis auf Drucke von 0,01—0,02 mm Quecksilber ausgepumpt und zwischendurch immer wieder mit Stickstoff gefüllt, der Druck betrug nach der letzten Füllung 0,244 mm. Mit diesem Drucke begann eine erste vollständige Reihe von Beobachtungen, die bis zu einem Drucke von 0,083 mm fortgesetzt wurden. Einzelne Störungen ergaben sich aus der Verwendung zu starker Ströme, welche den Druck, vielleicht auch den Gasinhalt der Röhre so beträchtlich änderten, daß die bei auf- und niedersteigender Stromstärke angestellten Beobachtungen eines Satzes nicht mehr auf den gleichen Druck reducirt werden konnten. Nach Abschluß der Beobachtungsreihe wurde die Pumpe viermal bis auf Drucke von einigen hundertel Millimetern ausgepumpt und zwischendurch bis auf Drucke von etwa 15 mm mit Stickstoff gefüllt. Nach der letzten Füllung und der darauf folgenden Evakuation betrug der Druck 0,789 mm Quecksilber; mit diesem Drucke begann eine zweite Beobachtungsreihe. Es ist dieselbe, welche in der vorhergehenden Mittheilung „Ueber Evakuation Geißler'scher Röhren durch den elektrischen Strom“ [1]) benutzt worden ist. Auch diese Beobachtungsreihe erlitt einmal eine Störung durch Verwendung eines zu starken Stromes, 2 Milliampère. Die Charakteristik der Röhre zeigte nach dem Durchgange dieses Stromes einen etwas anderen Verlauf als zuvor; nach einigen Tagen stellte sich aber der alte Zustand wieder her; gegen die Vergleichbarkeit der Beobachtungen dürfte also bei dieser zweiten Reihe kein Bedenken bestehen.

---

1) Diese Nachrichten. 1904. S. 156.

2. Die Druckmessungen.

Die Messung des Druckes in der Pumpe und in der damit verbundenen Geißler'schen Röhre wurde nach der von Hagen angegebenen Methode ausgeführt. Neben dem Auslaßrohr der Pumpe war zu diesem Zwecke ein Maßstab befestigt. Das Quecksilber in der Pumpe wurde soweit gehoben, daß eben noch Verbindung zwischen dem Quecksilbergefäße der Pumpe und zwischen der Geißler'schen Röhre bestand. In der Auslaßröhre stehe das Quecksilber dann bei dem Theilstriche h, in dem die Auslaßröhre umgebenden Gefäße in der Höhe h_0; der Druck des in der Pumpe enthaltenen Gases ist dann:

$$p = b - (h - h_0),$$

wo b den Barometerstand bezeichnet. Das Volumen des in dem Quecksilbergefäße und in den damit zusammenhängenden Theilen der Pumpe enthaltenen Gases setzt sich aus zwei Theilen zusammen; der eine unveränderliche reicht bis zu dem Theilstriche 960 mm des Maßstabes; der zweite veränderliche von da bis zu der Quecksilberkuppe bei h. Das Volumen des ersten Theiles sei V; das des zweiten kann berechnet werden, wenn die Auslaßröhre kalibriert ist. Wir bezeichnen mit ω das Volumen, welches ein Stück von 1 cm Länge der Kapillare besitzt, dann ist das Volumen des Gases:

$$V + \omega\,(96 - h).$$

Nun wird das Quecksilber gehoben, so daß es den ganzen Raum des Gefäßes und des Vorvakuums bis zu der Höhe d in der Nähe des Theilstriches 960 mm füllt. Die Kuppe des Quecksilbers in der Auslaßröhre stehe jetzt bei h_1, die Kuppe in der äußeren Röhre bei h_0'. Der Druck des Gases in dem verkleinerten Raum ist jetzt gleich:

$$b - (h_1 - h_0').$$

Das Volumen ist gleich dem unveränderlichen Theile, der durch die in der Höhe von 960 mm liegenden Querschnitte der Ausflußkapillaren begrenzt wird, vermehrt um die in den beiden Schenkeln enthaltenen Volumina. Die Länge jenes Theiles sei gleich l cm. Dann ist das Volumen der komprimirten Luft:

$$\omega\,(l + 96 - h_1 + 96 - d).$$

Zur Bestimmung des ursprünglichen Gasdruckes p ergiebt sich nach dem Gasgesetze die Gleichung:

$$p = (b - h_1 + h_0') \frac{\omega(96 - h_1 + 96 - d) + \omega l}{V + \omega(96 - h)}.$$

Setzt man hier:

$$b = p + h - h_0,$$

so erhält man zur Berechnung von p die Formel:

$$p = (h - h_1 + h_0' - h_0) \frac{\omega(96 - h_1 + 96 - d) + \omega l}{V - \omega(h - h_1 + 96 - d)\, \omega l},$$

oder:

$$p = (h - h_1)\left(1 + \frac{h_0' - h_0}{h - h_1}\right) \frac{\omega(96 - h_1 + 96 - d) + \omega l}{V - \omega(h - h_1 + 96 - d) - \omega l}.$$

Der Bruch $h_0' - h_0 \,|\, h - h_1$ ist aber gleich dem Verhältnisse zwischen dem Querschnitt der Kapillaren und zwischen dem freien um den äußeren Querschnitt der Auslaßröhre verminderten Querschnitt des umgebenden Gefäßes.

Bei größeren Drucken konnte das Quecksilber nur so weit gehoben werden, daß ein Theil des Vorvakuums damit erfüllt war. Wir bezeichnen mit v den von dem komprimierten Gase erfüllten Theil des Vorvakuums, dieses gerechnet bis zu der Höhe des Theilstrichs 960 mm. An Stelle der vorhergehenden Formel tritt dann:

$$p = (h - h_1)\left(1 + \frac{h_0' - h_0}{h - h_1}\right) \frac{v + \omega(96 - h_1) + \omega l}{V - v - \omega(h - h_1) - \omega l}.$$

Bei der benutzten Pumpe war:

$$V = 1060 \text{ ccm}, \qquad \omega = 0{,}0404 \text{ ccm}, \qquad l = 2{,}8 \text{ cm},$$

folglich $\omega l = 0{,}116$ ccm. Ferner war $v = 21{,}2$ ccm, wenn das Quecksilber gerade bis zu dem Anfange des Vorvakuums gehoben wurde, $v = 10{,}6$ ccm, wenn die Hälfte des Vorvakuums mit Quecksilber gefüllt war. Das Verhältniß $(h_0' - h_0) \,|\, (h - h_1)$ war gleich 0,012.

3. Messungen der Stromstärke und der Electrodenspannung.

Zur Messung der Stromstärke diente ein Zeigerinstrument von Reiniger mit aperiodischer Dämpfung; das Instrument wurde im Nebenschlusse mit einem Präcisionsrheostaten von Siemens benutzt. Die für verschiedene Nebenschlüsse geltenden Reduktionsfaktoren sind im folgenden zusammengestellt:

Nebenschluß.	Werth eines Scalentheils in Ampère.
10 000 Ohm	$1,0351 \times 10^{-6}$
200 —	$2,1418 \times 10^{-6}$
100 —	$3,2708 \times 10^{-6}$
20 —	$12,295 \times 10^{-6}$

Zur Messung der Elektrodenspannung wurde ein Braun'sches Elektrometer verwandt. Die Reduktion der Ablesungen auf Volt wurde auf graphischem Wege vorgenommen. Zur Construktion der hierzu dienenden Kurve genügen die folgenden Angaben:

Messung am Electrometer	Volt
3	370
6	710
9	1063
12	1418
15	1722

4. Längenmessungen im Innern der Röhre.

Die Länge der verschiedenen Theile der Entladung wurde mit Hülfe eines parallel zu der Röhre aufgestellten Millimeterstabes gemessen. Im Anfang wurde der Maaßstab in einen Abstand von etwa einem Meter von der Röhre gebracht; die Ablesung erfolgte dabei mit einem Fernrohre, das auf einem Schlitten befestigt, längs dem Maaßstab verschoben werden konnte. Es zeigte sich indessen, daß bei kleinen Stromstärken und großen Verdünnungen der zur Axe der Röhre senkrechte Kreuzfaden nicht mehr sicher auf die Grenzen der verschiedenen Theile der Entladung eingestellt werden konnte, da diese Grenzen im Fernrohre sehr verwaschen erschienen. Es war besser, den Maaßstab in unmittelbare Nähe der Röhre zu bringen, und mit Lupe oder mit bloßem Auge abzulesen. Dabei diente zum Einstellen eine Art von Diopter mit zwei 1/3 mm dicken Messingdrähten, die in einer zum Maaßstabe senkrechten Ebene in schicklichem Abstande parallel mit einander ausgespannt waren. Dieses Diopter war auf einem Schlitten befestigt, der längs der Theilung leicht verschoben werden konnte und der gleichzeitig einen Nonius trug.

Es mögen zunächst ein paar Beispiele von Messungen mitgetheilt werden, die über den Grad der erreichten Genauigkeit ein Urtheil erlauben.

Beobachtungen vom 24. Nov. 1903. Ablesung mit Fernrohr, Füllung der Pumpe mit Stickstoff.

Druck in der Pumpe vor dem Durchgang des Stromes 0,283 mm,



nach dem Durchgang 0,294 mm; im Mittel 0,288 mm. Stromstärke und Spannung betrug vor Anstellung der Längenmessungen $1{,}010 \times 10^{-3}$ Ampère, und 687 Volt, nach den Beobachtungen $1{,}035 \times 10^{-3}$ Ampère und 668 Volt. Im Mittel war die Stromstärke gleich $1{,}023 \times 10^{-3}$ Ampère, die Elektrodenspannung gleich 677 Volt.

Die Kathode werde im folgenden mit dem Buchstaben K bezeichnet, der Scheitel der geschichteten positiven Lichtsäule mit S, die Scheitel der aufeinanderfolgenden Schichten von S an gerechnet mit S_1, S_2..; es ergeben sich dann die folgenden Ablesungen an dem Maaßstabe:

K	S	S_{10}	S
2,93	9,94	25.31	9,82
	10.00	25.39	9.84
	9,91	25.32	9.80
	9,91	25.30	9.82
		25.29	
		25.28	
Mittel	9,94	25.31	9.82

Hieraus folgt für die mittlere Länge sämtlicher Schichten der Werth

$$\frac{1}{10} S S_{10} = 1{,}543 \text{ cm.}$$

Wie man sieht, verschieben sich die Punkte S und S_{10} während der Beobachtung etwas nach der Kathode hin.

Der Vertikalfaden des Fernrohrs wurde hierauf auf die einzelnen Schichtenköpfe der Reihe nach eingestellt. Im Hin- und Hergehen des Fernrohrs ergaben sich dabei die folgenden Ablesungen:

S	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
9.50	11.30	12.82	14.38	16.07	17.63	19.14	20.56	22.12	23.69	25.18
9.54	11.24	12.84	14.42	15.91	17.47	18.89	20.38	21.87	23.42	24.92

Mittelwerthe:

9.52	11.27	12.83	14.40	15.99	17.55	19.01	20.47	21.99	23.55	25.05

Differenzen

1,75	1.56	1.57	1.59	1.56	1.46	1.46	1.52	1.56	1.50

Für die Länge der ersten Schicht ergiebt sich hiernach der Werth:

$$l_1 = SS_1 = 1{,}75 \text{ cm,}$$

für die mittlere Länge der folgenden Schichten von $S_1 - S_{10}$ der Werth:

$$l_m = 1,531 \pm 0,016 \text{ cm.}$$

Die mittlere Abweichung der einzelnen Schichtenlänge von dem Mittelwerthe beträgt $\pm$ 0,048 cm.

Zur Vervollständigung führen wir noch einige andere Abmessungen an, die für die Entladungserscheinung von Bedeutung sind. Die Grenze der leuchtenden Kathodenschicht werde mit L, die innere Grenze des Kathodenglimmlichtes mit G bezeichnet. Dann ist:

$$KL = 0,18 \text{ cm}, \quad KG = 0,55 \text{ cm}, \quad KS = 6,74 \text{ cm.}$$

Die Temperatur betrug 17,8°.

2. Beobachtungen vom 4. Dec. 1903. Der Maaßstab war unmittelbar neben der Röhre aufgestellt, die Ablesung erfolgte mit der Dioptervorrichtung. Der Druck in der Röhre betrug vor dem Durchgange des Stromes 0,217 mm, nach dem Durchgang 0,220 mm, im Mittel 0,218 mm. Die Stromstärke war vor den Messungen gleich $2,033 \times 10^{-8}$ Ampère, nach den Messungen $2,221 \times 10^{-8}$ Ampère, im Mittel $2,127 \times 10^{-8}$ Ampère. Die Elektrodenspannung betrug 840 Volt.

Die beim Vor- und Zurückschieben des Schlittens gemachten Ablesungen sind die folgenden; A bezeichnet die Anode.

K	L	G	S	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	A
4.94	5.33	5.50	16.13	17.87	19.39	20.85	22.27	23.72	25.11	26.53	28.41
4.94			16.18	17.89	19.42	20.86	22.30	23.71	25.13	26.54	

Daraus folgt:

$$l_1 = SS_1 = 1,73 \text{ cm.}$$

Im Mittel aus den Differenzen $S_1 S_2 - S_6 S_7$ wird:

$$l_m = 1,442 \pm 0,015 \text{ cm.}$$

Die mittlere Abweichung der einzelnen Schichtenlängen von dem Mittelwerthe ist gleich $\pm$ 0,041 cm.

Im Uebrigen ergiebt sich:

$$KL = 0,39, \quad KG = 0,56, \quad KS = 11,21$$
$$KA = 23.80.$$

Aus der Differenz der Ablesungen K und A ergiebt sich der Abstand der Kathode von der Anode, die Länge des Entladungs-

raumes, wenn man zu 23,80 noch die Dicke des Diopterdrahtes 0,33 mm hinzurechnet. Die Länge des Entladungsraumes beträgt daher 23.83 cm.

Die Temperatur betrug 15,4°, die Füllung der Röhre war dieselbe, wie bei den Beobachtungen vom 24. Nov.

Die Kathodenplatte stand nicht genau senkrecht zu der Länge der Röhre, es wurde in der Regel auf den oberen und den unteren Rand eingestellt und aus den um etwa 1 mm differierenden Ablesungen das Mittel genommen.

Bei jedem Satze wurde einmal mit zunehmenden und dann mit wiederabnehmenden Stromstärken beobachtet, um den Einfluß kleinerer Veränderungen im Zustande des eingeschlossenen Gases zu eliminieren. Die Störungen, von denen in der ersten Nummer des zweiten Theiles die Rede war, machten sich eben dadurch kenntlich, daß die Beobachtungen bei abnehmendem Strome mit denen bei zunehmendem nicht mehr übereinstimmten. Bei nicht zu starken Strömen aber zeigten jene Werthe eine befriedigende Uebereinstimmung; das mag durch folgendes Beispiel erläutert werden.

II. Beobachtungssatz der zweiten Reihe. Druck 0,772 mm.

i		V		G		S	
0,053	0.052	1310	1320			2,76	2,82
0.108	0.108	1233	1240			3,09	3,08
0.178	0.181	1042	1038	0,39	0,40	4,05	4,13
0.284	0.286	1000	998	0,34	0,39	4,62	4,61
0.601	0.617	998	995	0,32	0,34	4,88	4,90
0,795		998		0,27		4,97	

III. Die charakteristischen Curven der Entladungen.

Mit Bezug auf die Bezeichnung der einzelnen Beobachtungssätze, die Verhältnisse des Druckes und der Temperatur, unter denen die Beobachtungen angestellt wurden, möge auf die in der ersten Mittheilung[1]) enthaltene Tabelle I verwiesen werden.

Aus der zweiten Beobachtungsreihe, welche aus dem schon angegebenen Grunde einen regelmäßigeren Verlauf zeigt als die erste, ergaben sich die folgenden Resultate:

1) Siehe Nachrichten 1904. S. 357.

Beobachtungssatz:	I		II		III	
Druck, mm Hg.	0,779		0,772		0,771	
	i	V	i	V	i	V
	0.057	1280	0.052	1315	0.211	1014
	0.074	1220	0.108	1235	0.336	987
	0.115	1177	0.179	1040	0.730	984
	0.183	1026	0.285	1000	0.975	979
	0.290	992	0.609	996		
	0.619	983	0,795	998		

Die Stromstärken sind in Milliampère, die Elektrodenspannungen in Volt angegeben. Die Ströme waren erst von einer Stärke von 1 Milliampère an vollkommen stetig. Bildet man die Mittel aus benachbarten Werthpaaren der drei Beobachtungssätze, so ergiebt sich die folgende Tabelle:

1.

Druck: 0,774 mm

i	0.054	0.074	0.111	0.181	0.211	0.287	0.336	0.614	0.730	0.795	0.975
V	1297	1220	1206	1033	1014	996	987	989	984	998	979

Beobachtungssatz	IV		V		VI	
Druck	0,423		0,423		0,422	
	i	V	i	V	i	V
	0.106	810	0.138	808	0.700	877
	0,150	798	0,237	805	0.926	900
	0,251	800	0,362	816	1,071	930
			0,757	844		
			0,973	857		

Beobachtungssatz	VII		VIII		IX	
Druck	0,426		0,427		0,425	
	i	V	i	V	i	V
	0.138	821	0.353	826	0.131	818
	0,235	821	0,745	877	0.336	817
	0,357	829	0,956	891	0.998	894
	0,747	886	1,139	902		
	0,954	917				

Die Mittelbildung führt zu der Tabelle:

2.

Druck: 0,424 mm

i	0.106	0.136	0.150	0.241	0.336	0.357	0.700	0.750	0.926	0.970	1,105
V	810	816	798	809	817	824	877	869	902	889	916

Beobachtungssatz	XI		XII		XIII	
Druck	0,230		0,231		0,230	
	i	*V*	*i*	*V*	*i*	*V*
	0.095	687	0.098	675	0,244	760
	0.114	717	0.112	703	0,363	799
			0.157	723	0,704	880
			0,257	758	0,890	908
			0,379	820		

Beobachtungssatz	XIV		XV	
Druck	0,231		0.231	
	i	*V*	*i*	*V*
	0,709	888	0,087	677
	1.000	950	0,146	728
			0,682	903
			0,855	943
			1.145	1000

Durch Mittelbildung ergiebt sich die Tabelle:

3.

$p = 0{,}231$ mm

i	0.092	0.113	0.151	0,250	0,371	0,698	0,872	1.000	1.145
V	680	710	725	759	809	890	925	950	1000

Beobachtungssatz	XX		XXI		XXII	
Druck	0,224		0,222		0,219	
	i	*V*	*i*	*V*	*i*	*V*
	0.134	789	0.137	765	0.136	760
	0.335	846	0.333	825	0.339	832
	0.661	927	0,659	910	0.685	934
	0.834	943	0.831	946	0.868	972
	1.107	1012	1.222	1032	1.161	1051

Im Mittel ergiebt sich aus diesen Sätzen die folgende Tabelle:

4.

$p = 0{,}222$ mm

i	0,136	0,336	0.668	0,832	0,868	1,163
V	771	834	924	944	974	1032

Die in den Tabellen 1, 2, 3 und 4 dargestellten Reihen von Werthpaaren *i* und *V* sind in Fig. 1 graphisch dargestellt. Bei größerer Verdünnung war für jeden Druck nur ein Beobachtungssatz vorhanden wegen der durch den Strom veranlaßten Druck-

abnahme. Für diese Beobachtungen sind daher keine tabellarischen Zusammenstellungen, sondern nur die graphischen Darstellungen durch die Charakteristiken gegeben.

Der gestrichelte Curve, welche in die Lücke zwischen die Curven $p = 0{,}222$ und $p = 0.117$ gezeichnet ist, liegt ein Beobachtungssatz der ersten Reihe zu Grunde. Die aus dieser Reihe folgenden charakteristischen Curven stimmen im allgemeinen mit denen der zweiten Reihe wohl überein. Nur sind die gleichen Drucken entsprechenden Curven der ersten Reihe gegen die der zweiten ein wenig nach unten verschoben.

IV. Der Scheitel der positiven Lichtsäule.

Bei der Entladung in einer Geißler'schen Röhre grenzt sich der Scheitel der positiven Lichtsäule in der Regel ziemlich scharf ab; er gestattet daher eine gute Einstellung des Diopters, und sein Abstand von der Kathode kann mit ziemlich großer Genauigkeit bestimmt werden. Die aus den Beobachtungen sich ergebenden Resultate sollen im folgenden zusammengestellt werden. Dabei berücksichtigen wir zunächst wiederum nur die Beobachtungen der zweiten Reihe. Der Abstand des Scheitels von der Kathode ist mit *KS* bezeichnet; als Längeneinheit dient das cm.

1. Der Scheitelabstand als Function der Stromstärke.

Beobachtungssatz	I		II		III	
Druck	0,779		0,772		0,771	
	i	*KS*	i	*KS*	i	*KS*
	0.057	2,96	0.052	2,79	0.211	4.32
	0.074	3.15	0.108	3.08	0.336	4.63
	0.115	3.28	0.179	4.09	0,730	4.87
	0.183	4,12	0.285	4.61	0.975	4.98
	0,290	4,57	0.609	4.89		
	0.619	4,79	0.795	4.97		

Im Mittel ergiebt sich die Tabelle:

1.

$p = 0{,}774$ mm

i	0.054	0.074	0.111	0.181	0.211	0,287	0.336	0.614	0,730	0.795	0.975
KS	2.87	3.15	3.18	4.10	4.32	4.59	4.63	4.84	4.87	4.97	4.98

Beobachtungssatz	IV		V		VI	
Druck	0,423		0,423		0,422	
	i	*KS*	*i*	*KS*	*i*	*KS*
	0.106	4,67	0.138	5.06	0.700	6.87
	0.150	5.07	0.237	5.58	0.926	7.23
	0.251	5.51	0.362	5.96	1.071	7.39
			0.757	6.66		
			0.973	6.98		

Beobachtungssatz	VII		VIII		IX	
Druck	0,426		0,427		0,425	
	i	*KS*	*i*	*KS*	*i*	*KS*
	0.138	5.37	0.353	6.26	0.131	5.42
	0.235	5.80	0,745	7.12	0.336	6.23
	0.357	6.20	0.956	7.45	0.998	7.45
	0.747	7.07	1.139	7.68		
	0,954	7.44				

Im Mittel ergiebt sich:

2.

$p = 0{,}424$ mm

i	0.106	0.136	0.150	0.241	0.336	0.357	0.700	0.749	0.926	0.970	1.1
KS	4.67	5.28	5.07	5.63	6.23	6.14	6.87	6.95	7.23	7.33	7.

Beobachtungssatz	XI		XII		XIII	
Druck	0,230		0,231		0,230	
	i	*KS*	*i*	*KS*	*i*	*KS*
	0.095	6.05	0.093	5.92	0.244	8.46
	0.114	7.07	0.112	7.01	0.363	9.29
			0.157	7.57	0.704	10.91
			0.257	8.50	0.890	11.46
			0,379	9.36		

Beobachtungssatz	XIV		XV	
Druck	0,231		0,231	
	i	*KS*	*i*	*KS*
	0.709	11.03	0.087	5.52
	1.000	12.06	0.146	7.56
			0.682	11.06
			0.855	11.72
			1.145	12.62

Im Mittel ergiebt sich:

3.

$p = 0,231$

i	0.092	0.113	0.151	0.250	0.371	0.698	0.872	1.000	1.145
KS	5.83	7.04	7.56	8.48	9.32	11.00	11.59	12.06	12.62

Beobachtungssatz	XX		XXI		XXII	
Druck	0,224		0,222		0,219	
	i	*KS*	*i*	*KS*	*i*	*KS*
	0.134	7.83	0.137	7.72	0.136	7.82
	0.335	9.61	0.333	9.54	0.339	9.68
	0.661	11.24	0.659	11.21	0.685	11.48
	0.834	11.87	0.831	11.96	0.868	12.35
	1.107	12.67	1.222	12.88	1.161	13.24

Im Mittel ergiebt sich:

4.

$p = 0,222$

i	0.136	0.336	0.668	0.832	0.868	1.163
KS	7,79	9.61	11.31	11.91	12.35	12.93

Die Tabellen 1, 2, 3, und 4 sind durch die Curven der Figur 2 graphisch dargestellt. Für höhere Verdünnungen geben wir wie bei den Charakteristiken nur die graphischen Darstellungen. Die gestrichelte Curve bezieht sich auf die schon im Vorhergehenden benutzte Beobachtung der ersten Reihe.

2. Der Scheitelabstand als Function der Elektrodenspannung.

Aus den Beobachtungen ergeben sich die folgenden Tabellen:

$p = 0,774$

V	1297	1227	1177	1040	1013	989
KS	2.87	3.11	3.28	4.09	4.35	4.82

$p = 0,424$

V	810	803	819	802	818	824	881	901	902
KS	4.67	5.06	5.39	5.54	5.88	6.23	7.09	7.45	7.68

$p = 0,231$

V	677	681	710	725	759	809	890	925	950	1000
KS	5.52	5.98	7.04	7.56	8.48	9.32	11.00	11.59	12.06	12.62

$p = 0{,}117$

V	847	933	1102	1275	1332	1357
KS	8.58	11.80	14.66	16.66	17.31	17.52

Der Inhalt dieser Tabellen, sowie einiger weiterer Beobach-tungssätze ist in Figur 3 graphisch dargestellt. Die Curven welche den Drucken $p = 0{,}231$ mm und $p = 0{,}117$ mm entsprechen durchschneiden sich. Alle zwischenliegenden Curven müssen sich ir gleicher Weise zueinander verhalten. Daraus folgt, daß all diese Curven eine gemeinsame Umhüllungslinie besitzen, der sie sicl auf ziemlich weite Strecken hin ziemlich nahe anschließen. Die hat eine Folge, die bei den Beobachtungen der ersten Reihe ii sehr eigenthümlicher Weise hervortrat. Die Drucke dieser Reih lagen zwischen den Grenzen 0,24 mm und 0,09 mm. Die Curven durch welche KS als Funktion von V vorgestellt wird, habe also eine gemeinsame Umhüllende. Die Beobachtungen waren s vertheilt, daß die durch zusammengehörende Werthe von l und KS bestimmten Punkte der Curve alle nahe an dieser Um hüllenden lagen. Alle Beobachtungen konnten also ganz unab hängig vom Drucke durch eine einzige Curve dargestellt werdeı Die Beobachtungen der ersten Reihe für sich allein legten de Schluß nahe, daß der Scheitelabstand nur eine Funktion de Elektrodenspannung und unabhängig vom Drucke sei. Die Beol achtungen der zweiten Reihe zeigen, wie dieser Schein zu stand kommt.

Die Gleichung der Umhüllenden wurde aus der ersten Beo achtungsreihe berechnet; bezeichnet man mit s den Abstand K zwischen dem Scheitel der positiven Lichtsäule und der Kathod so ergab sich für die Elektrodenspannung die Gleichung:

$$V = 263 + 96{,}5\,s - 6{,}635\,s^2 + 0{,}258\,s^3$$

Die dieser Gleichung entsprechenden Werthpaare sind in Fi 3 durch die gestrichelte Curve mit den durch $\times$ bezeichnet Punkten dargestellt. Mit der Umhüllungskurve, die sich aus d Beobachtungen der zweiten Reihe ergiebt, fällt jene Curve nur Anfange zusammen. Das hängt ohne Zweifel mit den erwähnt Störungen der ersten Reihe zusammen.

V. Die innere Grenze des negativen Glimmlichtes.

Bei konstantem Drucke und wachsendem Strome rückt die inne Grenze des negativen Glimmlichtes gegen die Kathode hin, näh sich aber dabei einer bestimmten Grenzlage: dies wird durch

folgenden Tabellen anschaulich gemacht; G bezeichnet dabei die Grenze des Glimmlichtes.

$p = 0,774$ mm

i	0.191	0,304	0,614	0,762	0,975
KG	0,40	0,34	0,30	0,29	0,30

$p = 0,424$

i	0,106	0,136	0,150	0,241	0,352	0,737	0,965	1.105
KG	0,68	0,64	0,61	0,57	0,51	0,44	0,42	0,43

$p = 0,231$

i	0.092	0.111	0,151	0,250	0.371	0,698	0,872	1.072
KG	0.89	0,86	0,82	0,73	0,70	0,67	0,64	0,64

$p = 0,222$

i	0.136	0,336	0,668	0,844	1,163
KG	0,96	0,81	0,73	0,71	0,70

$p = 0,117$

i	0.072	0.117	0.247	0.416	0.489	0.530
KG	1.60	1.56	1.42	1.35	1.33	1.31

Von einer ausführlichen Mittheilung der bei geringeren Drucken angestellten Beobachtungen möge abgesehen werden; wir geben im folgenden nur eine Zusammenstellung der Grenzwerthe der Distanz $KG = g$ mit den entsprechenden Werthen des Druckes.

Nummern der Beobachtungen	p	g	pg	g berechnet
I—III	0,774	0,30	0,231	0,19
IV—IX	0,424	0,43	0.182	0.36
XI—XV	0,231	0,64	0.148	0.67
XX—XXII	0,222	0,70	0.155	0.69
XXIII	0,117	1.32	0.154	1.31
XXIV	0,113	1.39	0.157	1.36
XXV	0.107	1,47	0.157	1.44
XXVI	0.100	1.51	0.151	1.54
XXVII	0.096	1.60	0.154	1.60
XXVIII	0.091	1.71	0.156	1.69
XXIX	0.085	1.82	0.155	1.81
XXX	0.079	1.96	0.155	1.95
XXXI	0.074	2.04	0.151	2.08
XXXII	0.069	2.23	0.154	2.23
XXXIII	0.064	2.41	0.154	2.40
XXXIV	0.061	2.53	0,154	2.52

In der dritten Columne sind die Werthe von $p \times g$ zusammengestellt. Wenn man von den drei ersten Werthen absieht, so sind diese Werthe als konstant zu betrachten. Schließt man nur die beiden ersten Werthe aus, so ergiebt sich im Mittel:

$$p \times g = 0{,}1539.$$

Das Produkt aus dem Abstande g und aus dem Drucke, oder allgemeiner ausgedrückt aus g und der Gasdichte ist konstant; g besitzt darnach den Charakter einer Weglänge.

Mit Hülfe der vorhergehenden Gleichung sind die berechneten Werthe von g erhalten. Daß die Werthe von pg für die beiden ersten Drucke zu hoch sind, dürfte durch die Temperaturerhöhung an der Kathode zu erklären sein.

Aus der ersten Beobachtungsreihe ergiebt sich die folgende Zusammenstellung zusammengehörender Werthe des Druckes und des Abstandes $g = KG$.

p	g	pg	g berechn.
0,240	0,63	0.151	0,64
0.198	0,79	0.156	0.78
0.165	0,93	0.154	0.93
0.146	1.04	0.152	1.05
0.134	1.18	0.158	1.15
0.122	1.22	0.149	1.26
0,120	1.30	0.156	1.28
0.114	1.32	0,150	1.35
0.112	1.39	0.156	1.37
0.108	1.42	0.153	1.42
0.104	1.47	0.153	1.48
0.100	1.57	0.157	1.54
0.087	1.78	0.155	1.77

Im Mittel ist in guter Uebereinstimmung mit der vorhergehenden Beobachtungsreihe:

$$p \times g = 0{,}1538.$$

Die mit dieser Gleichung berechneten Werthe von g sind in der letzten Columne aufgeführt.

Eine graphische Darstellung giebt Fig 2.

Die Ergebnisse dieses Abschnittes scheinen in Widerspruch zu stehen mit den von Ebert[1]) gefundenen Resultaten. Nach

1) Ann. d. Phys. 1903. Bd. 10 S. 91.

ihm kann die Dicke des Kathodendunkelraumes in Stickstoff durch die Formel

$$dp^{0,796} = 0,211$$

dargestellt werden. Mit Bezug darauf möge Folgendes bemerkt werden. Die Beobachtungen von Ebert beziehen sich auf den dunkeln Kathodenraum, d bezeichnet den Abstand der leuchtenden Kathodenschicht von der inneren Grenze des Glimmlichtes. Dagegen bedeutet g den Abstand dieser Grenze von der Kathode. Ferner beziehen sich meine Beobachtungen auf geringere Drucke als die von Ebert; bei ihm ist die Kathode unbeeinflußt, bei mir ist die Ausbreitung der Erscheinungen durch die Röhrenwand begrenzt. Endlich benützt Ebert Wechselstrom, während bei meinen Beobachtungen Gleichstrom verwandt wurde. An sich sind die Messungen von Ebert genauer als die meinigen. Er bediente sich einer vollkommeneren Meßvorrichtung, und bei den von ihm benutzten Drucken sind die Grenzen der Lichterscheinungen schärfer und viel besser einzustellen. Bei meinen Beobachtungen war die äußere Grenze der leuchtenden Kathodenschicht immer mehr oder weniger verwaschen. Eine genaue Messung der von Ebert beobachteten Dicke des dunkeln Zwischenraumes war unmöglich, da dieser Raum nach der Kathode nicht scharf begrenzt war. Dagegen bot die innere Grenze des negativen Glimmlichtes ein recht gutes Objekt für die Einstellung. Bei niedrigen Drucken fand übrigens auch Ebert die Verwendung eines einfachen Diopters vortheilhafter als die eines Fernrohres.

VI. Die Dicke der leuchtenden Kathodenschicht.

Wie schon im vorhergehenden erwähnt wurde, war die äußere Grenze der leuchtenden Kathodenschichte verwaschen; die Einstellungen dürften von der Empfindlichkeit des beobachtenden Auges ziemlich stark abhängen, und die im folgenden zusammengestellten Zahlen sind daher nicht ebenso zuverlässg, wie die der früheren Abschnitte. Die Grenze der leuchtenden Kathodenschichte bezeichnen wir mit L; aus den Beobachtungen der zweiten Reihe ergeben sich die folgenden Tabellen:

$$p = 0,779.$$

i	0,211	0.336	0,730	0.975
KL	0,22	0,21	0,17	0,17

$p = 0{,}424.$

i	0.106	0,139	0,240	0,352	0,750	0,952	1,069
KL	0,36	0,35	0,33	0,29	0,26	0,28	0,26

$p = 0{,}231$ mm

i	0.092	0.113	0.151	0,250	0,371	0,698	0,872	1,072
KL	0.52	0.47	0,48	0,43	0,41	0,43	0,43	0,43

$p = 0{,}117$ mm

i	0.072	0.117	0.247	0.416	0.489	0.530
KL	0.99	0.92	0.80	0,80	0,81	0.79

Man sieht aus diesen Reihen, daß auch die Dicke der leuchtenden Kathodenschicht mit wachsender Stromstärke einem bestimmten Grenzwerth zustrebt. Mit Hinzunahme einiger weiterer bei noch größerer Verdünnung angestellter Beobachtungen ergiebt sich die folgende Zusammenstellung. Dabei bezeichnet δ den Grenzwerth, den die Dicke der leuchtenden Kathodenschicht bei wachsender Stromstärke erreicht:

Nummer der Beobachtungen	p	δ	δ berechnet
III	0,771	0,17	0,16
IV—IX	0.424	0,27	0,27
XI—XV	0,231	0,43	0,46
XXIII	0,117	0.80	0,86
XXIX	0.085	1.15	1,15
XXX	0.079	1.23	1.23
XXXII	0.069	1,34	1,39
XXXIII	0.064	1,36	1,49
XXXIV	0.061	1,42	1,54

Die Beobachtungen lassen sich näherungsweise wiedergeben durch die Formel:

$$\delta p^{0 \cdot 902} = 0{,}124.$$

Die mit dieser berechneten Werthe von δ sind in der vierten Columne angegeben. Eine graphische Darstellung giebt Fig. 4.

VII. Die Schichtenlänge der positiven Lichtsäule.

Schon im zweiten Abschnitte haben wir hervorgehoben, daß zwischen der Länge der ersten Schicht und der Länge der folgenden ein sehr merklicher Unterschied besteht. Wir werden

daher die Länge der ersten Schicht, l_1, einerseits, den Mittelwerth der übrigen Schichtenlängen, l_m, andererseits untersuchen.

1. Länge der ersten Schicht.

$p = 0{,}771$ (Beobachtungssätze II, III)

i	0.609	0.762	0.975
l_1	0,98	0,96	1.00

$p = 0{,}424$ (Beobachtungssätze IV—IX)

i	0,241	0,352	0,737	0,952	1,069
l_1	1.06	1,18	1,28	1,33	1,37

$p = 0{,}231$ (Beobachtungssätze XI—XV)

i	0 092	0.113	0.151	0,250	0,371	0,698	0,872	1,072
l_1	2,39	1,70	1,57	1,56	1,70	1,71	1,75	1.80

$p = 0{,}222$ (Beobachtungssätze XX—XXII)

i	0.136	0.336	0,668	0,844	1,163
l_1	1,72	1,78	1,87	1,87	1.93

$p = 0{,}117$ (Beobachtungssatz XXIII)

i	0,117	0,247	0,416	0,489	0,530
l_1	2,93	2,27	2,22	2,23	2,25

$p = 0{,}107$ (Beobachtungssätze XXIV—XXVI)

i	0.110	0,221	0,377	0,456	0.532
l_1	3.07	2,28	2,33	2,31	2.32

$p = 0.093$ (Beobachtungssätze XXVII—XXVIII)

i	0.205	0,329	0,381	0.440
l_1	2.47	2.48	2.46	2.47

Bei diesem letzten Drucke und ebenso bei einigen noch geringeren ist eine Aenderung von l_1 mit der Stromstärke nicht mehr mit Sicherheit festzustellen. Es ergaben sich noch die folgenden Werthepaare:

$p =$	0,079	0,074	0,069
$l_1 =$	2,57	2,77	2,90

Die Beobachtungen sind in Fig. 5 graphisch dargestellt. Mit wachsender Stromstärke scheint die Länge der ersten Schicht einem konstanten Grenzwerth sich zu nähern. Die Abhängigkeit

dieser konstanten Längen von dem Drucke wird durch die folgende Tabelle bestimmt

p	0.771	0.424	0.231	0.222	0.117	0.107	0.093	0.079	0.074	0.069
Grenzwerth von l_1	0.99	1.33	1,77	1.92	2.25	2.33	2.48	2.57	2.77	2.90

Die Zahlen dieser Tabelle sind in Fig. 6 graphisch dargestellt.

Auffallend sind die großen Schichtenlängen, welche bei kleinen Stromstärken auftreten; die Schichten, welche zu den absteigenden Aesten der Curven von Fig. 5 gehören, haben ein anderes Aussehen, als die zu den wieder aufsteigenden Aesten gehörenden. Es ist also nicht unmöglich, daß die absteigenden und die aufsteigenden Aeste der Curven zwei verschiedenen Formen der Entladung angehören, und in Wirklichkeit nicht stetig ineinander übergehen.

2. Mittelwerthe l_m der auf die erste folgenden Schichten.

Der Mittheilung der Zahlen für die Mittelwerthe l_m möge die Bemerkung vorangeschickt werden, daß dieselben nicht gleichwerthig sind, da je nach den Verhältnissen sehr verschiedene Anzahlen von Schichten auftreten.

$p = 0.425$ (Beobachtungen V—IX)

i	0.355	0.737	0.952	1.105
l_m	1.11	1,11	1.154	1.175

$p = 0.231$ (Beobachtungen XII—XV)

i	0.250	0.371	0.698	0.872	1.072
l_m	1.48	1.27	1.39	1.420	1.420

$p = 0.222$ (Beobachtungen XX—XXII)

i	0.336	0.668	0.844	1.163
l_m	1.49	1.43	1.497	1.538

$p = 0,117$ (Beobachtung XXIII)

i	0,247	0,416	0,489	0.530
l_m	1.96	1.67	1.74	1.74

$p = 0,107$ (Beobachtungen XXIV—XXVI)

i	0.222	0.339	0.390	0.456	0.532
l_m	1.94	1.84	1.80	1.76	1.75

$p = 0,093$ (Beobachtungen XXVII—XXVIII)

i	0.205	0.312	0.361
l_m	2,27	1.80	1.76

Die letzten Beobachtungen sind wahrscheinlich durch die Anode beeinflußt. Die Röhre war für diese Messungen etwas zu kurz; bei den größten Verdünnungen waren überhaupt nur noch zwei Schichten vorhanden, die zweite rückte gegen die Anode hin und es ist wohl möglich, daß sie dadurch verkürzt wurde. Die Grenzwerthe von l_m sind in Figur 6 durch die gestrichelte Linie graphisch dargestellt.

VIII. Der Durchmesser der positiven Lichtsäule.

Die positive Lichtsäule füllte bei den im vorhergehenden beschriebenen Beobachtungen den Querschnitt der Röhre nicht völlig aus. Ihre Basis wurde gebildet durch die Anode; von dieser an verjüngte sich die Säule, und dehnte sich dann gegen ihr Ende hin wieder aus. Man hat also zwischen einem kleinsten, in der Nähe der Anode liegenden und einem größeren, am Ende liegenden Querschnitt zu unterscheiden. Die Umrisse der Lichtsäule waren ziemlich verwaschen, die Einstellungen wenig genau. Die im folgenden mitgetheilten Messungen, welche den Zusammenhang zwischen Säulendurchmesser, Stromstärke und Druck aufklären sollten, können daher nur zu einer ersten Orientierung dienen. d_1 bezeichnet den größten, d_2 den kleinsten Durchmesser der positiven Lichtsäule in cm, j_1 und j_2 die entsprechenden Stromdichten, berechnet unter der Annahme, daß die Strombahn durch die leuchtende Säule gegeben sei.

$p = 0,777$ (Beobacht. vom 12. Febr. 1904, nach dem II. Satze).

i	d_1	d_2	j_1	j_2
0.179	1.33	1,11	0,128	0.185
0,285	1.39	1.23	0,188	0.214
0.609	1.53	1.41	0,331	0,380
0.795	1.60	1.40	0,396	0,516

$p = 0,774$ (Beobacht. vom 17. Febr. 1904, nach dem III. Satze)

i	d_1	d_2	j_1	j_2
0,211	1.40	1.28	0.137	0,164
0,336	1.51	1.34	0,187	0,243
0,743	1.57	1.53	0,384	0.404
0,975	1.69	1.60	0,436	0,484

p = 0,420 (Beobacht. vom 19. Febr. 1904, nach dem V. Satze).

i	d_1	d_2	j_1	j_2
0.138	1.46	1.28	0,082	0,107
0.237	1.63	1.29	0.113	0.180
0.362	1.55	1.37	0.192	0.245
0.757	1.79	1.45	0.301	0,456
0.973	1.85	1.50	0.362	0.552

p = 0,420 (Beobacht. vom 25. Febr. 1904 IX. Satz)

i	d_1	d_2	j_1	j_2
0.090	1.15	1.12	0.087	0.089
0.129	1.34	1.25	0.091	0.105
0.214	1.38	1.27	0.143	0.169
0.325	1.49	1.30	0.186	0.245
0.649	1.50	1.40	0.367	0,420
0.809	1.61	1.45	0.397	0.492
0.932	1.62	1.46	0.452	0.556

p = 0,228 (Beobacht. vom 7. März 1904 XVI. Satz)

i	d_1	d_2	j_1	j_2
0.139	1.39	1.16	0.092	0.131
0.635	1.60	1.37	0.316	0.432
0.790	1.60	1.38	0.395	0.528
1.044	1.70	1.41	0.460	0.668
1.242	1.74	1.50	0.424	0,704
1.544	1.78	1.59	0.620	0.780

p = 0,222 (Beobacht. vom 11. März 1904 nach dem XX. Satz)

i	d_1	d_2	j_1	i_2
0.138	1.30	1.20	0.106	0.122
0.335	1.48	1.25	0.195	0.273
0.661	1.66	1.38	0.305	0.446
0,834	1.68	1.51	0.376	0.466
1.107	1.80	1.42	0.436	0.700

Die Werthe der ersten bei dem Drucke von 0,420 mm angestellten Beobachtungsreihe weichen von denen der zweiten sehr stark ab. Die übrigen Beobachtungen sind in Fig. 7 graphisch dargestellt. Innerhalb des Gebietes der Beobachtungen scheint der Durchmesser der positiven Lichtsäule von dem Drucke im wesentlichen unabhängig zu sein.

Ueber die Berechnung retardierter Potentiale.

Von

G. Herglotz.

Vorgelegt von W. Voigt in der Sitzung vom 17. Dezember 1904.

In zwei kürzlich erschienenen Arbeiten[1]) hat Herr Sommerfeld neue und einfache Ausdrücke für das Feld eines Elektrons sowohl, als die an demselben angreifenden Kräfte aufgestellt, in der Form einfacher Zeitintegrale über die vom Elektronmittelpunkt beschriebene Bahn. Diese Reduction läuft im wesentlichen darauf hinaus, bei Berechnung der retardierten Potentiale das Elektron durch um den Aufpunkt geschlagene Kugeln in Schichten zu zerlegen, und die Integration über die einzelne Schicht explizite auszuführen. Indeß wird dieser direkte Weg bei Bestimmung der Kräfte weitläufig und unübersichtlich. An Stelle desselben benutzte Herr Sommerfeld die Darstellung der retardierten Potentiale durch Fourier-Integrale. Die Reduction der für die gesuchten Größen sich dann zunächst ergebenden Doppelintegrale erfordert die Auswerthung gewisser discontinuierlicher, bestimmter Integrale, welche für die einzelnen Intervalle separat erfolgen muß. Es soll nun im folgenden ein neuer zu den Sommerfeld'schen Ausdrücken hinführender Weg angegeben werden, bei welchem die in denselben auftretenden Integranden, als Periodizitätsmoduln einer leicht zu bildenden Function erscheinen, und sammt den nöthigen Fallunterscheidungen direkt an dieser Function abgelesen werden können.

---

1) Nachr. der Gött. Ges. 1904. pag. 99 u. 363.

I.

Das retardierte Potential eines bewegten Massenpunktes kann folgendermaßen construiert werden: Seien x_1, y_1, z_1, $s(t_1)$ Coordinaten und Maße desselben zur Zeit t_1 und x, y, z die Coordinaten des Aufpunktes, für welchen das Potential zur Zeit t gesucht wird. Der Gleichung:

$$1)\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) = 0$$

genügt dann der Ausdruck:

$$2)\qquad \frac{s(t_1)}{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 - c^2(t-t_1)^2} = \frac{s(t_1)}{R_{t_1}^2 - c^2(t-t_1)^2},$$

worin also R_{t_1}, die Entfernung des Massenpunktes vom Aufpunkt zur Zeit t_1 ist. Um zu erreichen, daß derselbe bloß dann unendlich wird, wenn $t = t_1$, $R_t = 0$ ist, und sich für $c = \infty$ auf $\frac{s(t)}{4\pi R_t}$ reduziert, multipliziere man ihn mit $\frac{c}{4\pi^2 i}\,dt_1$ und integriere nach t_1 längs einer den Strahl $(t \cdots -\infty)$ positiv umfahrenden Schleife. Setzt man in der so gewonnenen Lösung von 1) noch $t_1 = t - \tau$, so erhält sie die Gestalt:

$$3)\qquad \varphi = \frac{c}{4\pi^2 i}\int \frac{s(t-\tau)\,d\tau}{R_{t-\tau}^2 - c^2\tau^2}$$

wobei jetzt τ vom Punkt 0 ausgehend in der oberen Halbebene gegen $+\infty$ hinläuft, die reelle positive Halbaxe überschreitet und in der unteren Halbebene nach 0 zurückkehrt.

Zöge man diesen Weg auf den durch $c\tau_0 = R_{t-\tau_0}$ bestimmten Pol der Function zusammen, so erhielte man:

$$4)\qquad \varphi = \frac{s(t-t_0)}{4\pi R_{t-\tau_0}} \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{c}\left(\frac{dR}{dt}\right)_{t-\tau_0}\right]}$$

d. i. gerade das Wiechert'sche Punktpotentialgesetz.

Die Gestalt 3) desselben liefert aber nun für das retardierte Potential eines bewegten Körpers der Dichte ϱ unmittelbar den Ausdruck:

$$5)\qquad \Phi = \frac{c}{4\pi^2 i}\int d\tau \int \frac{\varrho(x', y', z', t-\tau)}{R^2 - c^2\tau^2}\,dv$$

$$R^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

worin die Integration nach $dv = dx' dy' dz'$ über den Körper in seiner Lage zur Zeit $t - \tau$ zu erstrecken ist. Bezeichnet man daher mit:

$$6) \qquad \Psi(\tau, \alpha) = \int \frac{\varrho dv'}{R^2 - \alpha^2}$$

das statische Potential, das der Körper zur Zeit $t - \tau$ im Aufpunkt erzeugt, wenn $\frac{1}{R^2 - \alpha^2}$ als Potentialgesetz angenommen wird, so ist:

$$7) \qquad \Phi = \frac{c}{4\pi^2 i} \int \Psi(\tau, c\tau)\, d\tau.$$

Um hier das complexe Integral in ein gewöhnliches zu verwandeln, hat man bloß je die benachbarten Elemente des oberen und unteren Theiles des Integrationsweges paarweise zusammenzufassen. Zu diesem Behufe bezeichne man mit:

$$8) \qquad \Psi(c\tau, \tau)_+ - \Psi(c\tau, \tau)_- = 2\pi H(\tau)$$

die Differenz der Werthe welche Ψ im Punkte τ annimmt, je nachdem man aus der oberen (Ψ_+) oder unteren (Ψ_-) Halbebene kommend in ihn einrückt, und treffe zur völligen Festlegung von $H(\tau)$, dem Integrationswege gemäß die Festsetzung, daß $H(\tau) = 0$ für genügend große positive τ-Werthe ist. Dann wird sofort:

$$9) \qquad \Phi = \frac{c}{2\pi} \int_0^\infty H(\tau)\, d\tau.$$

Nachdem so das retardierte Potential durch ein einfaches Integral ausgedrückt ist, erübrigt es nun noch, zu den auf das Elektron wirkenden Kräften selbst überzugehen.

II.

Der bloße Anblick der Formeln, welche die am Elektron angreifenden Kräfte durch das retardierte Vector- und Scalarpotential ausdrücken, läßt nun in Verbindung mit dem vorhergehenden die Richtigkeit des folgenden Verfahrens zur Bestimmung dieser Kräfte erkennen.

Man denke sich ein zweites Elektron $E_{t-\tau}$ gerade in jenem Zustand und jener Lage welche das zu betrachtende Elektron E zur Zeit $t - \tau$ besaß, und bestimme die Kraft, welche $E_{t-\tau}$ auf E_t ausübt, wenn an Stelle der retardierten Potentiale, statische mit dem Grundgesetz $\frac{1}{R^2 - \alpha^2}$ treten. Für $\alpha = c\tau$ wird der er-

haltene Ausdruck als Function von τ betrachtet längs der positiven τ-Halbaxe mit einem gewissen, (durch die gleiche Festsetzung wie oben festzulegenden) additiven Periodizitätsmodul behaftet sein, welcher mit $\frac{c\,d\tau}{4\pi^2 i}$ multipliziert und von 0 bis ∞ nach τ integriert die gesuchte am Elektron angreifende Kraft ergibt. Als Beispiel soll nach dieser Methode die Translationskraft für ein nicht rotierendes Elektron bestimmt werden.

Es bezeichne ϱ die constante Dichte der Volumladung, a den Radius und $\mathfrak{v}_t$ den Geschwindigkeitsvector zur Zeit t des Mittelpunktes des Elektrons. Ferner sei $\mathfrak{T}$ die aus dem Centrum von $E_{t-\tau}$ nach dem von E_t gezogene Verbindungsstrecke, und T ihre Länge. Dann erhält man zunächst für das von $E_{t-\tau}$ bei Zugrundelegung des statischen Potentialgesetzes $\frac{1}{R^2-\alpha^2}$ erzeugte Skalar- und Vectorpotential:

$$\varphi = \varrho \int_{E_{t-\tau}} \frac{dv}{R^2-\alpha^2} \qquad \mathfrak{A} = \varrho\, \frac{\mathfrak{v}_{t-\tau}}{c} \int_{E_{t-\tau}} \frac{dv}{R^2-\alpha^2}.$$

Hieraus folgt die auf E_t ausgeübte Kraft:

$$-\mathfrak{K} = \varrho \int_{E_t} \left[\operatorname{grad}\left(\varphi - \frac{1}{c}(\mathfrak{v}_t \mathfrak{A})\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}\right] dv$$

nach leicht zu ersehender Umformung in der Form:

$$\text{10)} \quad -\mathfrak{K} = \frac{\varrho^2}{c^2}\left[(c^2 - (\mathfrak{v}_t \mathfrak{v}_{t-\tau}))\operatorname{grad}_{\mathfrak{T}} P(T,\alpha) + \frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{v}_{t-\tau} P(T,\alpha)\right]$$

darin bedeutet $P(T,\alpha)$ das nach dem Gesetz $\frac{1}{R^2-\alpha^2}$ gebildete gegenseitige Potential zweier Kugeln der Dichte 1 und des Radius a, die voneinander den Centralabstand T haben. Führt man nun ganz analog wie früher die Differenz mit der $P(T, c\tau)$ längs der positiven τ-Axe behaftet ist, durch die Gleichung ein:

$$\text{11)} \quad P(T, c\tau)_+ - P(T, c\tau)_- = 2\pi i\, J(\tau)$$

$$J(\tau) = 0, \text{ wenn } \tau \text{ genügend groß positiv ist,}$$

so ist dem angegebenen Verfahren zufolge, die gesuchte am Elektron angreifende Kraft $= \mathfrak{F}$:

$$\text{12)} \quad -\frac{2\pi c}{\varrho^2}\mathfrak{F} = \int_0^\infty d\tau \left[(c^2 - (\mathfrak{v}_t \mathfrak{v}_{t-\tau}))\operatorname{grad}_{\mathfrak{T}} J(\tau) + \frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{v}_{t-\tau} J(\tau)\right].$$

Bei der Bestimmung von $P(T, \alpha)$ ist nun zuvörderst die wesentliche Bemerkung zu machen, daß hiebei keine Fallunterscheidungen bezügl. der gegenseitigen Lage beider Kugeln erforderlich sind. Da sich nämlich α frei im complexen Gebiete bewegen soll, kann man es ungehindert für den Moment rein imaginär denken; dann aber ist $P(T, \alpha)$ das gewöhnliche vierdimensionale gegenseitige Potential zweier im vierdimensionalen Raum gelegener dreidimensionaler paralleler „Kugelscheiben“, deren Ebenen von einander den Abstand $\frac{\alpha}{i}$ haben, also stets vollkommen auseinander liegen, daher dann in diesem Falle offenbar ein einheitlicher Ausdruck für $P(T, \alpha)$ gilt. Die Fortsetzung dieses so fixierten Zweiges der Function $P(T, \alpha)$ würde dann den gleichen Periodizitätsmodul liefern, wie irgend ein anderer Zweig. Es möge also zur Vereinfachung $T > 2a$ gedacht werden.

Haben jetzt η, r, σ, R die aus der Fig. 1 ersichtliche Bedeutung:

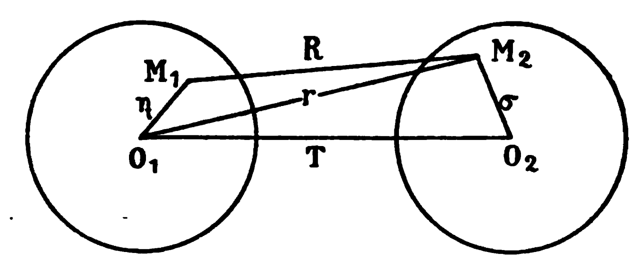


Fig. 1

so ist, wie leicht zu finden:

$$13) \quad P(T, \alpha) = \frac{4\pi^2}{T} \int_0^a \sigma d\sigma \int_{T-\sigma}^{T+\sigma} dr \int_0^a \eta d\eta \int_{r-\eta}^{r+\eta} \frac{R dR}{R^2 - \alpha^2}$$

oder die Integration nach R ausgeführt:

$$14) \quad P(T, \alpha) = \Pi(T, \alpha) + \Pi(T, -\alpha)$$

$$15) \quad \Pi(T, \alpha) = \frac{2\pi^2}{T} \int_0^a \sigma d\sigma \int_{T-\sigma}^{T+\sigma} dr \int_0^a \eta d\eta \log \frac{r + \eta + \alpha}{r - \eta + \alpha}$$

Da es sich nun bloß um die Kenntnis des Periodizitätsmoduls von P handelt, so hat man einzig die logarithmischen Glieder von $\Pi(T, \alpha)$ zu bestimmen. Dies geschieht durch successive Anwendung der Beziehung:

16) $$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\lg(x-x_0)\,dx$$
$$= \lg(x_1-x_0)\int_{x_1}^{x_0} f(x)\,dx + \lg(x_2-x_0)\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + E.F.$$

in der $f(x)$ ein Polynom in x und $E.F.$ allgemein eine eindeutige Function bezeichnet. Dieselbe ergiebt zunächst:

17) $$\frac{T}{2\pi^2}\Pi(T,\alpha) = \int_{T-a+\alpha}^{a}\sigma d\sigma\int_{a-\alpha}^{T-\sigma}dr\int_{r-\alpha}^{a}\eta d\eta\log(T-2a+\alpha)$$
$$+\int_{T-a+\alpha}^{a}\sigma d\sigma\int_{-a-\alpha}^{T+\sigma}dr\int_{r-\alpha}^{a}\eta d\eta\log(T+2a+\alpha)$$
$$-\int_{T+a+\alpha}^{a}\sigma d\sigma\int_{-a-\alpha}^{T-\sigma}dr\int_{r-\alpha}^{a}\eta d\eta\log(T+\alpha)$$
$$-\int_{-T+a-\alpha}^{a}\sigma d\sigma\int_{a-\alpha}^{T+\sigma}dr\int_{r-\alpha}^{a}\eta d\eta\log(T+\alpha)+E.F$$

Man beachte jetzt, daß hier die Summe der vier Logarithmus-Coeffizienten identisch Null sein muß, weil $\Pi(T,\alpha)$ für $T=\infty$ regulär ist, und daß weiterhin der zweite aus dem ersten durch Vertauschung von a mit $-a$ hervorgeht. Für diesen ersten Coeffizienten aber ergibt die einfache Ausrechnung den Werth:

18) $$\int_{T-a+\alpha}^{a}\sigma d\sigma\int_{a-\alpha}^{T-\sigma}dr\int_{r-\alpha}^{a}\eta d\eta$$
$$= \frac{1}{120}(T+\alpha-2a)^3[(T+\alpha+3a)^2-5a^2] = \frac{1}{6}a^2 f(T+\alpha),$$

wenn gesetzt wird:

19) $$f(x) = \frac{x^5}{20a^2} - x^3 + 2a x^2 - \frac{8}{5}a^3.$$

Der eben gemachten Bemerkung zu Folge läßt sich daher wegen $f(x,-a) = -f(-x,a)$ schreiben:

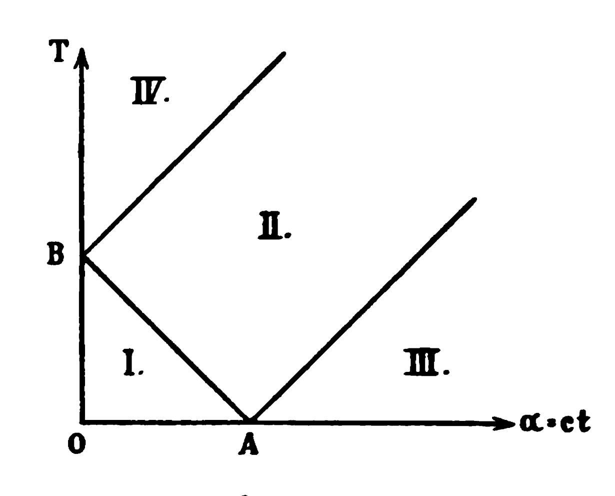
20) $$\frac{3T}{a^2\pi^2}\Pi(T,\alpha)$$
$$= f(T+\alpha)\log\frac{T-2a+\alpha}{T+\alpha} - f(-T-\alpha)\log\frac{T+2a+\alpha}{T+\alpha} + E.F.$$

und also nach 14) schließlich:

$$21)\quad \frac{3T}{a^2\pi^2}P(T,\alpha) = f(T+\alpha)\log\frac{T-2a+\alpha}{T+\alpha} + f(T-\alpha)\log\frac{T-2a-\alpha}{T-\alpha}$$
$$-f(-T-\alpha)\log\frac{T+2a+\alpha}{T+\alpha} - f(-T+\alpha)\log\frac{T+2a-\alpha}{T-\alpha} + E.F.$$

An diesem Ausdruck kann nun natürlich der Werth, der durch 11) als Periodizitätsmodul definierten Größe $J(\tau)$, sofort abgelesen werden. Denkt man sich T und $\alpha = c\tau$ als rechtwinklige Coordinaten, und theilt den ersten Quadranten der Fig. 2 gemäß in vier Felder, so ist:

$$22)\quad \begin{aligned} &\text{in I.} \quad \frac{3T}{a^2\pi^2}J(\tau) = f(T+\alpha) - f(|T-\alpha|)\\ &\text{in II.} \quad \frac{3T}{a^2\pi^2}J(\tau) = -f(|T-\alpha|)\\ &\text{in III, IV} \quad \frac{3T}{a^2\pi^2}J(\tau) = 0.\end{aligned}$$



OA = OB = 2α

Fig. 2

In Verbindung mit 12) liefert dies gerade den von Sommerfeld angegebenen Ausdruck der Translationskraft. Die Bestimmung des Drehmomentes gestaltet sich genau ebenso, bloß daß im Integrale 18) bei dr noch der Factor $T^2+\sigma^2-r^2$ steht.

III.

Zum Schlusse möge noch eine einfache Interpretation der eigentlichen Sommerfeld'schen Methode hier Platz finden. Zer-

legt man bei Berechnung des retardierten Potentiales eines Körpers, denselben durch Kugeln um den Aufpunkt in Schichten, so erhält dieses wie bekannt die Form:

$$22)\qquad \Phi = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty F\left(R, \frac{R}{c}\right)\frac{dR}{R} = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty F(c\tau, \tau)\frac{d\tau}{\tau}$$

wenn hierbei unter $F(R,\tau)dR$ die Masse verstanden wird, welche die um den Aufpunkt geschlagene Kugelschale des Radius R und der Dicke dR zur Zeit $t-\tau$ aus dem Körper herausschneidet. Da aber nun nach dem Fourier'schen Satze:

$$24)\qquad \frac{1}{\tau}F(c\tau, \tau) = \frac{2c}{\pi}\int_0^\infty \sin c\tau s ds \int_0^\infty F(R, \tau)\frac{\sin Rs}{R}dR$$

ist, so kann man statt 23) auch schreiben:

$$25)\qquad \Phi = \frac{c}{2\pi^2}\int_0^\infty d\tau \int_0^\infty Q(s, \tau) \sin c\tau s ds$$

$$26)\qquad Q(s, \tau) = \int_0^\infty F(R, \tau)\frac{\sin Rs}{R}dR.$$

Hier ist offenbar $Q(s,\tau)$ nicht anderes als das nach dem Gesetze $\frac{\sin Rs}{R}$ gebildete statische Potential des Körpers zur Zeit $t-\tau$.

Daraus fließt nun ganz analog dem frühern, folgendes Verfahren zur Bestimmung der am Elektron angreifenden Kraft:

Man bestimme die von $E_{t-\tau}$ auf E_t bei Zugrundelegung des statischen Potentialgesetzes $\frac{\sin Rs}{R}$ ausgeübte Kraft $\mathfrak{K}(s,\tau)$ dann ist die gesuchte am Elektron angreifende Kraft:

$$27)\qquad \mathfrak{F} = \frac{c}{2\pi^2}\int_0^\infty d\tau \int_0^\infty \mathfrak{K}(s, \tau) \sin c\tau s\, ds.$$

Dieser Vorgang ist aber nun wesentlich identisch mit dem von Sommerfeld angewandten Verfahren.

Zugleich erhellt aus der Gegenüberstellung der Formeln 9) und 25) der Zusammenhang, der zwischen den statischen Potentialgesetzen $\frac{1}{R^2-\alpha^2}$ und $\frac{\sin Rs}{R}$ untereinander sowohl als auch mit dem retardierten Potential besteht.

Bemerkung zur Mengenlehre.

Von

Felix Bernstein.

Vorgelegt von Herrn Hilbert in der Sitzung vom 29. Oktober 1904.

In einer Note: Intorno alla teoria degli aggregati (Lomb. Ist. Rend. (2) 35, 1902. p. 863—869) beschäftigt sich Herr Beppo Levi mit den Sätzen, welche ich in meiner Dissertation (Untersuchungen zur Mengenlehre Göttingen-Halle 1901) behandelt habe. Der Autor schreibt u. a. (l. c. p. 864).

„Es sei A eine beliebige Menge: ich werde sagen, daß A in" „getrennte Mengen zerlegt sei, wenn eine Zerlegung von A in" „Teilmengen derart definiert ist, daß jedes Element von A einer" „und nur einer dieser Teilmengen angehört. Es sei s die allge-" „meine Beziehung für diese Teilmengen und es bezeichne $S = \{s\}$" „die Menge A, betrachtet als Aggregat der Mengen s, wo dann" „die s als Elemente gelten sollen".

„In den Ueberlegungen des Herrn Bernstein scheint es mir," „daß er annimmt — wie es unmittelbar gewiß ist, wenn A end-" „lich ist —, daß die Mächtigkeit von $S \leqq a$ ist, wo a die Mäch-" „tigkeit von A bedeutet. Die Annahme einer solchen Voraus-" „setzung ohne Beweis scheint mir nicht erlaubt".

Herr Beppo Levi giebt dann einen Beweis des Satzes für den Fall, daß A wohlgeordnet ist.

„Wenn die Menge A wohl geordnet ist, hat jede Teilmenge s" „ein Element a, welches nach dem Ordnungsgesetz von A das" „niederste ist. Da die Teilmengen getrennt sind, so gehört dieses" „Element nicht zu anderen s. Zwischen den s und ihren niedersten" „Elementen kann demnach eine umkehrbar eindeutige Korrespon-" „denz hergestellt werden und man kann daher S auf einen Teil" „von A abbilden, was zu beweisen war".

„Man sieht auch, daß dieser Beweis unverändert für jeden“ „Fall gilt, in dem alle s wohlgeordnet sind, oder allgemeiner,“ „wenn man in jedem s eindeutig ein Element unterscheiden kann“.

Zu einer genaueren Formulierung des von Herrn Beppo Levi angegriffenen Prinzips gehört es, daß man die Voraussetzung angiebt, daß jedes s wenigstens ein Element enthält, sodass also $\overline{\overline{s}} \geqq 1$ ist. In diesem Falle wird behauptet, daß es wenigstens eine Teilmenge von A giebt, welche äquivalent S ist. Genauer ist die Anzahl der Teilmengen $\prod \overline{\overline{s}}$, wo das Produkt über sämtliche Teilmengen s zu erstrecken ist. Dieses Schlussprinzip scheint mir eines der wichtigsten in der Mengenlehre und ich sehe kein Bedenken in der Anwendung desselben. Es ist aber jedenfalls angebracht die logische Bedeutung desselben genauer zu erörtern und es soll dies im Folgenden sogleich geschehen.

Das fragliche Prinzip wird angewendet bei dem Beweise des Satzes, daß die Gesammtheit der abgeschlossenen Mengen äquivalent ist dem Continuum. Bei diesem Beweise wird nicht eine einzelne umkehrbar eindeutige Abbildung φ dieser Mengen auseinander gewonnen, sondern man erhält zugleich eine ganze Menge $\Phi = \{\varphi\}$ solcher Abbildungen, unter denen keine ausgezeichnet ist.

Es sollen zwei Mengen M und N, für welche es eine Menge $\Phi = \{\varphi\}$ von umkehrbar eindeutigen Abbildungen φ giebt, in der kein Element ausgezeichnet ist, vielwertig äquivalent heißen.

Die Cardinalzahl $\overline{\overline{\Phi}} = f$ soll Multiplizität der Abbildung φ heißen. Ist die Multiplizität 1, so sollen die Mengen einwertig äquivalent heißen.

Wenn es sich darum handelt, die Aequivalenz von Mengen zu beweisen, so wird man stets bemüht sein, die Multiplizität der Abbildung möglichst zu verringern.

Indessen lassen sich Voraussetzungen denken, bei denen es nicht möglich ist, diese Multiplizität auf 1 herabzudrücken. Die vielwertige Aequivalenz bedeutet logisch weniger als die einwertige Aequivalenz.

Es ist dieser Gesichtspunkt für das Studium der umkehrbar eindeutigen Abbildungen von großer Wichtigkeit.

Die Bedeutung des direkten Beweises des Aequivalenzsatzes von Schröder und mir beruht vor allem auch darauf, daß die Aequivalenz der beiden Mengen M und N, sobald vorausgesetzt wird, daß M durch eine Abbildung φ auf eine Teilmenge von N

und N durch eine Abbildung ψ auf eine Teilmenge von M abgebildet wird, durch eine bestimmte Abbildung χ, welche eindeutig aus φ und ψ hergestellt wird, bewiesen wird. Es sind also M und N, bei diesen Voraussetzungen einwertig äquivalent. Es besteht aber der weitere Satz:

Sind die Abbildungen φ und ψ mit den Multiplizitäten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gegeben, so ist χ von der Multiplizität $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} . \mathfrak{b}$.

Wir schreiben dies

Aus

$$\overline{\overline{M}} \leqq \overline{\overline{N}} \text{ (Mult. } \mathfrak{a}\text{)},$$

und

$$\overline{\overline{N}} \leqq \overline{\overline{M}} \text{ (Mult. } \mathfrak{b}\text{)}$$

folgt

$$\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}} \text{ (Mult. } \mathfrak{a} . \mathfrak{b}\text{)}.$$

Uebrigens bemerkt man, daß aus

$$M \sim N \text{ (Mult. } \mathfrak{a}\text{)},$$

und

$$N \sim P \text{ (Mult. } \mathfrak{b}\text{)}$$

folgt

$$M \sim P \text{ (Mult. } \mathfrak{a} . \mathfrak{b}\text{)}.$$

Herr Beppo Levi giebt nun in der genannten Arbeit (l. c. p. 865—868) einen Beweis des Satzes, daß die Gesammtheit der abgeschlossenen Mengen die Mächtigkeit des Continuum besitzt. Bei diesem Beweis wird eine einzelne umkehrbar eindeutige Abbildung beider Mengen auf einander hergestellt. Bedeutet nun der schöne Beweis des Herrn B. Levi eine Herabdrückung der Multiplizität der Abbildung beider Mengen bei sonst gleichen Voraussetzungen?

Dies ist nicht der Fall. Vielmehr bedient sich der Autor eines Hilfsmittels, das ich stets sorgfältig vermieden habe. In meinen beiden Beweisen habe ich allein den Ordnungstypus des Continuum zugrunde gelegt, dagegen hat Beppo Levi die Axiome des Maßes benutzt. (p. 866 zweiter Abschnitt).

Die Einführung der Maßskala in den Ordnungstypus des Continuum ist nun genau mit der Multiplizität behaftet, welche sich auch in meinem Beweise herausstellt, sodaß also auf der von mir gewählten Basis keine Verminderung der Multiplizität $\mathfrak{c}$ sich durch den Beweis des Herrn Beppo Levi ergiebt.

Es ist sehr wahrscheinlich, daß es unmöglich ist, die Multiplizität unter $\mathfrak{c}$ herabzudrücken. Ein

exakter Beweis dafür ist mir bis jetzt nicht gelungen. Vielleicht gelingt es jede Abbildung φ mit der Einführung einer Maßskala in umkehrbare Verbindung zu setzen und so den Beweis zu erbringen.

Nach diesen Auseinandersetzungen dürfte über die Tragweite und Berechtigung des genannten Prinzips wohl kein Zweifel mehr obwalten.

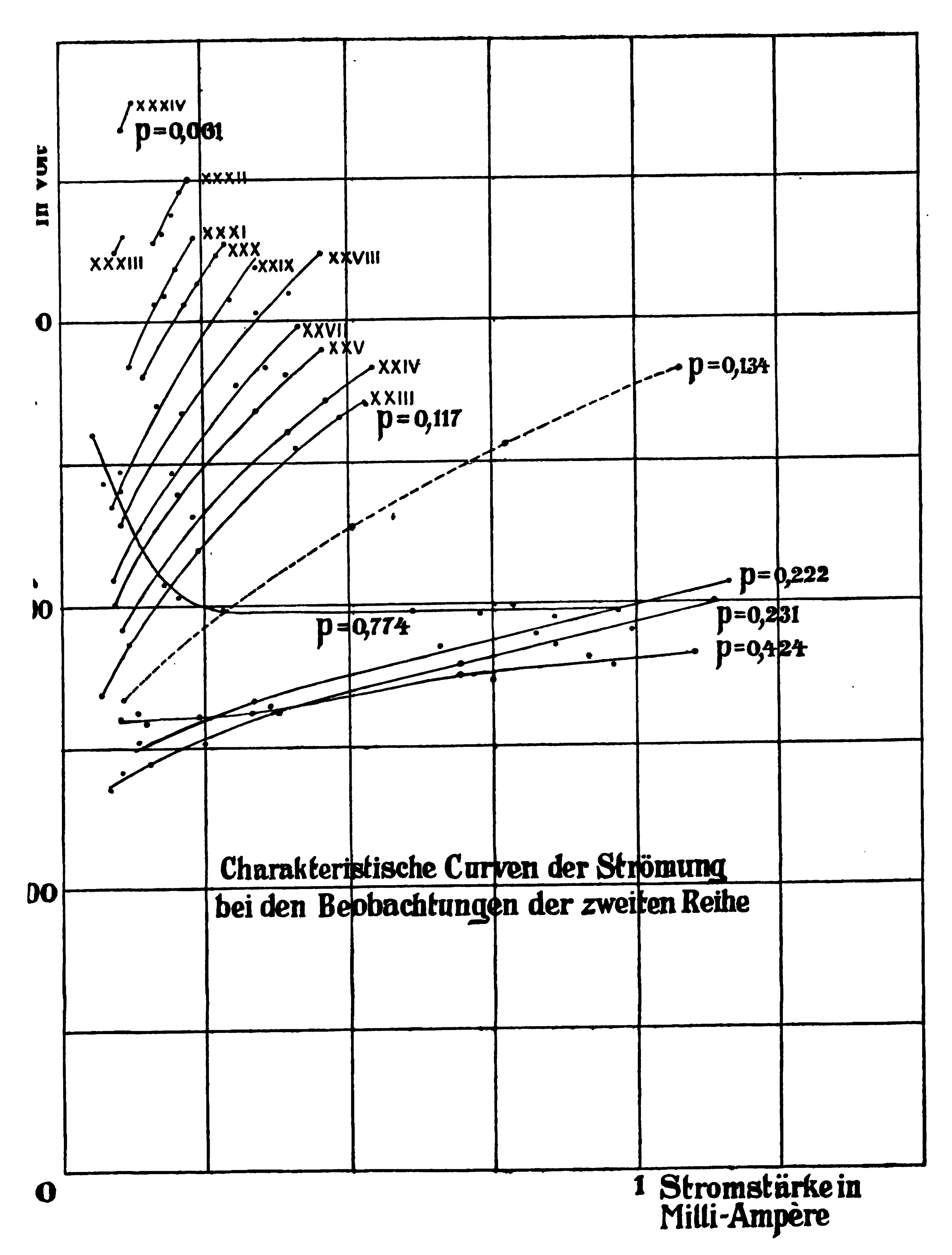

XXXIV
p=0,061
XXXII
XXXIII
XXXI
XXX
XXIX
XXVIII
XXVII
XXV
XXIV
XXIII
p=0,117
p=0,134
p=0,222
p=0,774
p=0,231
p=0,424
Charakteristische Curven der Strömung
bei den Beobachtungen der zweiten Reihe
0
1 Stromstärke in
Milli-Ampère

Fig. 1.

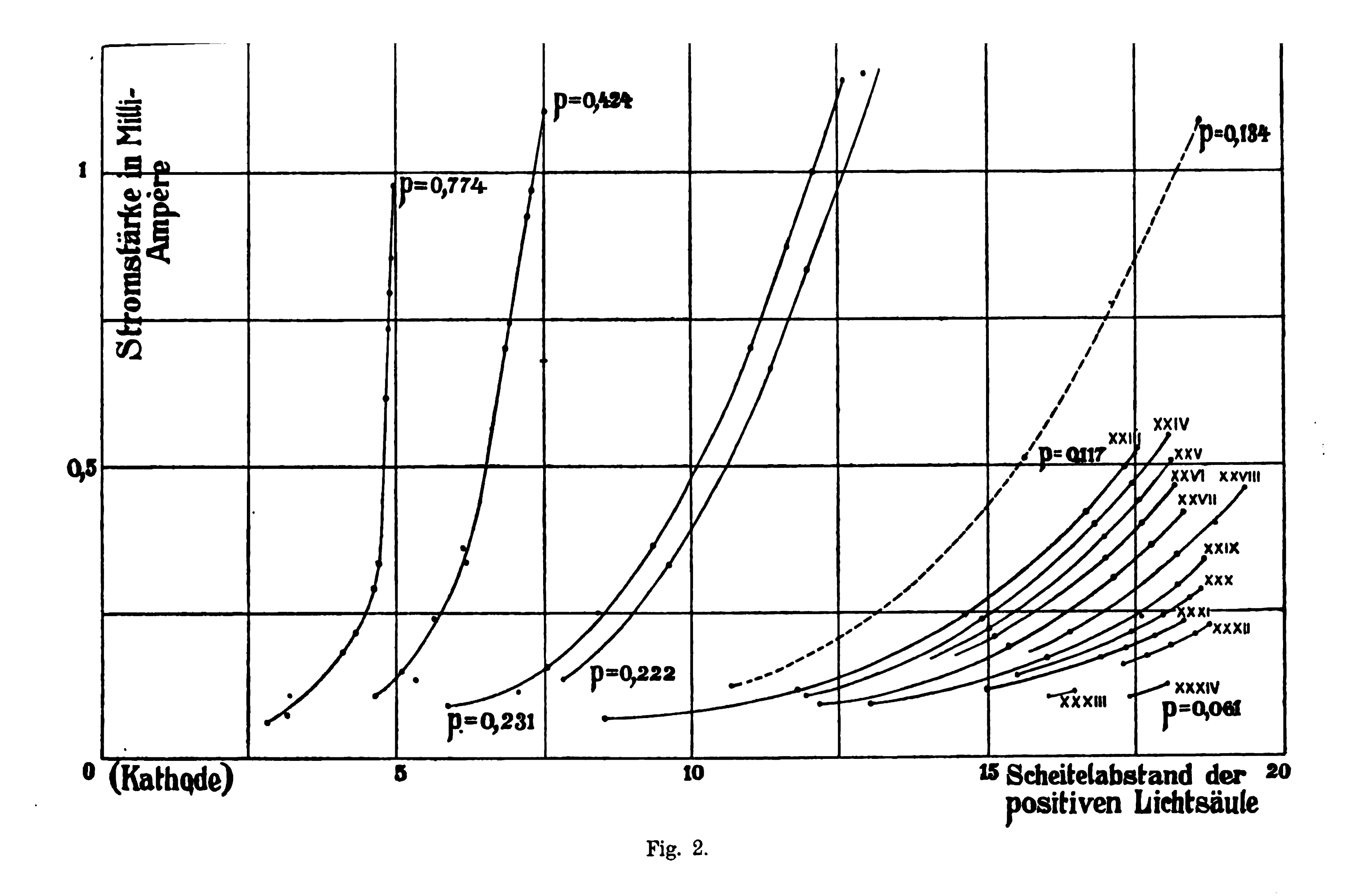

Stromstärke in Milli-Ampère
1
0,5
0 (Kathode)
5
10
15 Scheitelabstand der positiven Lichtsäule
20
p=0,774
p=0,424
p=0,231
p=0,222
p=0,184
p=0,117
p=0,061
XXIII
XXIV
XXV
XXVI
XXVII
XXVIII
XXIX
XXX
XXXI
XXXII
XXXIII
XXXIV

Fig. 2.

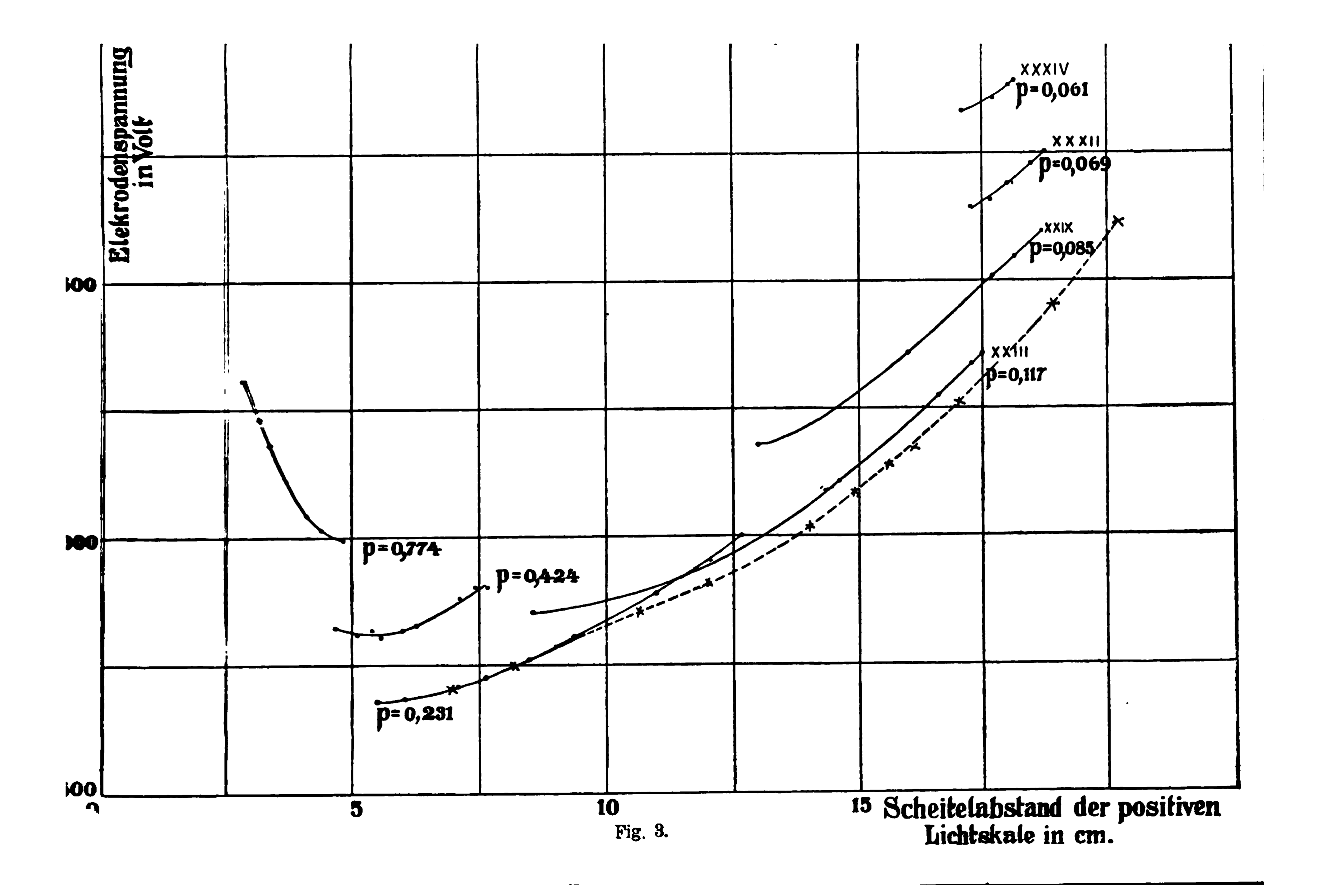

Elekrodenspannung in Volt
XXXIV
p=0,061
XXXII
p=0,069
XXIX
p=0,085
XXIII
p=0,117
p=0,774
p=0,424
p=0,231
5
10
15 Scheitelabstand der positiven Lichtskale in cm.

Fig. 3.

